

# Bac math

Page No.

| <b>math</b>           | <b>I</b> |
|-----------------------|----------|
| 1 sp2021 . . . . .    | 2        |
| 2 sc2021 . . . . .    | 6        |
| 3 sp2020 . . . . .    | 11       |
| 4 sc2020 . . . . .    | 16       |
| 5 sp2019 . . . . .    | 21       |
| 6 sp-c2019 . . . . .  | 25       |
| 7 sc2019 . . . . .    | 30       |
| 8 sc-c2019 . . . . .  | 34       |
| 9 sp2018 . . . . .    | 39       |
| 10 sc2018 . . . . .   | 45       |
| 11 sp2017 . . . . .   | 52       |
| 12 sp-c2017 . . . . . | 58       |
| 13 sc2017 . . . . .   | 66       |
| 14 sc-c2017 . . . . . | 72       |
| 15 sp2016 . . . . .   | 78       |
| 16 sp-c2016 . . . . . | 83       |
| 17 sc2016 . . . . .   | 88       |
| 18 sc-c2016 . . . . . | 94       |
| 19 sp2015 . . . . .   | 100      |
| 20 sp-c2015 . . . . . | 104      |
| 21 sc2015 . . . . .   | 109      |
| 22 sc-c2015 . . . . . | 112      |

|                                                                     |                                                      |                                     |
|---------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| <b>RÉPUBLIQUE TUNISIENNE</b><br><br><b>MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION</b> | <b>EXAMEN DU BACCALAURÉAT</b><br><b>SESSION 2021</b> | <b>Session principale</b>           |
|                                                                     | Épreuve : <b>Mathématiques</b>                       | Section : <b>Mathématiques</b>      |
|                                                                     | Durée : <b>4h</b>                                    | Coefficient de l'épreuve : <b>4</b> |

\* \* \* \* \*

N° d'inscription

Le sujet comporte quatre pages. La page 4/4 est à rendre avec la copie.

### Exercice 1 (5.5 points)

Le plan est orienté dans le sens direct.

Dans la figure de l'annexe jointe,  $OABC$  est un rectangle de centre  $I$  tel que  $OC = 1$ ,  $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$  et  $D$  le point du segment  $[OA]$  tel que  $OD = OC$ .

1) a/ Montrer qu'il existe un unique déplacement  $f$  qui envoie  $O$  sur  $I$  et  $D$  sur  $B$ .

b/ Montrer que  $f$  est une rotation d'angle  $\frac{\pi}{6}$ .

c/ On note  $\Omega$  le centre de  $f$ . Construire  $\Omega$ .

2) Soit  $g$  l'antidépacement qui envoie  $O$  sur  $I$  et  $D$  sur  $B$ .

a/ Montrer que  $g$  est une symétrie glissante.

b/ Soit  $J$  le milieu du segment  $[OI]$  et  $K$  le milieu du segment  $[BD]$ .

Les droites  $(JK)$  et  $(OA)$  se coupent au point  $E$ .

Montrer que  $g(E) = J$ .

c/ En déduire que  $g = S_{(JK)} \circ t_{\overrightarrow{EJ}}$ .

3) a/ Montrer que  $f^{-1} \circ g = S_{(OA)}$ . En déduire que  $f(E) = J$ .

b/ Comparer  $OE$  et  $OJ$ . En déduire que les droites  $(O\Omega)$  et  $(JK)$  sont perpendiculaires.

Dans la suite, on munit le plan du repère orthonormé direct  $(O, \overrightarrow{OD}, \overrightarrow{OC})$ .

On note  $z_I$ ,  $z_J$  et  $z_K$  les affixes respectives des points  $I$ ,  $J$  et  $K$ .

4) a/ Justifier que  $z_I = e^{i\frac{\pi}{6}}$ .

b/ Montrer que  $z_K - z_J = \cos(\frac{\pi}{12})e^{i\frac{\pi}{12}}$ .

c/ Déterminer une mesure de l'angle orienté  $(\overrightarrow{OD}, \overrightarrow{JK})$ .

5) Soit  $M$  un point de la droite  $(JK)$ . On désigne par  $N$  le symétrique de  $M$  par rapport à  $(OA)$  et par  $P$  l'image de  $M$  par  $g$ .

a/ Soit  $r$  la rotation de centre  $E$  et d'angle  $-\frac{\pi}{6}$ .

Montrer que  $r(M) = N$ .

b/ En déduire que  $f(N) = P$ .



### Exercice 2 (4 points)

- 1) a/ Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $21^n \equiv 1 + 20n \pmod{100}$ .  
b/ En déduire les deux derniers chiffres de l'entier  $2021^{2021}$ .

On note  $E$  l'ensemble des entiers  $x \in \mathbb{Z}$  tels que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$x^n \equiv 1 + n(x - 1) \pmod{100}.$$

- 2) Vérifier que 21 est un élément de  $E$ .  
3) Soit  $x$  un élément de  $E$ .  
a/ Montrer que  $(x - 1)^2 \equiv 0 \pmod{100}$ .  
b/ En déduire que  $x \equiv 1 \pmod{10}$ .  
4) Soit  $q \in \mathbb{Z}$ . Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $(1 + 10q)^n \equiv 1 + 10nq \pmod{100}$ .  
5) Déterminer l'ensemble  $E$ .

### Exercice 3 (6 points)

- 1) Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $\varphi(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$ . On désigne par  $(\mathcal{C})$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan.  
a/ Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \varphi(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \varphi(x)$ . Interpréter graphiquement les résultats.  
b/ Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $\varphi'(x) = \frac{-\ln x}{x^2}$ .  
c/ Dresser le tableau de variation de  $\varphi$ .  
d/ Tracer la courbe  $(\mathcal{C})$ , en précisant l'intersection avec l'axe des abscisses.

Dans la suite de l'exercice,  $n$  est un entier supérieur ou égal à 1.

- 2) Soit  $\varphi_n$  la fonction définie sur  $] -n, +\infty[$  par  $\varphi_n(x) = \frac{1 + \ln(x + n)}{x + n}$ .  
On désigne par  $(\mathcal{C}_n)$  sa courbe représentative dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .  
a/ En remarquant que  $\varphi_n(x) = \varphi(x + n)$ , montrer que  $(\mathcal{C}_n)$  est l'image de  $(\mathcal{C})$  par une translation que l'on précisera.  
b/ Tracer  $(\mathcal{C}_1)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .  
3) Soit  $h_n$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $h_n(x) = \varphi_n(x) - \varphi(x)$ .  
a/ Montrer que pour tout  $x \geq 1$ ,  $h_n(x) < 0$ .  
b/ Montrer que pour tout  $x$  de  $]0, 1]$ ,  $h'_n(x) < 0$ .  
c/ En déduire que l'équation  $h_n(x) = 0$  admet dans l'intervalle  $]0, +\infty[$  une unique solution  $\alpha_n$  et vérifier que  $\frac{1}{e} < \alpha_n < 1$ .  
4) a/ Montrer que  $n + 1 + \alpha_{n+1} > n + \alpha_n$ .  
b/ Comparer  $\varphi(\alpha_{n+1})$  et  $\varphi(\alpha_n)$ .  
c/ Montrer que la suite  $(\alpha_n)_{n \geq 1}$  est convergente. On note  $\ell$  sa limite.  
d/ Justifier que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \varphi(\alpha_n) = 0$ . En déduire la valeur de  $\ell$ .



### Exercice 4 (4.5 points)

1) Soit  $F$  et  $H$  les fonctions définies sur  $[0, +\infty[$  par

$$F(x) = \int_1^x e^{-\sqrt{t}} dt \text{ et } H(x) = \frac{4}{e} - 2(1 + \sqrt{x})e^{-\sqrt{x}}.$$

a/ Montrer que  $F$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$  et donner  $F'(x)$ .

b/ Montrer que pour tout  $x > 0$ ,  $F(x) = H(x)$ .

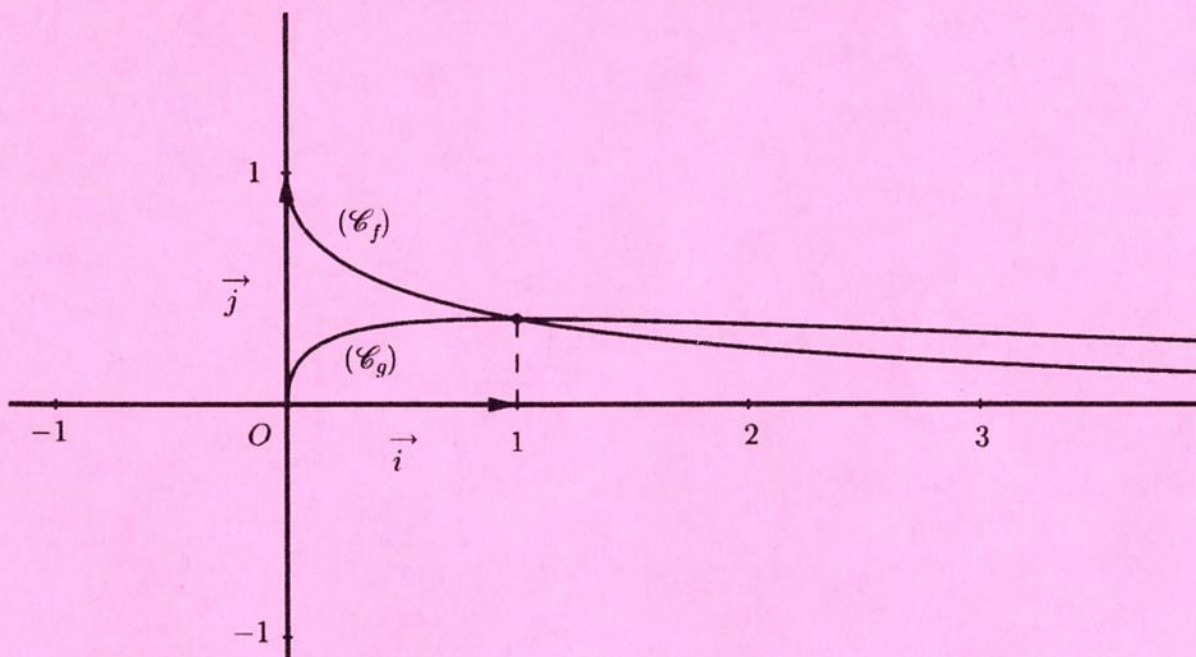
c/ En déduire que  $F(0) = H(0)$ .

2) Soit  $G$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par  $G(x) = \int_1^x \sqrt{t}e^{-\sqrt{t}} dt$ .

a/ En remarquant que pour tout  $t > 0$ ,  $\sqrt{t} = \frac{t}{\sqrt{t}}$ , montrer à l'aide d'une intégration par parties que  $G(x) = \frac{2}{e} - 2xe^{-\sqrt{x}} + 2F(x)$ , pour tout  $x > 0$ .

b/ Justifier que  $G(0) = \frac{2}{e} + 2F(0)$ .

3) Ci-dessous on a tracé, dans un repère orthonormé, les courbes  $(\mathcal{C}_f)$  et  $(\mathcal{C}_g)$  des fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $[0, +\infty[$  par  $f(x) = e^{-\sqrt{x}}$  et  $g(x) = \sqrt{x}e^{-\sqrt{x}}$ .



Pour tout  $\lambda \geq 1$ , on désigne par  $\mathcal{A}_\lambda$  l'aire en (u.a) de la partie du plan limitée par  $(\mathcal{C}_f)$ ,  $(\mathcal{C}_g)$  et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = \lambda$ .

a/ Montrer que  $\mathcal{A}_1 = \frac{6}{e} - 2$ .

b/ Montrer que pour tout  $\lambda > 1$ ,  $\mathcal{A}_\lambda = \mathcal{A}_1 + G(\lambda) - F(\lambda)$ .

c/ Calculer  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_\lambda$ .





Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....

Nom et Prénom : .....

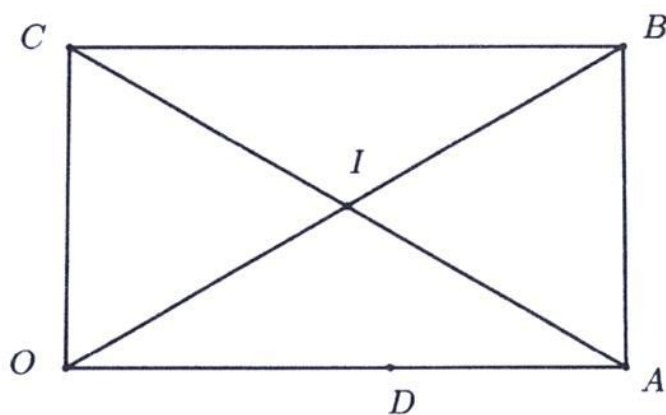
Date et lieu de naissance : .....

Signatures des surveillants

.....  
.....



**Épreuve: Mathématiques - Section : Mathématiques**  
**Session principale (2021)**  
**Annexe à rendre avec la copie**



|                                                                     |                                                      |                                     |
|---------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| <b>RÉPUBLIQUE TUNISIENNE</b><br><br><b>MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION</b> | <b>EXAMEN DU BACCALAURÉAT</b><br><b>SESSION 2021</b> | <b>Session de contrôle</b>          |
|                                                                     | Épreuve : <b>Mathématiques</b>                       | Section : <b>Mathématiques</b>      |
|                                                                     | Durée : <b>4h</b>                                    | Coefficient de l'épreuve : <b>4</b> |

N° d'inscription

\* \* \* \* \*

Le sujet comporte cinq pages. Les pages 4/5 et 5/5 sont à rendre avec la copie.

### Exercice 1 (3 points)

Soit  $a \in \mathbb{Z}$ .

- Déterminer les restes possibles modulo 6 de l'entier  $a^2$ .
- Vérifier que  $a^3 \equiv a \pmod{6}$ .
- Montrer par récurrence que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a^{2n+1} \equiv a \pmod{6}$ .
  - En déduire que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $a^{2n} \equiv a^2 \pmod{6}$ .
- Résoudre dans  $\mathbb{Z}^2$  le système 
$$\begin{cases} x^7 - y^8 \equiv 0 \pmod{6}, \\ x^3 y^2 \equiv 1 \pmod{6}. \end{cases}$$

### Exercice 2 (5 points)

Le plan est orienté dans le sens direct. Dans la figure 1 de l'annexe jointe,  $ABC$  est un triangle rectangle et isocèle en  $A$  de sens direct, le point  $O$  est le milieu du segment  $[BC]$  et les triangles  $AEB$  et  $ACF$  sont équilatéraux directs.

- Soit  $r_1$  la rotation de centre  $A$  et d'angle  $\frac{5\pi}{6}$ . Montrer que  $r_1(B) = F$  et  $r_1(E) = C$ .
- Soit  $S$  la symétrie orthogonale d'axe  $(OA)$ .
  - Montrer que  $S([BE]) = [CF]$ .
  - Les droites  $(BE)$  et  $(CF)$  se coupent en un point  $\Omega$ .  
Montrer que les points  $A$ ,  $O$  et  $\Omega$  sont alignés.
- Soit  $f$  un déplacement qui envoie le segment  $[BE]$  sur le segment  $[CF]$ .
  - Montrer que  $f = r_1$  ou  $f$  est la rotation  $r_2$  d'angle  $-\frac{\pi}{6}$  et de centre  $\Omega$ .
  - Construire le point  $A' = r_2(A)$  et montrer que  $ACA'F$  est un losange.
- Soit  $g$  l'antidéplacement qui envoie  $B$  sur  $F$  et  $E$  sur  $C$ .
  - Montrer que  $g$  est une symétrie glissante.
  - Montrer que  $g(A) = A'$ .
  - Soit  $I$  le milieu du segment  $[BE]$  et  $J = g(I)$ . Montrer que  $g = S_{(IJ)} \circ t_{\overrightarrow{IJ}}$ .



### Exercice 3 (4.5 points)

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

- 1) a/ Résoudre dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  l'équation :  $z^2 + z + \frac{1}{3} = 0$ .

On note  $z_1$  et  $z_2$  les solutions avec  $\text{Im}(z_1) > 0$ .

b/ Écrire  $z_1$  sous forme exponentielle.

Dans la figure 2 de l'annexe jointe,  $A$  et  $B$  sont les points d'affixes respectives 1 et  $e^{i\frac{5\pi}{6}}$ .  $\Delta$  est la droite d'équation  $x = -\frac{1}{2}$ .

- 2) La droite  $\Delta$  coupe la droite  $(OB)$  au point  $C$ .

Montrer que l'affixe du point  $C$  est égale à  $z_1$ .

- 3) Soit  $D$  le point d'affixe  $z_D = \frac{1}{3\sqrt{3}}i$ .

a/ Vérifier que  $z_D = z_1^3$ .

b/ Montrer que  $\frac{z_D - 1}{z_1 - 1} = \frac{2}{3}$ .

c/ Construire le point  $D$ .

- 4) Soit  $z \in \mathbb{C}$ .

Montrer que  $(z^2 + z \in \mathbb{R})$  équivaut à  $(z \in \mathbb{R} \text{ ou } \text{Re}(z) = -\frac{1}{2})$ .

- 5) Pour  $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$ , on désigne par  $M$  et  $N$  les points d'affixes respectives  $z$  et  $z^3$ .

a/ Déterminer l'ensemble des points  $M$  du plan tels que les vecteurs  $\overrightarrow{AM}$  et  $\overrightarrow{AN}$  sont colinéaires.

b/ Dans la figure 2 de l'annexe, on a placé un point  $P$  de la droite  $\Delta$  d'affixe  $\alpha$ .  
Construire, en justifiant, le point  $Q$  d'affixe  $\alpha^3$ .

### Exercice 4 (7.5 points)

#### Partie A

Dans la figure 3 de l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , la courbe représentative  $(\mathcal{C}_g)$  de la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = xe^x$ .

$\alpha$  et  $\beta$  sont les réels tels que  $g(\alpha) = 1$  et  $g(\beta) = \frac{1}{2}$ .

- 1) En utilisant le graphique,

a/ donner le tableau de signe de la fonction dérivée  $g'$  de  $g$ ,

b/ résoudre dans  $\mathbb{R}$  chacune des inéquations ci-dessous.

$$g(x) < \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad g(x) < 1.$$

- 2) Montrer que  $\alpha > \frac{1}{2}$ .



3) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = g(x) - (g(x))^2$ .

On désigne par  $(\mathcal{C}_f)$  sa courbe représentative dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

a/ Calculer  $f(\alpha)$  et  $f(\beta)$ .

b/ Calculer  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . Interpréter le résultat.

c/ Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ . Déterminer la branche infinie de  $(\mathcal{C}_f)$  au voisinage de  $+\infty$ .

4) a/ Montrer que pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 2g'(x) \left( \frac{1}{2} - g(x) \right)$ .

b/ Dresser le tableau de variation de  $f$ .

c/ Tracer  $(\mathcal{C}_f)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

5) Soit  $\mathcal{A}$  l'aire en (u.a) de la partie du plan limitée par  $(\mathcal{C}_f)$ ,  $(\mathcal{C}_g)$  et les droites d'équations respectives  $x=0$  et  $x=\alpha$ .

a/ Montrer que  $\mathcal{A} = \frac{1}{2} - \int_0^\alpha x e^{2x} dx$ .

b/ En déduire que  $\mathcal{A} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\alpha} + \frac{1}{4\alpha^2}$ .

### Partie B

Pour tout entier  $n \geq 2$ , on pose  $J_n = \int_0^\alpha (g(x))^n dx$ .

1) a/ Montrer que  $0 \leq J_n \leq \frac{\alpha}{n+1}$ .

b/ En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$ .

2) a/ Montrer que  $\int_{\alpha - \frac{1}{n}}^\alpha (g(x))^n dx \leq J_n$ .

b/ Montrer que  $\frac{1}{n} \left[ g \left( \alpha - \frac{1}{n} \right) \right]^n \leq J_n \leq 1$ .

c/ Justifier que  $\sqrt[n]{n} = e^{\frac{\ln n}{n}}$  puis montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{J_n} = 1$ .





Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....

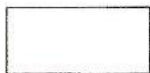
Nom et Prénom : .....

Date et lieu de naissance : .....

Signatures des surveillants

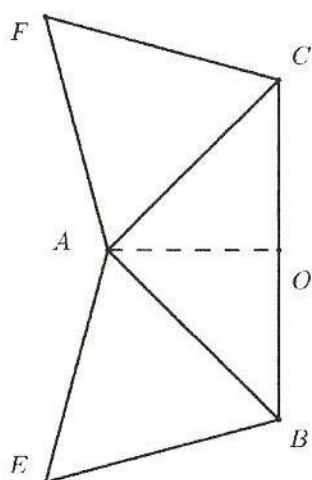
.....

.....

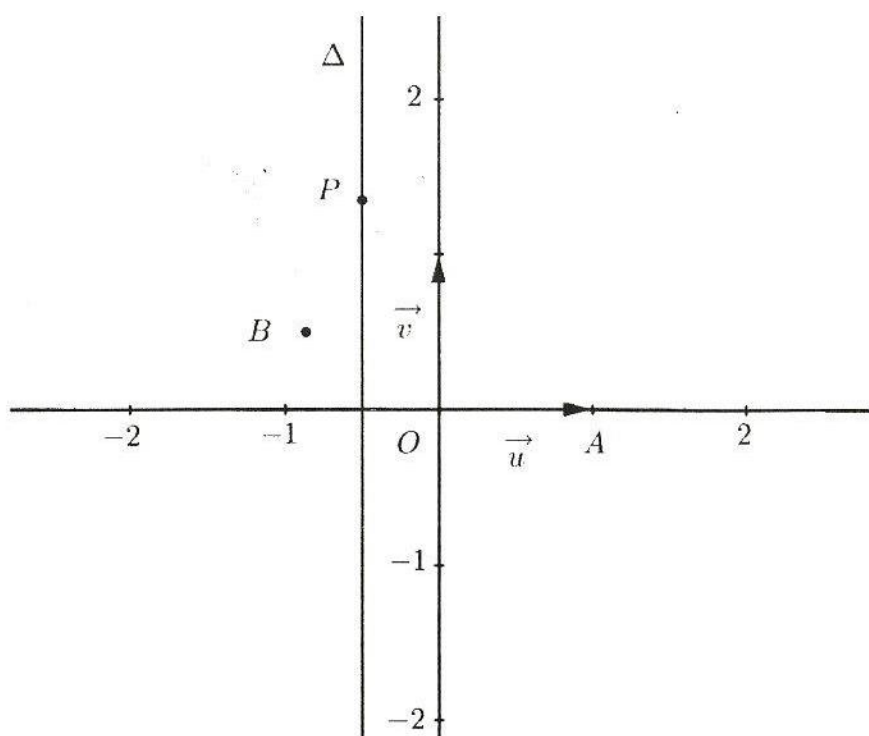


**Épreuve: Mathématiques - Section : Mathématiques**  
**Session de contrôle (2021)**  
**Annexe à rendre avec la copie**

**Figure 1**

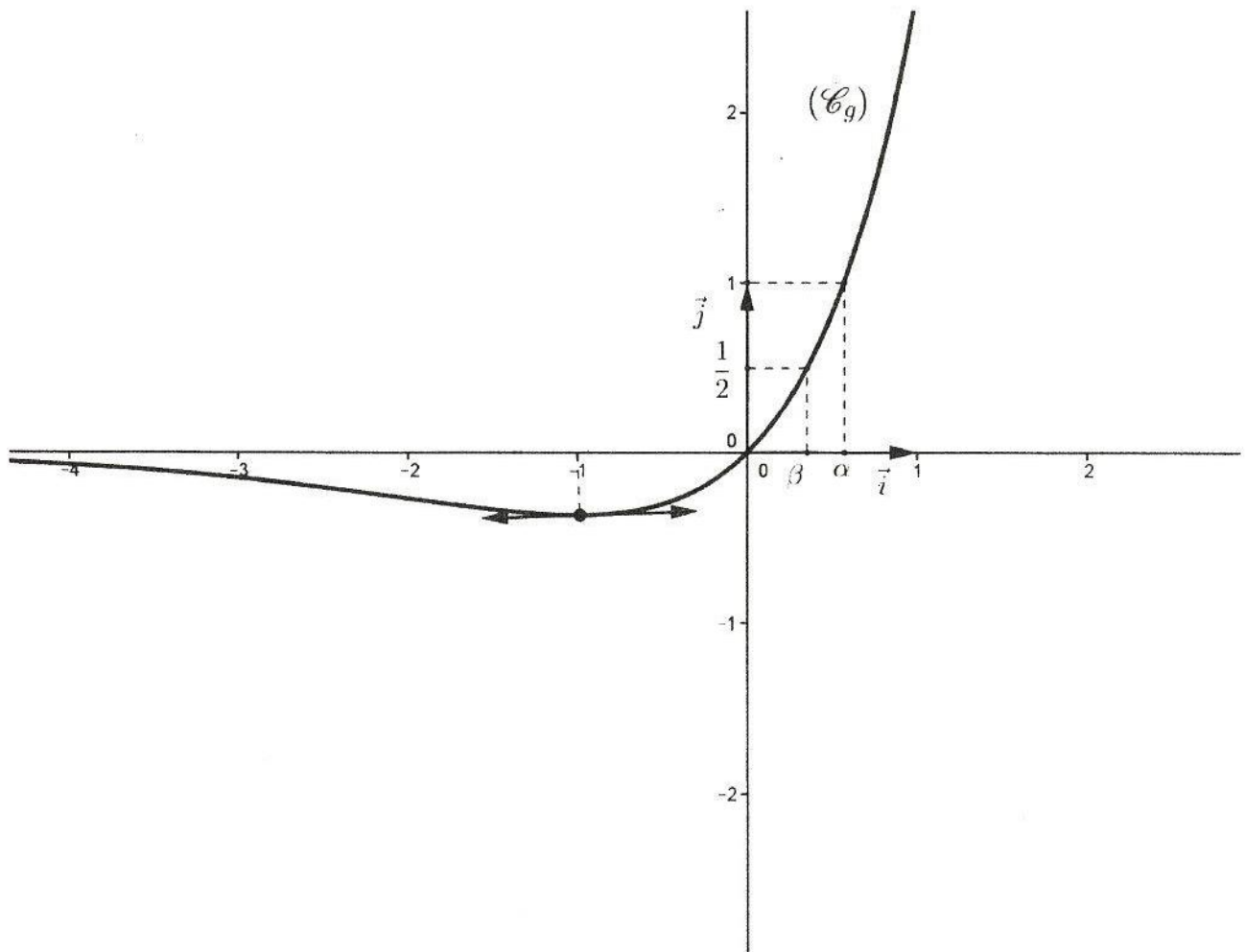


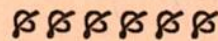
**Figure 2**



Ne rien écrire ici

Figure 3





Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.

La page 5/5 est à rendre avec la copie.

### Exercice 1 : (5 points)

Le plan est orienté.

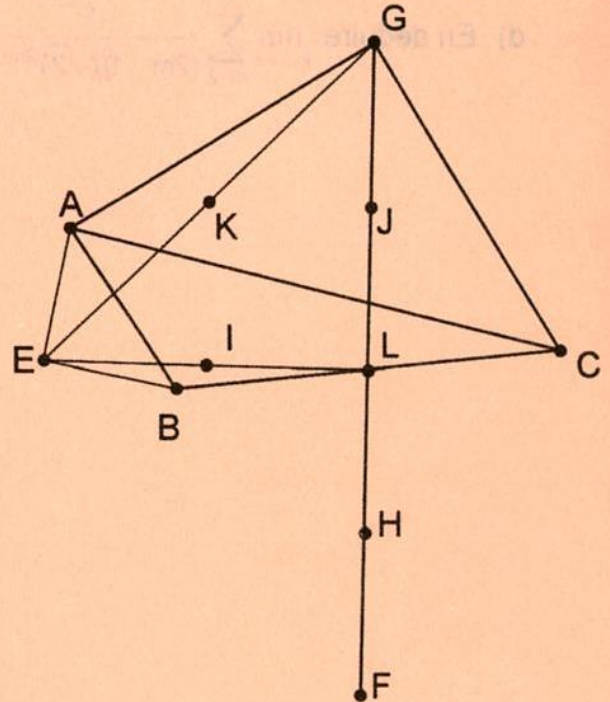
Dans la figure ci-contre, ABC est un triangle direct, non rectangle et non isocèle.

GAC et EBA sont des triangles directs, rectangles et isocèles respectivement en G et en E.

L, K, I et J sont les milieux respectifs des côtés  $[BC]$ ,  $[GE]$ ,  $[EL]$  et  $[GL]$ . F et H sont les symétriques respectifs de G et J par rapport à L.

On note  $r_1$  et  $r_2$  les rotations de même angle  $\frac{\pi}{2}$

et de centres respectifs  $G$  et  $E$ .  $S_L$  désigne la symétrie centrale de centre  $L$ .



- 1) a) Déterminer  $r_2 \circ S_L \circ r_1(A)$ .

Caractériser  $r_2 \circ S_1 \circ r_1$ .

- b) En déduire que le triangle EFG est rectangle, isocèle.  
c) Justifier que le quadrilatère LJKI est un carré.

- 2) Soit  $\phi$  la symétrie glissante de vecteur  $\overrightarrow{LK}$  et d'axe  $\Delta$  passant par I.

On pose  $g = \varphi \circ S_{(LE)}$ , où  $S_{(LE)}$  est la symétrie orthogonale d'axe (LE).

- a) Montrer que  $\Delta = (IH)$ .  
b) Montrer que  $g(J) = I$  et  $g(L) = E$ .

- c) Prouver que  $g$  est la rotation de centre  $K$  et d'angle  $-\frac{\pi}{2}$ .

- 3) Soit  $f$  l'antidépagement qui envoie  $J$  en  $I$  et  $L$  en  $E$ .

- Justifier que  $f$  est une symétrie glissante.
- Donner les éléments caractéristiques de  $f$ .

- 4) Soit  $M$  un point du plan. Soient  $M'$  et  $M''$  les images de  $M$  respectivement par  $f$  et  $g$ .  
Montrer que  $M'$  et  $M''$  sont symétriques par rapport à une droite fixe que l'on précisera.

## Exercice 2 : (4 points)

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

Dans la figure 1 de l'annexe,  $(\Gamma)$  est le cercle de centre O et de rayon  $\sqrt{2}$ , A, B et C sont les points d'affixes respectives 1,  $i\sqrt{2}$  et  $-i\sqrt{2}$ .

Soit Q un point du cercle  $(\Gamma)$  d'affixe un nombre complexe  $a$ , distinct de  $i\sqrt{2}$  et  $-i\sqrt{2}$ .

1) On désigne par R le point d'affixe  $a + \bar{a}$ .

- a) Vérifier que  $R \in (O, \vec{u})$ . Construire R.
- b) Déterminer les nombres complexes  $a$  pour lesquels O, R et Q sont alignés.

2) Soit P le point du plan d'affixe  $ia$  et M un point d'affixe  $z$  non nul.

- a) Justifier que P est l'image de Q par une rotation que l'on précisera. Construire P.
- b) Montrer que A, P et M sont alignés  $\Leftrightarrow (i\bar{a} + 1)z + (ia - 1)\bar{z} = i(a + \bar{a})$ .
- c) Montrer que  $(AP) \perp (OM) \Leftrightarrow (i\bar{a} + 1)z - (ia - 1)\bar{z} = 0$ .
- d) Soit H le projeté orthogonal de O sur (AP). On désigne par  $Z_H$  l'affixe du point H.

Justifier que  $Z_H = \frac{i(a + \bar{a})}{2(i\bar{a} + 1)}$ .

3) Soit N le point d'affixe  $Z_N = \frac{(a + \bar{a})}{(i\bar{a} + 1)}$ .

- a) Vérifier que N est l'image de H par une similitude que l'on déterminera.
- b) Construire le point N.
- c) Déterminer l'ensemble sur lequel varie le point N lorsque Q varie sur le cercle  $(\Gamma)$  privé des points B et C.

## Exercice 3 : (4 points)

On considère la suite  $(a_n)$  définie sur  $\mathbb{N}$  par  $a_n = 2 \times 5^n + 7$ .

- 1) a) Justifier que pour tout entier naturel  $n$ ,  $a_n$  est impair.
- b) Déterminer suivant les valeurs de  $n$ , le reste modulo 8 de  $5^n$ .
- c) En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $a_n \equiv 1 \pmod{8}$ .

2) a) Montrer que si  $\begin{cases} x \equiv 1 \pmod{8} \\ x \equiv 7 \pmod{125} \end{cases}$  alors  $x \equiv 257 \pmod{1000}$ .

b) Montrer que pour tout  $n \geq 3$ ,  $a_n \equiv 257 \pmod{1000}$ .

c) Quels sont les trois derniers chiffres de  $(2 \times 5^{2020} + 7)(2 \times 5^{2021} + 7)$  ?

3) a) Vérifier que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $5a_{2n} - a_{2n+1} = 28$ .

b) Soit  $d$  le PGCD de  $a_{2n}$  et  $a_{2n+1}$ . Montrer que  $d$  est différent de 7.

c) Trouver alors  $d$ .

## Exercice 4 : (7 points)

I. Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$ .

On désigne par  $(\zeta)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan  $P$ .

1) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et que pour tout réel  $x$ ,  $f'(x) = \frac{-e^{2x}}{(1+e^{2x})\sqrt{1+e^{2x}}}$ .

2) a) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ . Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

b) Vérifier que pour tout réel  $x$ ,  $0 < f(x) < 1$ .

3) a) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

b) Montrer que  $f$  réalise une bijection  $f^{-1}$  de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.

c) Montrer que l'équation  $f(x) = x$  admet une unique solution  $\alpha$  telle que  $0,5 < \alpha < 0,6$ .

d) Déterminer le signe de  $f(x) - x$  pour tout réel  $x$ . Interpréter graphiquement le résultat.

4) Dans la figure 2 de l'annexe, on a construit la droite d'équation  $y = x$  et on a placé le réel

$\alpha$  sur l'axe des abscisses et le réel  $\frac{\sqrt{2}}{2}$  sur l'axe des ordonnées.

a) Tracer la courbe  $(\zeta)$ .

b) Tracer la courbe  $(\zeta')$  de  $f^{-1}$ .

5) a) Montrer que la fonction  $h$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $h(x) = x - \ln(1 + \sqrt{1+e^{2x}})$  est une primitive de  $f$ .

b) On désigne par  $A$  l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe  $(\zeta)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = \alpha$ .

Montrer que  $A = \alpha + \ln\left(\frac{\alpha(1+\sqrt{2})}{\alpha+1}\right)$ .

II. Pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , on considère la fonction  $F_k$  définie sur  $[0, +\infty[$ , par  $F_k(x) = \int_0^x (f(t))^k dt$ .

1) a) Montrer que la fonction  $F_k$  est croissante sur  $[0, +\infty[$ ,

b) Montrer que pour tout réel  $t \in [0, +\infty[$ ,  $0 \leq (f(t))^k \leq e^{-kt}$ .

c) En déduire que pour tout  $x \in [0, +\infty[$ ,  $0 \leq F_k(x) \leq \frac{1}{k}$ .

d) Montrer alors que la fonction  $F_k$  possède une limite finie  $I_k$  quand  $x$  tend vers  $+\infty$ .

e) Montrer que  $\lim_{k \rightarrow +\infty} I_k = 0$ .

2) a) En utilisant la question I.5.a) montrer que  $I_1 = -h(0)$ .

b) Montrer que pour tout réel  $t \in [0, +\infty[$ ,  $(f(t))^3 - f(t) = f'(t)$ .

c) En déduire que pour tout  $x \geq 0$ ,  $F_3(x) = F_1(x) + f(x) - f(0)$ .

d) Montrer que  $I_3 = \ln(1+\sqrt{2}) - \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

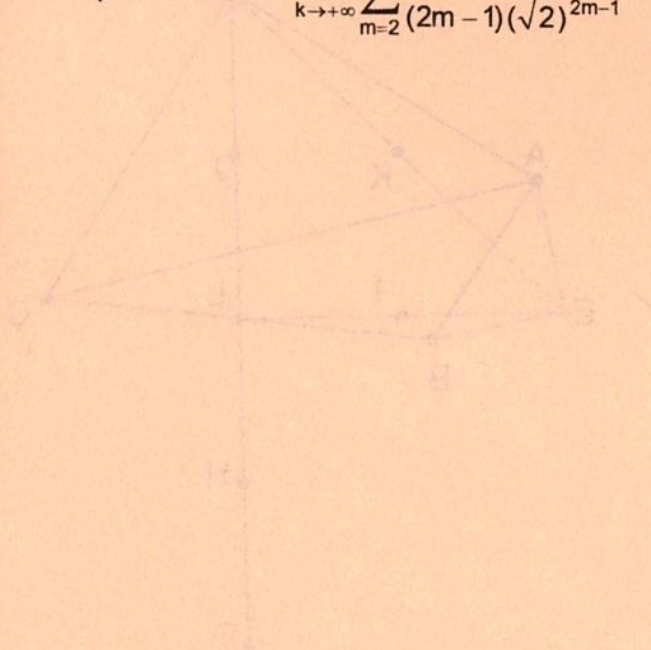
3) a) Montrer que pour tout  $x \geq 0$  et pour tout  $k \geq 2$ ,

$$F_{2k+1}(x) - F_{2k-1}(x) = \frac{1}{2k-1} \left( (f(x))^{2k-1} - (f(0))^{2k-1} \right).$$

b) En déduire que  $I_{2k+1} - I_{2k-1} = \frac{-1}{(2k-1)(\sqrt{2})^{2k-1}}$ ,  $k \geq 2$ .

c) Montrer que  $I_{2k+1} = I_3 - \sum_{m=2}^k \frac{1}{(2m-1)(\sqrt{2})^{2m-1}}$ ,  $k \geq 2$ .

d) En déduire  $\lim_{k \rightarrow +\infty} \sum_{m=2}^k \frac{1}{(2m-1)(\sqrt{2})^{2m-1}}$ .





Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....

Nom et Prénom : .....

Date et lieu de naissance : .....

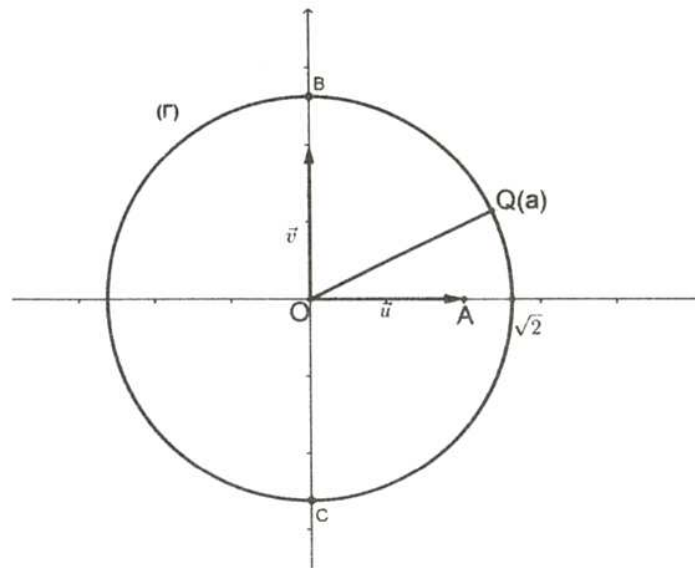
Signatures des surveillants

.....  
.....

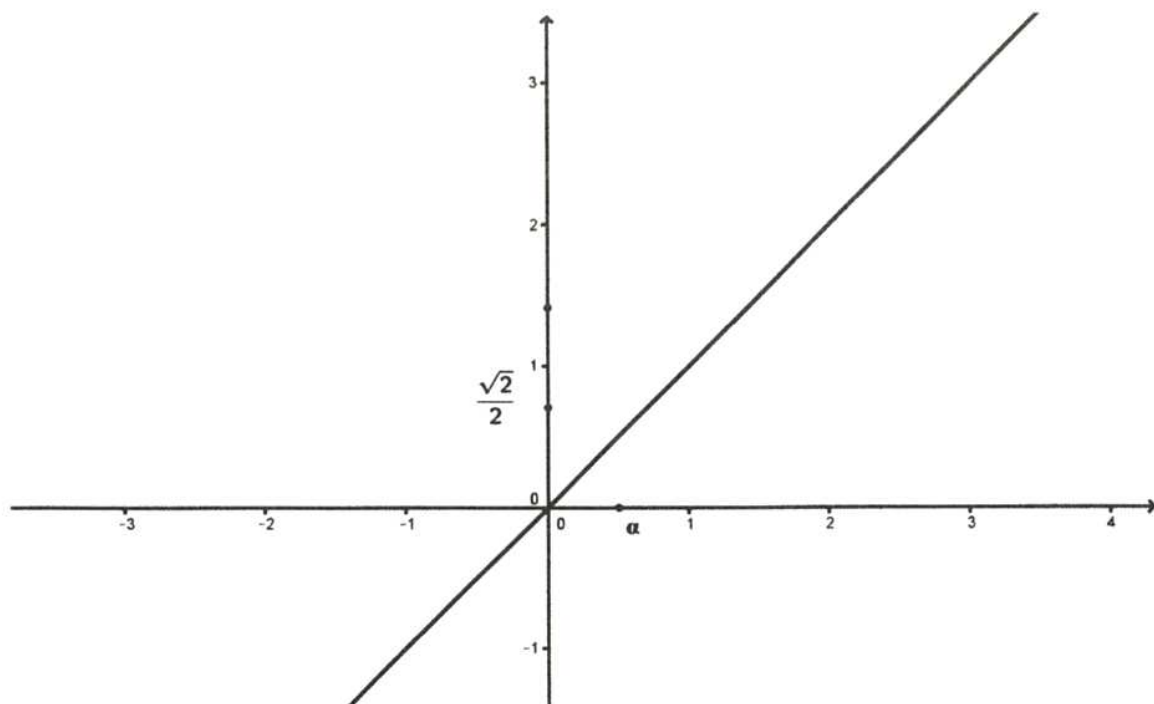


**Épreuve: Mathématiques - Section : Mathématiques**  
**Session principale (2020)**  
**Annexe à rendre avec la copie**

**Figure 1**



**Figure 2**



|                                                                                                                         |                                |                                     |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|
| <b>RÉPUBLIQUE TUNISIENNE</b><br><b>MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION</b><br><b>EXAMEN DU BACCALAURÉAT</b><br><b>SESSION 2020</b> | <b>Session de contrôle</b>     |                                     |
|                                                                                                                         | Épreuve : <b>Mathématiques</b> | Section : <b>Mathématiques</b>      |
|                                                                                                                         | Durée : <b>4h</b>              | Coefficient de l'épreuve : <b>4</b> |

❧❧❧❧❧❧

Le sujet comporte 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5.  
La page 5/5 est à rendre avec la copie.

### Exercice 1 : (5 points)

Le plan est orienté.

Dans la **figure** de l'annexe jointe, ABC est un triangle équilatéral direct de centre O.

I, J et K sont les milieux respectifs des cotés [BC], [AC] et [AB].

Soit S la similitude directe de centre B et telle que  $S(J)=C$ .

- 1) Déterminer l'angle de S et montrer que son rapport est égal à  $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ .
- 2) Soit  $(\Gamma)$  le cercle de diamètre [AB] et  $(\Gamma')$  le cercle circonscrit au triangle ABC.
  - a) Montrer que  $S(K) = O$ .
  - b) En déduire que  $S(\Gamma) = \Gamma'$ .
  - c) Déterminer et construire le point  $A' = S(A)$ .
- 3) La droite (OC) recoupe  $(\Gamma')$  en P et la droite (BP) recoupe  $(\Gamma)$  en Q.

On note  $S^{-1}$  l'application réciproque de S.

- a) Donner la nature et les éléments caractéristiques de  $S^{-1}$
  - b) Montrer que  $S^{-1}(A) = Q$ .
  - c) Quelle est la nature du triangle BJQ ?
  - d) Prouver que K est le milieu du segment [QI].
- 4) Soit  $\sigma = S \circ S_{(AB)}$  où  $S_{(AB)}$  est la symétrie orthogonale d'axe (AB).
- a) Justifier que  $\sigma$  est une similitude indirecte et déterminer ses éléments caractéristiques.
  - b) Déterminer  $\sigma(Q)$  et  $\sigma(J)$ .
  - c) La droite (IJ) coupe la droite (QB) en un point M.  
Déterminer et construire le point  $M' = \sigma(M)$ .

## Exercice 2 : (4 points)

Soit  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $r$  le reste modulo 7 de  $k$ .

1) Montrer chacun des résultats suivants :

$$k^3 \equiv 1 \pmod{7}, \text{ si et seulement si, } r \in \{1, 2, 4\}.$$

$$k^3 \equiv 6 \pmod{7}, \text{ si et seulement si, } r \in \{3, 5, 6\}.$$

$$k^3 \equiv 0 \pmod{7}, \text{ si et seulement si, } r = 0.$$

2) Soit  $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ . Déterminer les restes possibles modulo 7 de  $x^3 + y^3$ .

3) Pour tout  $a \in \mathbb{N}^*$ , on désigne par  $E_a = \left\{ (x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, x^3 + y^3 = a \right\}$ .

Montrer que les équations  $x^3 + y^3 \equiv 3 \pmod{7}$  et  $x^3 + y^3 \equiv 4 \pmod{7}$  n'admettent

pas de solutions dans  $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ .

4) On considère l'ensemble  $E_{9990}$ . Supposons qu'il existe  $(x, y) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$  tel que  $(x, y) \in E_{9990}$ .

a) Montrer alors que  $x \equiv 0 \pmod{7}$  ou  $y \equiv 0 \pmod{7}$ .

b) Déterminer  $E_{9990}$ .

## Exercice 3 : (5 points)

On dispose d'une urne  $U_1$  contenant deux boules noires et deux boules blanches et d'une urne  $U_2$  contenant une boule noire et trois boules blanches. Toutes les boules sont indiscernables au toucher. On procède à l'expérience aléatoire suivante :

On tire au hasard une boule de  $U_1$ .

- Si elle est blanche, on la remet dans  $U_1$  et on tire simultanément deux boules de  $U_2$ ,

- Si elle est noire, on la met dans  $U_2$  et on tire simultanément deux boules de  $U_2$ .

On considère les événements suivants :

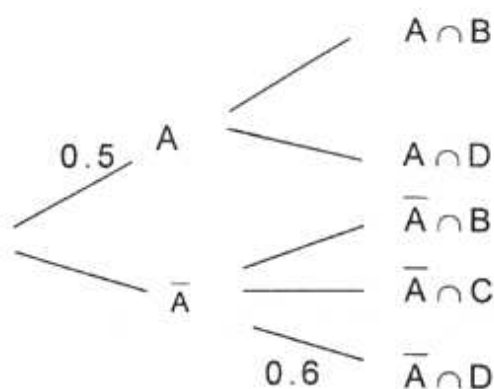
A « La boule tirée de  $U_1$  est blanche. »

B « On tire deux boules blanches de l'urne  $U_2$ . »

C « On tire deux boules noires de l'urne  $U_2$ . »

D « On tire deux boules de couleurs différentes de l'urne  $U_2$ . ».

1) a) Recopier et compléter l'arbre de choix suivant :



- b) Déterminer  $p(B)$  et  $p(D)$ .
- c) Montrer que la probabilité qu'il ne reste aucune boule noire dans  $U_2$  est égale à  $\frac{3}{10}$ .
- 2) Soit  $X$  la variable aléatoire ayant pour valeur le nombre de boules noires restantes dans  $U_2$ .
- a) Déterminer la loi de probabilité de  $X$ .
- b) Quelle est la probabilité qu'il reste au moins une boule noire dans  $U_2$  ?
- 3) On répète  $n$  fois de suite ( $n > 1$ ) et de manière indépendante l'expérience aléatoire précédente. On désigne par  $F_n$  l'évènement : « Il ne reste dans  $U_2$  aucune boule noire pour les  $(n-1)$  premières épreuves et il reste au moins une boule noire à la  $n^{\text{ème}}$  épreuve ».
- Quelle est la probabilité  $p_n$  de  $F_n$  ?

#### Exercice 4 : (6 points)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $] -1, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x \ln(1+x)}{1+x}$ .

On désigne par  $(C)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

- A)
- 1) a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ . Interpréter graphiquement le résultat.
- b) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ . Interpréter graphiquement les résultats.
- 2) a) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $] -1, +\infty[$ .
- b) Montrer que  $f'(x) = \frac{x + \ln(1+x)}{(1+x)^2}$ ,  $x > -1$ .
- c) Montrer que  $x + \ln(1+x) > 0$ , si et seulement si,  $x > 0$ .
- d) En déduire le tableau de variation de  $f$ .
- e) Tracer  $(C)$ .

B) Soit  $G$  la fonction définie sur  $[1, +\infty[$  par  $G(x) = \int_1^x \frac{f(t)}{t} dt$ .

Pour tout entier  $n \geq 1$ , on pose  $V_n = \int_1^{\frac{n+1}{n}} f(t^n) dt$  et on considère la fonction  $F_n$  définie sur  $[1, +\infty[$

par  $F_n(x) = \int_1^{x^n} \frac{f(t)}{t} \sqrt[n]{t} dt$ .

1) Montrer que  $G(x) = \frac{1}{2} \ln^2(1+x) - \frac{1}{2} \ln^2(2)$ ,  $x \geq 1$ .

2) Montrer que pour tout  $x \geq 1$ ,  $G(x^n) \leq F_n(x) \leq x G(x^n)$ .

3) Montrer que  $F_n$  est dérivable sur  $[1, +\infty[$  et que  $F'_n(x) = n f(x^n)$ ,  $x \geq 1$ .

4) En déduire que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $n V_n = F_n\left(\frac{n+1}{n}\right)$ .

5) a) Montrer que  $G\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right) \leq n V_n \leq \left(\frac{n+1}{n}\right) G\left(\left(\frac{n+1}{n}\right)^n\right)$ ,  $n \geq 1$ .

b) Vérifier que  $\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e^{n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ . En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = e$ .

c) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} n V_n$  puis  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ .



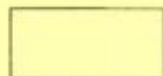
Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....

Nom et Prénom : .....

Date et lieu de naissance : .....

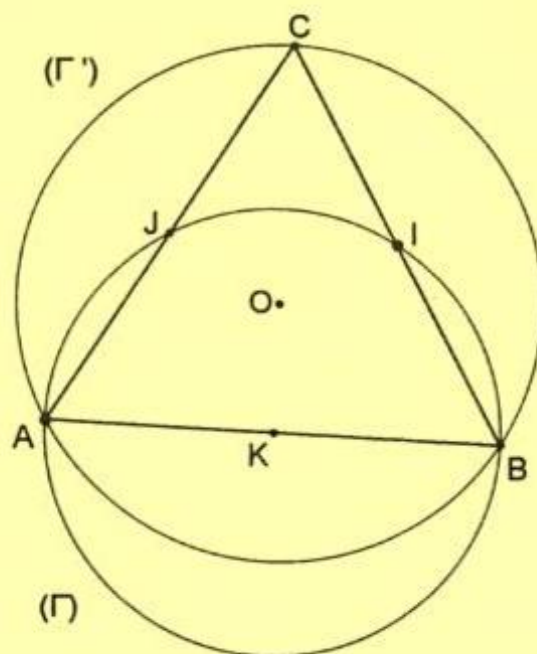
Signatures des surveillants

.....  
.....



**Épreuve: Mathématiques - Section : Mathématiques**  
**Session de contrôle (2020)**  
**Annexe à rendre avec la copie**

**Figure**



|                                                                                             |                                                                                                     |                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------|
| RÉPUBLIQUE TUNISIENNE<br>MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION<br>EXAMEN DU BACCALAURÉAT<br>SESSION 2019 | Session principale                                                                                  |                                     |
|                                                                                             | Épreuve : <b>Mathématiques</b>                                                                      | Section : <b>Mathématiques</b>      |
|                                                                                             |  Durée : <b>4h</b> | Coefficient de l'épreuve : <b>4</b> |



Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

La page 4 / 4 est à rendre avec la copie

### Exercice 1 : (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé direct. Dans la figure ci-dessous,

$\xi$  est le cercle de centre O et de diamètre  $[BC]$ , M est le point de  $[BC]$  tel que  $CM = \frac{1}{3}BC$

et  $\xi'$  est le cercle de diamètre  $[CM]$ . I et I' sont les milieux respectifs des segments  $[BM]$  et  $[CM]$ .

A et A' sont deux points du cercle  $\xi$  tels que  $AMA'B$  est un losange et  $(\widehat{AC}, \widehat{AB}) = \frac{\pi}{2}[2\pi]$ .

La droite  $(AC)$  recoupe le cercle  $\xi'$  en H.

1) a) Montrer que les droites  $(AB)$  et  $(HM)$  sont parallèles.

b) En déduire que les points H, M et A' sont alignés.

c) Montrer que  $HM = \frac{1}{3}AB$  et que  $HA^2 = AB^2 - HM^2$ .

2) On désigne par S la similitude directe de centre H qui envoie A en M.

a) Préciser l'angle de S et montrer que son rapport est égal à  $\frac{\sqrt{2}}{4}$ .

b) Déterminer les images par S des droites  $(AI)$  et  $(MH)$ . En déduire  $S(A')$ .

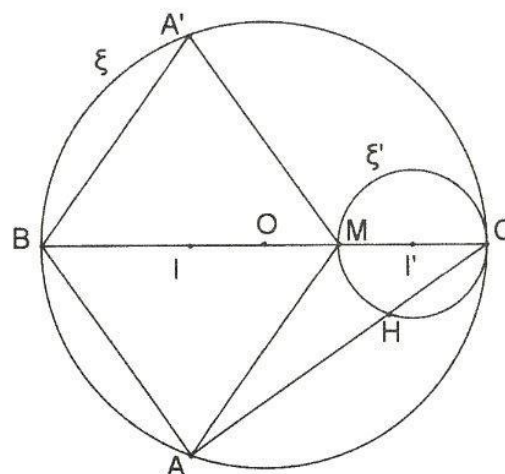
3) Montrer que  $S(I) = I'$  et en déduire que  $(HI)$  est tangente en H au cercle  $\xi'$ .

4) On pose  $S' = S_{(AH)} \circ S \circ S_{(AH)}$ .

a) Vérifier que  $S'$  est une similitude directe dont on précisera le centre et le rapport.

b) La droite  $(A'M)$  recoupe le cercle  $\xi$  en N. Montrer que le triangle MCN est isocèle de sommet principal C.

c) Déterminer  $S'(A)$ . En déduire alors l'angle de  $S'$ .



### Exercice 2 : (4 points)

L'espace est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

On considère les points  $A(2,0,1)$ ,  $B(-2,0,1)$ ,  $C(1,1,1)$  et  $D(-4,0,-1)$ .

- 1) a) Montrer que les points A, B et C ne sont pas alignés.  
b) On désigne par P le plan (ABC). Montrer que P est d'équation  $z = 1$ .
- 2) Soit S l'ensemble des points  $M(x, y, z)$  de l'espace tels que  $x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 1 = 0$ .  
a) Montrer que S est une sphère dont on précisera le rayon et les coordonnées du centre  $\Omega$ .  
b) Soit le point  $I(0, 0, 1)$ , montrer que S et P se coupent suivant le cercle  $\mathcal{C}$  de centre I et de rayon 2.
- 3) Soit  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ,  $\Omega_\lambda(0, 0, \lambda)$  et  $R_\lambda = \sqrt{(\lambda - 1)^2 + 4}$ .  
a) Montrer que la sphère  $S_\lambda$  de centre  $\Omega_\lambda$  et de rayon  $R_\lambda$  coupe P suivant le cercle  $\mathcal{C}$ .  
b) Déterminer  $\lambda_0$  pour que  $D \in S_{\lambda_0}$ .  
c) Déterminer les homothéties de l'espace transformant S en  $S_{\lambda_0}$ .

### Exercice 3 : (5 points)

- 1) On considère dans  $\mathbb{Z}^2$  l'équation (E) :  $29x - 13y = 6$ .  
a) Vérifier que  $(2,4)$  est une solution de (E).  
b) Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E).

Soit dans  $\mathbb{Z}$  l'équation (E') :  $x^{19} \equiv -2 \pmod{29}$ .

- 2) Justifier que  $2^{28} \equiv 1 \pmod{29}$  et en déduire que  $-8$  est solution de (E').
- 3) Soit  $x_0$  une solution de (E').  
a) Montrer que  $x_0$  n'est pas un multiple de 29 et en déduire alors que  $x_0^{28} \equiv 1 \pmod{29}$ .  
b) Montrer que  $x_0^{57} \equiv -8 \pmod{29}$  puis que  $x_0 \equiv -8 \pmod{29}$ .  
c) En déduire l'ensemble des solutions dans  $\mathbb{Z}$  de l'équation (E').  
d) Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  l'équation  $(x - 3)^{19} \equiv -2 \pmod{29}$ .
- 4) Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  le système 
$$\begin{cases} (x - 3)^{19} \equiv -2 \pmod{29}, \\ (x - 3)^{13} \equiv -2 \pmod{13}. \end{cases}$$

#### Exercice 4 : (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{1 - e^{-x}}$ .

- 1) a) Montrer que  $f$  possède une fonction réciproque  $g$  définie sur  $[0, 1[$ .  
b) Montrer que pour tout  $x \in [0, 1[$  :  $g(x) = -\ln(1 - x^2)$ .  
c) Montrer que l'équation  $g(x) = x$  admet une solution  $\alpha$  sur  $[0,7 ; 0,8]$ .  
d) On donne en annexe la représentation graphique  $\mathcal{C}$  de la fonction  $f$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , la première bissectrice  $\Delta$  et le point  $A(\alpha, \alpha)$ .

On désigne par  $\mathcal{C}'$  la courbe de  $g$ . Tracer  $\mathcal{C}'$  dans le même repère.

- 2) Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $[0, 1[$  par  $\varphi(x) = \int_0^{g(x)} f(t) dt$ .  
a) Montrer que  $\varphi$  est dérivable sur  $[0, 1[$  et que  $\varphi'(x) = \frac{2x^2}{1-x^2}$ .  
b) Déterminer les réels  $a$ ,  $b$  et  $c$  tels que pour tout  $x$  appartenant à  $[0, 1[$ ,  $\frac{2x^2}{1-x^2} = a + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{1-x}$ .  
c) En déduire que  $\varphi(x) = -2x + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ,  $x \in [0, 1[$ .  
d) On désigne par  $\mathcal{A}$  l'aire de la région du plan située entre les courbes  $\mathcal{C}$  et  $\mathcal{C}'$  et les droites d'équations respectives  $x = 0$  et  $x = \alpha$ .

Montrer que  $\mathcal{A} = 2\left(\varphi(\alpha) - \frac{\alpha^2}{2}\right)$ .

- 3) Soit  $(u_n)$  la suite définie sur  $\mathbb{N}^*$  par  $u_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot 3^k}$ .

Soit  $n \geq 1$ . On pose pour tout  $t \in [0, 1[$ ,  $S_n(t) = 2 \sum_{k=1}^n t^{2k-1}$ .

- a) Montrer que  $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{3}} S_n(t) dt = u_n$ .  
b) Montrer que pour tout  $t \in [0, 1[$ ,  $S_n(t) = (1 - t^{2n}) g'(t)$ , où  $g'$  est la dérivée de la fonction  $g$  sur  $[0, 1[$ .  
c) Montrer que pour tout  $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$ ,  $(1 - \frac{1}{3^n}) g'(t) \leq S_n(t) \leq g'(t)$ .  
d) En déduire que  $(1 - \frac{1}{3^n}) g(\frac{\sqrt{3}}{3}) \leq u_n \leq g(\frac{\sqrt{3}}{3})$ .
- 4) Montrer alors que la suite  $(u_n)$  est convergente et déterminer sa limite.



Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....

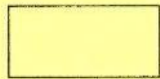
Nom et Prénom : .....

Date et lieu de naissance : .....

Signatures des surveillants

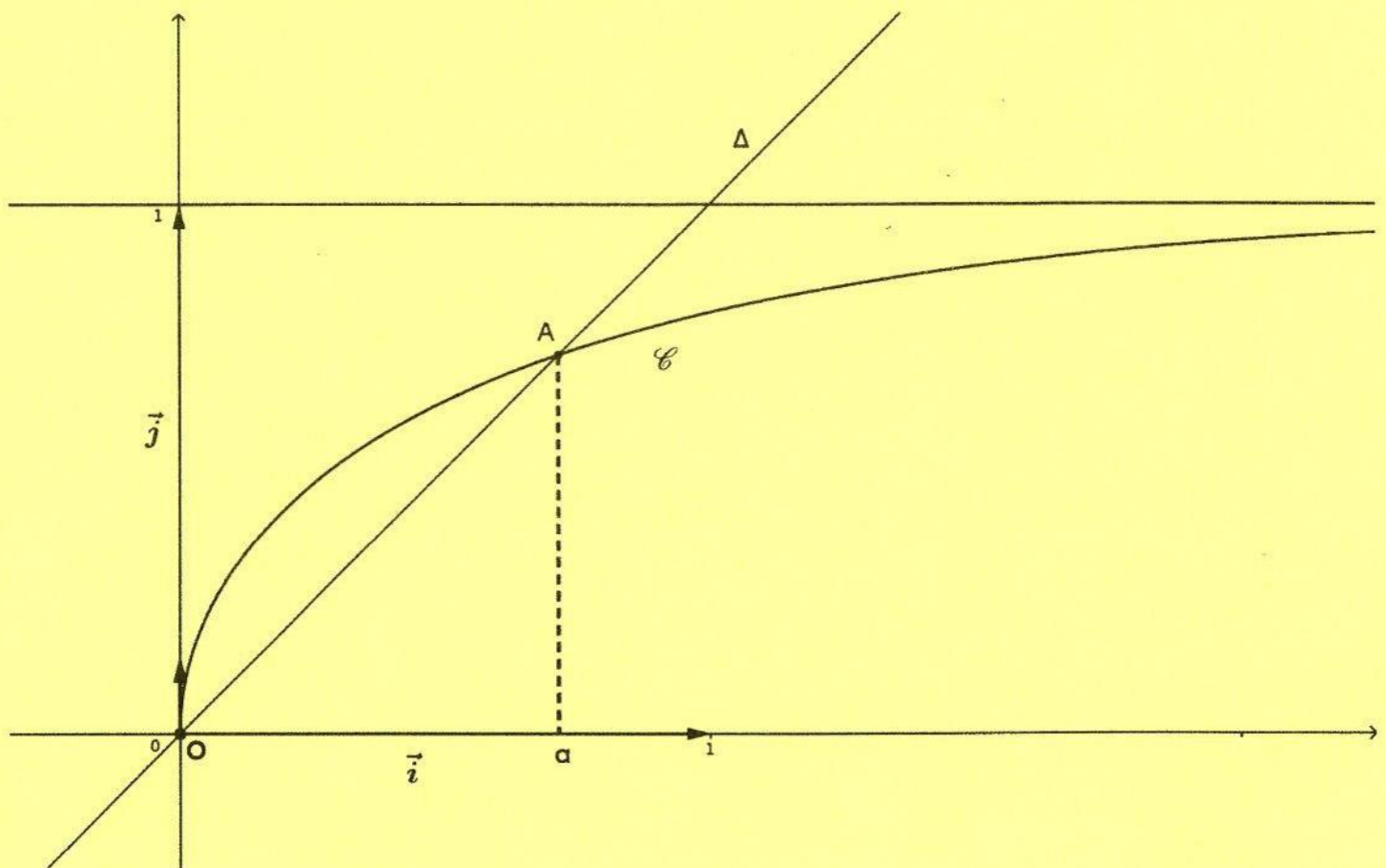
.....

.....



Épreuve : Mathématiques - Section : Mathématiques - Session principale (2019)

Annexe à rendre avec la copie



**Exercice N°1 :**

1°) a)  $(AB) \perp (AC)$ ,  $\zeta'$  de diamètre  $[CM]$  et  $H \in \zeta'$  donc  $(HC) \perp (MH)$  or  $H \in (HC)$

donc  $(AC) \perp (MH)$  ainsi  $(AB) \parallel (MH)$

b)  $AMA'B$  est un losange donc  $(AB) \parallel (A'M)$  et  $(AB) \parallel (MH)$  d'où  $(A'M) \parallel (MH)$  ce qui prouve que  $H, M$  et  $A'$  sont alignés

c) • dans le triangle  $ABC$  on a  $(AB) \parallel (MH)$ ,  $H \in [AC]$  et  $M \in [BC]$  donc d'après le théorème

de Thalès :  $\frac{CM}{CB} = \frac{HM}{AB} = \frac{CH}{AC}$  et on a  $\frac{CM}{CB} = \frac{1}{3}$  donc  $\frac{HM}{AB} = \frac{1}{3}$  par suite  $HM = \frac{1}{3}AB$

• Le triangle  $AMH$  est rectangle en  $H$  donc d'après le théorème du Pythagore :

$$\text{Et puisque } AB = AM \text{ on aura } AB^2 = AH^2 + HM^2 \Rightarrow AH^2 = AB^2 - HM^2$$

2°) a) • Angle de  $S$ :  $\left( \overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HM} \right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$

• Rapport de  $S$ :  $k = \frac{HM}{HA}$ . On a :  $HM = \frac{1}{3}AB$  et  $AH^2 = AB^2 - HM^2$

$$\text{Donc } AH^2 = AB^2 - \frac{1}{9}AB^2 = \frac{8}{9}AB^2 \Rightarrow \frac{AB^2}{AH^2} = \frac{9}{8} \Rightarrow \frac{AB}{AH} = \frac{3}{2\sqrt{2}}$$

$$\text{il en résulte : } k = \frac{HM}{HA} = \frac{AB}{3HA} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

b) • Angle de  $S$  est  $\left( -\frac{\pi}{2} \right)$  d'où  $S((AI)) \perp (AI)$  et  $S(A) = M \in S((AI))$  d'où  $S((AI)) = (BC)$

• De même  $S((MH)) \perp (MH)$  et  $S(H) = H \in S((MH))$  d'où  $S((MH)) = (AC)$

•  $A' \in (MH) \cap (AI)$  d'où  $S(A') \in S((MH)) \cap S((AI)) \Rightarrow S(A') \in (AC) \cap (BC) \Rightarrow S(A') = C$

3°) • une similitude conserve les milieux

•  $I$  est le milieu de  $[AA']$  donc  $S(I)$  est le milieu de  $S([AA']) = [CM]$  d'où  $S(I) = I'$

•  $S(I) = I' \Rightarrow \left( \overrightarrow{HI}, \overrightarrow{HI'} \right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ ,  $H \in \zeta'$  de rayon  $[IH]$  donc  $(HI)$  est tangente à  $\zeta'$  en  $H$

4°) a)  $S_{(AI)}$  : antidéplacement  $\Rightarrow S_{(AI)}$  est une similitude indirecte de rapport 1

•  $S'$  est la composée de trois similitudes dont deux indirectes de rapport 1 et une directe de rapport  $\frac{\sqrt{2}}{4}$  ce qui prouve que  $S'$  est une similitude directe de rapport  $\frac{\sqrt{2}}{4}$

•  $S'(H) = S_{(AH)} \circ S \circ S_{(AH)}(H) = S_{(AH)} \circ S(H) = S_{(AH)}(H) = H \Rightarrow H$  est le centre de  $S'$

b) •  $\left( \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AA'} \right) \equiv \left( \overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{A'M} \right) [2\pi]$  ( $[A'A]$  bissectrice de l'angle  $\left( \overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'M} \right)$ )

•  $\left\{ \begin{array}{l} \left( \overrightarrow{A'B}, \overrightarrow{A'A} \right) \equiv \left( \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA} \right) [2\pi] \\ \left( \overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{A'M} \right) \equiv \left( \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CN} \right) [2\pi] \end{array} \right.$  (Deux angles qui interceptent le même arc dans le cercle)

$\Rightarrow \left( \overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA} \right) \equiv \left( \overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CN} \right) [2\pi]$  ainsi dans le triangle  $MNC$ ,  $\left( \overrightarrow{CM}, \overrightarrow{CH} \right) \equiv \left( \overrightarrow{CH}, \overrightarrow{CN} \right) [2\pi]$

Donc  $[CH]$  est la bissectrice de l'angle  $\widehat{NCM}$  et  $(CH) \perp (MN)$  d'où  $(CH)$  est la médiatrice de  $[MN]$

$\Rightarrow CM = CN$  ce qui prouve que  $MNC$  est isocèle en  $C$

c) •  $S'(A) = S_{(AH)} \circ S \circ S_{(AH)}(A) = S_{(AH)} \circ S(A) = S_{(AH)}(M) = N$

•  $S'(A) = N \Rightarrow \text{angle de } S' : \left( \overrightarrow{HA}, \overrightarrow{HN} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$

### Exercice N°2:

1°) a)  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ ,  $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$  et  $\frac{-4}{-1} \neq \frac{0}{1} \Rightarrow A, B$  et  $C$  ne sont pas alignés

b)  $z_A = 1 \Rightarrow A \in P$ ,  $z_B = 1 \Rightarrow B \in P$ ,  $z_C = 1 \Rightarrow C \in P$

et  $A, B$  et  $C$  déterminent un seul plan  $P$  donc il a pour équation  $z = 1$

Ou bien :  $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$  vecteur normale de  $P$

$\Rightarrow -4z + d = 0$ ,  $A \in P \Rightarrow -4 + d = 0 \Rightarrow d = 4$  d'où  $P: -4z + 4 = 0 \Rightarrow P: z = 1$

2°) a)  $x^2 + y^2 + z^2 - 4z - 1 = x^2 + y^2 + (z-2)^2 - 4 - 1 = x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 5 = \sqrt{5}^2$

$\Rightarrow S$  est une sphère de rayon  $R = \sqrt{5}$  et de centre  $\Omega(0, 0, 2)$

b)  $d(\Omega, P) = \frac{|z_\Omega - 1|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{1}{1} = 1 < \sqrt{5} \Rightarrow S$  et  $P$  sont sécants suivant le cercle  $\zeta$  de rayon

$\sqrt{\sqrt{5}^2 - 1} = 2$

Comme  $\overrightarrow{\Omega I} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -\vec{n} \Rightarrow (\Omega I) \perp P$  et  $I \in P$  donc  $I$  est le projeté orthogonale de  $\Omega$  sur  $P$

Ce qui prouve que  $I$  est le centre de  $\zeta$

3°) a)  $d(\Omega_\lambda, P) = \frac{|z_{\Omega_\lambda} - 1|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = \frac{|\lambda - 1|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}} = |\lambda - 1|$

On sait que pour tout  $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$  on a :  $(\lambda - 1)^2 < (\lambda - 1)^2 + 4$  d'où  $\sqrt{(\lambda - 1)^2} < \sqrt{(\lambda - 1)^2 + 4}$

C'est-à-dire  $|\lambda - 1| < \sqrt{(\lambda - 1)^2 + 4} \Rightarrow |\lambda - 1| < R_\lambda \Rightarrow S_\lambda$  et  $P$  sont sécants suivant un cercle  $\phi$

• de rayon  $r = \sqrt{R_\lambda^2 - |\lambda - 1|^2} = \sqrt{(\lambda - 1)^2 + 4 - (\lambda - 1)^2} = \sqrt{4} = 2$

• de centre le projeté orthogonale de  $\Omega_\lambda$  sur  $P$  ;  $\overrightarrow{\Omega_\lambda I} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 - \lambda \end{pmatrix} = (1 - \lambda)\vec{n} \Rightarrow (\Omega_\lambda I) \perp P$  et  $I \in P$

$\Rightarrow I$  est le centre de  $\phi$ . Finalement  $\phi = \zeta$  et par suite  $S_\lambda \cap P = \zeta$

b)  $D \in S_{\lambda_0} \Rightarrow \Omega_{\lambda_0} D = R_{\lambda_0} \Rightarrow \sqrt{(-4)^2 + 0^2 + (-1 - \lambda_0)^2} = \sqrt{(\lambda_0 - 1)^2 + 4}$

$\Rightarrow \lambda_0^2 + 2\lambda_0 + 17 = \lambda_0^2 - 2\lambda_0 + 5 \Rightarrow 4\lambda_0 = -12 \Rightarrow \lambda_0 = -3$

c)  $S_{\lambda_0}$  à pour centre  $\Omega_{\lambda_0}(0, 0, -3)$  et de rayon  $R_{\lambda_0} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

Soit  $h$  l'homothétie de centre  $M$  et de rapport  $k$  qui envoie  $S$  en  $S_{\lambda_0}$

On a :  $h(S) = S_{\lambda_0}$  donne  $\overline{M\Omega_{\lambda_0}} = k \overline{M\Omega}$  et  $R_{\lambda_0} = |k|R$

$$2\sqrt{5} = |k|\sqrt{5} \Rightarrow |k| = 2 \text{ donc } k = 2 \text{ ou } k = -2$$

$$\bullet \text{ Pour } k = 2 \text{ on a : } \overline{M\Omega_{\lambda_0}} = k \overline{M\Omega} \Rightarrow \begin{cases} -x_M = -2x_M \\ -y_M = -2y_M \\ -3 - z_M = -2(2 - z_M) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = 0 \\ y_M = 0 \\ -3z_M = -1 \end{cases} \Rightarrow M\left(0, 0, \frac{1}{3}\right)$$

$$\bullet \text{ Pour } k = -2 \text{ on a : } \overline{M\Omega_{\lambda_0}} = k \overline{M\Omega} \Rightarrow \begin{cases} -x_M = 2x_M \\ -y_M = 2y_M \\ -3 - z_M = 2(2 - z_M) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_M = 0 \\ y_M = 0 \\ z_M = 7 \end{cases} \Rightarrow M(0, 0, 7)$$

Conclusion : il existe deux homothéties  $h_1$  de centre  $M\left(0, 0, \frac{1}{3}\right)$  et de rapport 2,  $h_2$  de centre

$M(0, 0, 7)$  et de rapport  $(-2)$  qui transforment  $S$  en  $S_{\lambda_0}$

### Exercice N°3 :

1°) a)  $29 \times 2 - 13 \times 4 = 58 - 52 = 6$

b)  $\bullet 29x - 13y = 29 \times 2 - 13 \times 4 \Leftrightarrow 29(x - 2) = 13(y - 4)$

$\Leftrightarrow 13 \text{ divise } 29(x - 2) \text{ et } 29 \wedge 13 = 1 \text{ divise } 6 \text{ donc d'après lemme de Gauss}$

$13 \text{ divise } (x - 2) \text{ ainsi } x - 2 = 13k ; k \in \mathbb{Z} \text{ par suite } x = 2 + 13k ; k \in \mathbb{Z}$

$\bullet 29(13k) = 13(y - 4) \Leftrightarrow 29k = y - 4 \Leftrightarrow y = 4 + 29k ; k \in \mathbb{Z}$

Conclusion :  $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(2 + 13k, 4 + 29k) ; k \in \mathbb{Z}\}$

2°)  $\bullet 29$  est un nombre premier et  $29$  ne divise pas  $2$

D'où d'après le petit théorème de Fermat on a :  $2^{29-1} \equiv 1 \pmod{29} \Rightarrow 2^{28} \equiv 1 \pmod{29}$

$$\bullet \begin{cases} 2^{28} \equiv 1 \pmod{29} \\ 2^{29} \equiv 2 \pmod{29} \end{cases} \Rightarrow 2^{28} \times 2^{29} \equiv 2 \pmod{29} \Rightarrow 2^{57} \equiv 2 \pmod{29} \Rightarrow -2^{57} \equiv -2 \pmod{29}$$

$$\Rightarrow (-2)^{57} \equiv -2 \pmod{29} \Rightarrow ((-2)^3)^{19} \equiv -2 \pmod{29} \Rightarrow (-8)^{19} \equiv -2 \pmod{29}$$

$\bullet$  Donc  $-8$  est solution de  $(E')$

3°) a)  $\bullet$  Si  $x_0$  est un multiple de  $29$  alors  $x_0^{19} \equiv 0 \pmod{29}$  donc  $x_0$  n'est pas solution de  $(E')$

D'où si  $x_0$  est solution de  $(E')$  alors  $x_0$  n'est pas multiple de  $29$

$$\bullet x_0^{19} \equiv 1 \pmod{29} \Rightarrow \begin{cases} x_0^{28} \equiv 1 \pmod{29} \text{ (Petit théorème de Fermat)} \\ 29 \text{ est un nombre premier} \end{cases}$$

b)  $\bullet x_0$  est solution de  $(E')$  alors  $x_0^{19} \equiv -2 \pmod{29} \Rightarrow (x_0^{19})^3 \equiv (-2)^3 \pmod{29}$

$$\Rightarrow (x_0^{19})^3 \equiv (-2)^3 \pmod{29} \Rightarrow x_0^{57} \equiv -8 \pmod{29}$$

$$\bullet \begin{cases} x_0^{57} \equiv -8 \pmod{29} \Leftrightarrow x_0 \times x_0^{56} \equiv -8 \pmod{29} \end{cases}$$

$$\bullet \begin{cases} (x_0^{28})^2 \equiv 1 \pmod{29} \Leftrightarrow x_0^{56} \equiv 1 \pmod{29} \end{cases}$$

c)  $x$  est solution de  $(E') \Rightarrow x \equiv -8 \pmod{29} \Rightarrow x = -8 + 29k ; k \in \mathbb{Z}$

Réciproquement :  $x = -8 + 29k \Rightarrow x \equiv -8 \pmod{29} \Rightarrow x^{19} \equiv (-8)^{19} \pmod{29}$

et  $-8$  est solution de  $(E')$  c'est-à-dire  $(-8)^{19} \equiv -2 \pmod{29}$

Donc  $x^{19} \equiv -2 \pmod{29} \Rightarrow x$  est solution de (E')

Conclusion :  $S_{\mathbb{Z}} = \{-8 + 29k ; k \in \mathbb{Z}\}$

$$\begin{aligned} \text{d) } (x-3)^{19} &\equiv -2 \pmod{29} \Leftrightarrow x-3 \text{ est solution de (E')} \Leftrightarrow x-3 = -8 + 29k ; k \in \mathbb{Z} \\ &\Leftrightarrow x = -5 + 29k ; k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow S_{\mathbb{Z}} = \{-5 + 29k ; k \in \mathbb{Z}\} \end{aligned}$$

$$4^{\circ}) \bullet (x-3)^{19} \equiv -2 \pmod{29} \Leftrightarrow x-3 \equiv -8 \pmod{29}$$

$$\bullet \text{ On a 13 ne divise pas } x-3 \text{ donc } (x-3)^{12} \equiv 1 \pmod{13} \Leftrightarrow x-3 \equiv -2 \pmod{13}$$

$$\text{D'où } \begin{cases} (x-3)^{19} \equiv -2 \pmod{29} \\ (x-3)^{13} \equiv -2 \pmod{13} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \equiv -8 \pmod{29} \\ x-3 \equiv -2 \pmod{13} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3 \equiv -8 + 29p \\ x-3 \equiv -2 + 13q \end{cases}, (p, q) \in \mathbb{Z}^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -5 + 29p \\ x = 1 + 13q \end{cases}, (p, q) \in \mathbb{Z}^2$$

$$\Leftrightarrow x - x = -5 + 29p - 1 - 13q \Leftrightarrow 0 = -6 + 29p - 13q \Leftrightarrow 29p - 13q = 6 ; (p, q) \in \mathbb{Z}^2$$

D'où  $p$  et  $q$  sont solutions de (E). Ainsi :  $p = 2 + 13k$  et  $q = 4 + 29k ; k \in \mathbb{Z}$

$$\text{Par suite } x = -5 + 29(2 + 13k) = 53 + 377k ; k \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow S_{\mathbb{Z}} = \{53 + 377k ; k \in \mathbb{Z}\}$$

#### Exercice N°4 :

$$1^{\circ}) \text{ a) } f'(x) = \frac{(1-e^{-x})'}{2\sqrt{1-e^{-x}}} = \frac{e^{-x}}{2\sqrt{1-e^{-x}}} > 0, f \text{ est continue et strictement croissante sur } [0, +\infty[$$

$$\text{et } f([0, +\infty[) = [f(0), \lim_{+\infty} f] = [0, 1[ \Rightarrow f \text{ possède une fonction réciproque } g \text{ définie sur } [0, 1[$$

$$\begin{aligned} \text{b) } y \in [0, +\infty[, x \in [0, 1[, g(x) = y &\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \sqrt{1-e^{-y}} = x \Leftrightarrow 1-e^{-y} = x^2 \\ &\Leftrightarrow e^{-y} = 1-x^2 \Leftrightarrow -y = \ln(1-x^2) \Leftrightarrow y = -\ln(1-x^2) \Leftrightarrow g(x) = -\ln(1-x^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } g(x) = x &\Leftrightarrow g(x) - x = 0, \text{ on pose } h(x) = g(x) - x, x \in [0, 1[, h \text{ est continue sur } [0, 1[ \\ \text{et } h(0,7) \times h(0,8) &\simeq (-0,0267) \times 0,222 \simeq -0,0059 < 0 \end{aligned}$$

$$\text{Donc } h(x) = 0 \text{ (} g(x) = x \text{) admet une solution } \alpha \in [0,7; 0,8]$$

d) Voir figure annexe

$$2^{\circ}) \text{ a) } f \text{ est continue sur } [0, +\infty[, g \text{ est dérivable sur } [0, 1[$$

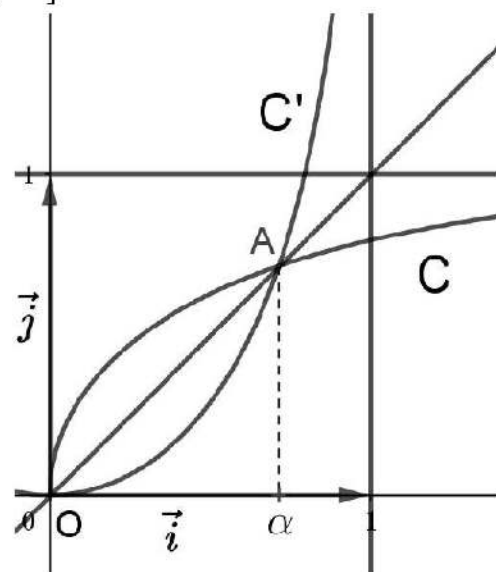
$$\text{et } g([0, 1[) = [0, +\infty[ \text{ d'où } \varphi \text{ est dérivable sur } [0, 1[$$

$$\text{et } \varphi'(x) = g'(x)f'(g(x))$$

$$\Rightarrow \varphi'(x) = \frac{2x}{1-x^2} \times x = \frac{2x^2}{1-x^2}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } a + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{1-x} &= \frac{a(1+x)(1-x) + b(1-x) + c(1+x)}{(1+x)(1-x)} \\ &= \frac{-ax^2 + x(c-b) + a+b+c}{(1+x)(1-x)} \end{aligned}$$

$$\frac{2x^2}{1-x^2} = a + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{1-x} \Leftrightarrow \begin{cases} -a = 2 \\ c-b = 0 \\ a+b+c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -2 \\ c = b = 1 \end{cases}$$



c)  $\varphi'(x) = -2 + \frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x} \Leftrightarrow \varphi(x) = -2x + \ln(1+x) - \ln(1-x) + cte$

$\varphi(0) = \int_0^{g(0)} f(x) dx = \int_0^0 f(x) dx \Rightarrow cte = 0$  donc  $\varphi(x) = -2x + \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$ ,  $x \in [0, 1[$

d)  $\mathcal{A} = \int_0^\alpha |f(x) - g(x)| dx$  (unité d'aire)

• Par raison de symétrie

$\int_0^\alpha |f(x) - g(x)| dx = 2 \int_0^\alpha (f(x) - x) dx = 2 \left[ \int_0^\alpha f(x) dx - \text{aire}(OAB) \right]; B(\alpha, 0)$

•  $\int_0^\alpha f(x) dx \rightarrow$  l'aire de la partie du plan limitée par  $(C)$ , l'axe des abscisses et les droites

d'équations  $x = 0$  et  $x = \alpha$  et  $\text{aire}(OAB) = \frac{OB \times AB}{2} = \frac{\alpha^2}{2}$

• On sait que  $g(\alpha) = \alpha$  d'où  $\int_0^\alpha f(x) dx = \int_0^{g(\alpha)} f(x) dx = \varphi(\alpha)$  il résulte  $\mathcal{A} = 2 \left( \varphi(\alpha) - \frac{\alpha^2}{2} \right)$

3°) a)  $\int_0^{\sqrt{3}} S_n(t) dt = \int_0^{\sqrt{3}} 2 \left( \sum_{k=1}^n t^{2k-1} \right) dt = \sum_{k=1}^n \left( 2 \int_0^{\sqrt{3}} t^{2k-1} dt \right)$

et  $2 \int_0^{\sqrt{3}} t^{2k-1} dt = 2 \left[ \frac{t^{2k}}{2k} \right]_0^{\sqrt{3}} = \frac{\left( \frac{\sqrt{3}}{3} \right)^{2k}}{k} = \frac{\left( \frac{1}{\sqrt{3}^2} \right)^k}{k} = \frac{\left( \frac{1}{3} \right)^k}{k} = \frac{1}{k \cdot 3^k} \Rightarrow \int_0^{\sqrt{3}} S_n(t) dt = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k \cdot 3^k} = u_n$

b)  $S_n(t) = 2 \sum_{k=1}^n t^{2k-1} = \frac{2}{t} \sum_{k=1}^n (t^2)^k$  et  $\sum_{k=1}^n (t^2)^k = t^2 \times \frac{1 - (t^2)^{n+1}}{1 - t^2}$  Somme de  $n$  termes d'une suite

géométrique de premier terme  $t^2$  de raison  $t^2$

Par suite  $S_n(t) = \frac{2}{t} \times t^2 \times \frac{1 - t^{2n+2}}{1 - t^2} = (1 - t^{2n+2}) \frac{2t}{1 - t^2} = (1 - t^{2n+2}) g'(t)$ ,  $n \geq 1$  et  $t \in [0, 1[$

c)  $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow 0 \leq t^{2n} \leq \frac{1}{3^n} \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{3^n} \leq 1 - t^{2n} \leq 1 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) g'(t) \leq (1 - t^{2n}) g'(t) \leq g'(t)$

car  $g'(x) \geq 0$

D'où pour  $0 \leq t \leq \frac{\sqrt{3}}{3}$  on a :  $\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) g'(t) \leq S_n(t) \leq g'(t)$  (\*)

d) On intégrant membre à membre l'inégalité (\*) on aura :

$\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \int_0^{\sqrt{3}} g'(t) dt \leq \int_0^{\sqrt{3}} S_n(t) dt \leq \int_0^{\sqrt{3}} g'(t) dt \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) [g(t)]_0^{\sqrt{3}} \leq u_n \leq [g(t)]_0^{\sqrt{3}}$

D'où  $\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) \left( g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \underbrace{g(0)}_0 \right) \leq u_n \leq g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) - \underbrace{g(0)}_0 \Leftrightarrow \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \leq u_n \leq g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

4°)  $\left(1 - \frac{1}{3^n}\right) g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) \leq u_n \leq g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) = 1$

$\Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{1}{3^n}\right) g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = -\ln\left(1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2\right) = -\ln\left(1 - \frac{1}{3}\right) = -\ln\frac{2}{3} = \ln\frac{3}{2}$

Donc la suite  $(u_n)$  converge vers  $\ln\frac{3}{2}$  et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = g\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$

|                                                                                             |                                |                                     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|-------------------------------------|
| RÉPUBLIQUE TUNISIENNE<br>MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION<br>EXAMEN DU BACCALAURÉAT<br>SESSION 2019 | Session de contrôle            |                                     |
|                                                                                             | Épreuve : <b>Mathématiques</b> | Section : <b>Mathématiques</b>      |
|                                                                                             | Durée : <b>4h</b>              | Coefficient de l'épreuve : <b>4</b> |



*Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.*

*La page 4/4 est à rendre avec la copie*

**Exercice 1 : (3 points)**

Soient ABC un triangle rectangle en A et  $\Delta$  la médiatrice du segment [AB].

Répondre par « Vrai » ou « Faux » en justifiant la réponse.

- 1)  $t_{\overline{BC}} \circ S_{\Delta} = t_{\overline{AC}} \circ S_{(AC)}$ .
- 2)  $S_{(AB)} \circ h_{(A,2)} \circ S_{(AC)} = h_{(A,-2)}$ .
- 3) Si f est une isométrie fixant les points A et B alors  $f^{-1} \circ S_{\Delta} \circ f$  est une symétrie glissante d'axe  $\Delta$ .

**Exercice 2 : (4,5 points)**

Dans le plan P muni d'un repère orthonormé direct  $R(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère les points I, C, D et K d'affixes respectives  $1 + i$ ,  $1 + 2i$ ,  $2i$  et  $3i$ .

- 1) a) Placer les points I, C, D et K dans le repère R.  
b) Montrer qu'il existe une unique similitude indirecte g qui transforme I en D et D en K.  
c) Déterminer le rapport de g.  
d) Déterminer l'image du triangle IDO.

- 2) Soit M un point du plan et M' son image par g.

On désigne par z et z' les affixes respectives de M et M'.

- a) Montrer que  $z' = -\frac{1}{2}(1+i)\bar{z} + 1 + 2i$ .
- b) Soit  $\Omega$  le centre de g. Déterminer l'affixe de  $\Omega$ .  
c) Vérifier que K est le milieu du segment  $[\Omega I]$ .  
d) Construire alors le centre  $\Omega$  et l'axe  $\Delta$  de g.
- 3) Soit  $h = g \circ g$ .  
a) Montrer que h est une homothétie de rapport  $\frac{1}{2}$ .  
b) On considère la suite de points  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  définie par :  $A_0 = I$  et pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_{n+2} = h(A_n)$ .  
Déterminer et construire les points  $A_2$  et  $A_4$ .  
c) Soit  $S_n = A_0 A_2 + A_2 A_4 + \dots + A_{2n-2} A_{2n}$ .  
Montrer que la suite  $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est convergente et déterminer sa limite.

### Exercice 3 : (3 points)

Une entreprise fabrique des pièces électroniques pour une marque de voitures. Une étude statistique a prouvé que 6% des pièces fabriquées sont défectueuses.

L'unité de contrôle rejette 97% des pièces défectueuses et 2% des pièces non défectueuses.

On choisit une pièce au hasard et on la soumet à un test de contrôle.

On note D : " la pièce est défectueuse." et R : "la pièce est rejetée par l'unité de contrôle."

- 1) Traduire la situation par un arbre pondéré de probabilités.
- 2) a) Calculer la probabilité que la pièce soit défectueuse et ne soit pas rejetée par l'unité de contrôle.  
b) On dit qu'il ya erreur de contrôle lorsque une pièce défectueuse est acceptée ou une pièce non défectueuse est rejetée. Calculer la probabilité pour qu'il y ait une erreur de contrôle.
- 3) Montrer que la probabilité pour que la pièce soit acceptée est égale à 0,923.
- 4) Pour la commercialisation de ses pièces l'entreprise décide de faire passer chaque pièce à trois contrôles successifs mais indépendants :
  - Si la pièce est acceptée par les trois contrôles, elle sera commercialisée avec le logo de la marque de voiture.
  - Si elle est acceptée uniquement par deux contrôles, elle sera commercialisée sans le logo de la marque de voiture.
  - Si elle est acceptée uniquement par un contrôle ou rejetée, elle sera détruite.
  - a) Montrer que la probabilité pour que la pièce soit commercialisée sans le logo de la marque de voiture est  $3 \times (0,923)^2 \times (0,077)$ .
  - b) Déterminer la probabilité pour que la pièce soit détruite.

### Exercice 4 : (4 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ , on considère les plans  $P_1$  et  $P_2$  d'équations respectives  $P_1 : 3x - 2y - 2z = 1$  et  $P_2 : 4x - 11y + 2z = 0$ .

- 1) a) Montrer que  $P_1$  et  $P_2$  se coupent suivant une droite  $\Delta$ .  
b) Donner une représentation paramétrique de  $\Delta$ .

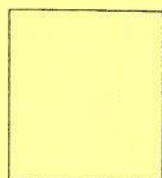
**Dans la suite de l'exercice, on se propose de déterminer les points de  $\Delta$  à coordonnées entières.**

- 2) On considère dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E) :  $7x - 13y = 1$ .  
Vérifier que (2, 1) est une solution de (E) et résoudre l'équation (E).
- 3) On considère dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  le système (S) : 
$$\begin{cases} 3x - 2y - 2z = 1, \\ 4x - 11y + 2z = 0. \end{cases}$$
  - a) Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ .  
Montrer que  $(x, y, z)$  est solution de (S) si et seulement si 
$$\begin{cases} 7x - 13y = 1, \\ 2z = 11y - 4x. \end{cases}$$
  - b) En déduire l'ensemble des points de  $\Delta$  à coordonnées entières.

### Exercice 5 : (5,5 points)

Soit la fonction  $g$  définie sur  $\mathbb{R}$  par  $g(x) = e^{\frac{-1}{2x^2}}$  si  $x \neq 0$  et  $g(0)=0$ . On désigne par  $\mathcal{C}$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  du plan.

- 1) a) Montrer que  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .  
b) Etudier la parité de  $g$ . Interpréter graphiquement le résultat.
- 2) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x)}{x}$  et en déduire que  $g$  est dérivable en 0.  
b) Montrer que  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et que  $g'(x) = \frac{g(x)}{x^3}$ , pour tout  $x \neq 0$ .  
c) Dresser le tableau de variation de  $g$ .  
d) Montrer que  $g$  réalise une bijection de  $[0, +\infty[$  sur  $[0, 1[$ .  
e) On désigne par  $g^{-1}$  la fonction réciproque de  $g$ , expliciter  $g^{-1}(x)$  pour tout  $x \in [0, 1[$ .
- 3) a) Montrer que  $\mathcal{C}$  admet deux points d'inflexions A et B que l'on déterminera.  
(A désigne le point d'inflexion d'abscisse positive).  
b) En annexe, on a représenté dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  les courbes  $\mathcal{C}_1$  et  $\mathcal{C}_2$  d'équations respectives  $y = e^x$  et  $y = x^2$ , pour tout  $x \in \mathbb{R}$ .  
Construire dans le même repère les points A et B et tracer la courbe  $\mathcal{C}$ .
- 4) Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f(x) = g^2(x)$ . Justifier que  $f$  est croissante sur  $[0, +\infty[$ .
- 5) Soit un entier  $n \geq 2$ . On pose  $V(n) = \pi \int_0^n f(t) dt$ .
  - a) Interpréter graphiquement  $V(n)$ .
  - b) Montrer que  $V(n) \geq \pi \int_{\sqrt{n}}^n f(t) dt$ .
  - c) En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} V(n) = +\infty$ .
  - d) Montrer que  $V(n) \leq n\pi$ .
  - e) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V(n)}{n}$ .



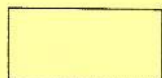
Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....

Nom et Prénom : .....

Date et lieu de naissance : .....

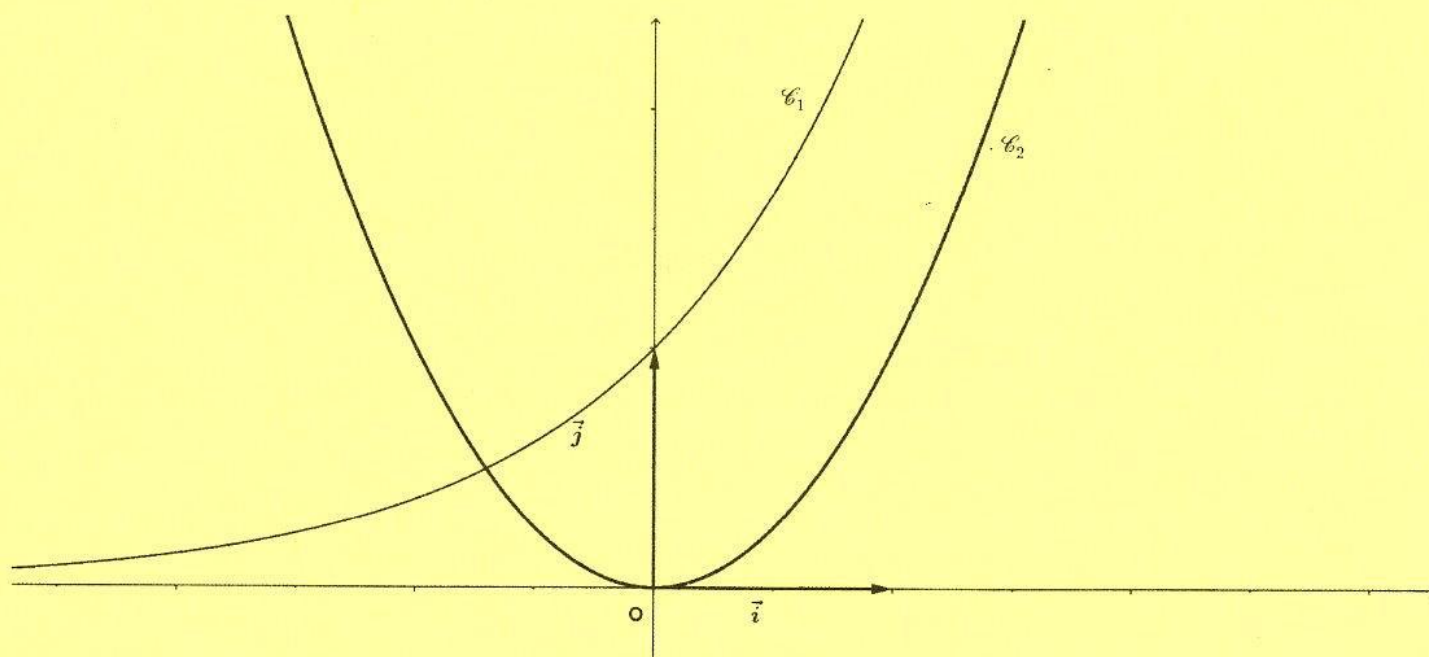
Signatures des surveillants

.....  
.....



Épreuve : Mathématiques - Section : Mathématiques - Session de contrôle (2019)

**Annexe à rendre avec la copie**





$$3^\circ) a) g = \overbrace{h' \left( \Omega, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \circ S_\Lambda}^{\text{forme réduite}} = S_\Lambda \circ h' \left( \Omega, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \Rightarrow g \circ g = h' \left( \Omega, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \circ \overbrace{S_\Delta \circ S_\Delta}^{idp} \circ h' \left( \Omega, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) = h' \left( \Omega, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), (h' \text{ homothétie})$$

$$b) A_0 = I \Rightarrow A_2 = h(A_0) = h(I) \Rightarrow \overline{\Omega A_2} = \frac{1}{2} \overline{\Omega I} = A_2 = K$$

$$\Lambda_4 = h(\Lambda_2) = h(K) \Rightarrow \overline{\Omega \Lambda_4} = \frac{1}{2} \overline{\Omega K} \Rightarrow \Lambda_4 \text{ est le milieu du segment } [\Omega K]$$

$$c) A_2 = h(A_0) \text{ et } \Lambda_4 = h(\Lambda_2) \Rightarrow \overline{A_2 \Lambda_4} = \frac{1}{2} \overline{A_0 \Lambda_2} \Rightarrow A_2 \Lambda_4 = \frac{1}{2} A_0 \Lambda_2$$

$$\Lambda_4 = h(\Lambda_2) \text{ et } \Lambda_6 = h(\Lambda_4) \Rightarrow \overline{\Lambda_4 \Lambda_6} = \frac{1}{2} \overline{\Lambda_2 \Lambda_4} \Rightarrow \Lambda_4 \Lambda_6 = \frac{1}{2} \Lambda_2 \Lambda_4 = \left( \frac{1}{2} \right)^2 A_0 \Lambda_2$$

$$\Lambda_6 = h(\Lambda_4) \text{ et } \Lambda_8 = h(\Lambda_6) \Rightarrow \overline{\Lambda_6 \Lambda_8} = \frac{1}{2} \overline{\Lambda_4 \Lambda_6} \Rightarrow \Lambda_6 \Lambda_8 = \frac{1}{2} \Lambda_4 \Lambda_6 = \left( \frac{1}{2} \right)^3 A_0 \Lambda_2$$

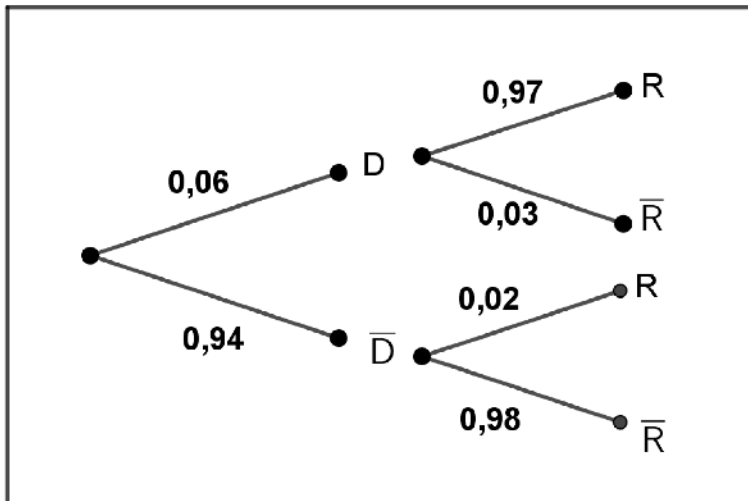
$$\text{En général : } A_{2n-2} \Lambda_{2n} = \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} A_0 \Lambda_2$$

$$S_n = \Lambda_0 \Lambda_2 + \Lambda_2 \Lambda_4 + \Lambda_4 \Lambda_6 + \dots + \Lambda_{2n-2} \Lambda_{2n} = \Lambda_0 \Lambda_2 + \frac{1}{2} \Lambda_0 \Lambda_2 + \dots + \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} \Lambda_0 \Lambda_2$$

$$= \left( 1 + \frac{1}{2} + \dots + \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} \right) A_0 \Lambda_2 = \frac{1 - \left( \frac{1}{2} \right)^n}{1 - \frac{1}{2}} \text{IK} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = 2 \times \text{IK} = 2\sqrt{5}$$

### Exercice N°3 :

1°)



$$2^\circ) a) p(D \cap \bar{R}) = 0,06 \times 0,03 = 0,0018$$

$$b) p(\bar{D} \cap R) + p(D \cap \bar{R}) \\ = 0,94 \times 0,02 + 0,0018 = 0,0206$$

$$3^\circ) p(\bar{R}) = p(\bar{D} \cap \bar{R}) + p(D \cap \bar{R}) \\ = 0,94 \times 0,98 + 0,0018 = 0,923$$

4°) Soit  $X$  l'alea numérique qui pour valeur le nombre de fois où la pièce est accepter au cours de trois contrôles

$X$  suit une loi binomiale de paramètre  $p = 0,923$  et  $n = 3$

$$p(X = k) = C_3^k (0,923)^k \times (0,077)^{3-k} \text{ avec } k \in \{0, 1, 2, 3\}$$

$$a) p_1 = p(X = 2) = C_3^2 (0,923)^2 \times (0,077)^{3-2} = 3(0,923)^2 (0,077)$$

$$b) p_2 = p(X = 1) + p(X = 0) = C_3^1 (0,923)^1 \times (0,077)^{3-1} + C_3^0 ((0,923)^0 \times 0,077)^{3-0} \\ = 3(0,923) \times (0,077)^2 + (0,077)^3 = 0,0169$$

#### Exercice N°4 :

1°) a)  $\overrightarrow{N_{P_1}} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \overrightarrow{N_{P_2}} \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $\frac{3}{4} \neq \frac{-2}{-11} \Rightarrow P_1$  et  $P_2$  sont sécants

b)  $M(x, y, z) \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} 3x - 2y - 2z = 1 \\ 4x - 11y + 2z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{pour } x = t \in \mathbb{R} \begin{cases} (1) + (2) \Rightarrow 7t - 13y = 1 \\ 2z = -4t + 11y \end{cases}$

2°) •  $7 \times 2 - 13 \times 1 = 14 - 13 = 1$

•  $7x - 13y = 7 \times 2 - 13 \times 1 \Leftrightarrow 7(x - 2) = 13(y - 1)$

$\Leftrightarrow 13$  divise  $7(x - 2)$  et  $7 \wedge 13 = 1$  donc lemme de Gauss

$13$  divise  $(x - 2)$  Ainsi  $x - 2 = 13k ; k \in \mathbb{Z}$  par suite  $x = 2 + 13k ; k \in \mathbb{Z}$

\*  $7(13k) = 13(y - 1) \Leftrightarrow 7k = y - 1 \Leftrightarrow y = 1 + 7k ; k \in \mathbb{Z}$

Conclusion :  $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(2 + 13k, 1 + 7k) ; k \in \mathbb{Z}\}$

3°) a)  $(S) : \begin{cases} 3x - 2y - 2z = 1 \\ 4x - 11y + 2z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) + (2) \Rightarrow 7x - 13y = 1 \\ (2) \Rightarrow 2z = -4x + 11y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x - 13y = 1 \\ 2z = -4x + 11y \end{cases}$

Réciproquement :  $\begin{cases} 7x - 13y = 1 \\ 2z = -4x + 11y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 7x - 13y = 1 \\ 2z + 4x - 11y = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} (1) - (2) \Rightarrow 3x - 2y - 2z = 1 \\ 2z + 4x - 11y = 0 \end{cases}$

(ou bien par équivalence)

3°) b)  $\begin{cases} 7x - 13y = 1 \\ 2z = -4x + 11y \end{cases} \Leftrightarrow x = 2 + 13k ; y = 1 + 7k \text{ et } 2z = 3 + 25k ; k = 2p + 1, p \in \mathbb{Z}$

Donc  $M(15 + 26p, 8 + 14p, 14 + 25p) ; p \in \mathbb{Z}^*$

#### Exercice N°5 :

1°) a) •  $x \mapsto u(x) = -\frac{1}{2x^2}$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  et  $u(\mathbb{R}^*) = ]-\infty, 0[$

$x \mapsto v(x) = e^x$  est continue sur  $\mathbb{R}$  en particulier sur  $]-\infty, 0[$  d'où  $g = v \circ u$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$

•  $\lim_{x \rightarrow 0} \left(-\frac{1}{2x^2}\right) = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 0 = g(0)$  donc est continue en 0

$g$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$  et en 0 d'où elle est continue sur  $\mathbb{R}$

b)  $x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R}$  et  $g(-x) = g(x) \Rightarrow g$  est paire

Donc la courbe  $\zeta$  de  $g$  admet  $(O, \vec{j})$  comme axe de symétrie

2°) a) On pose  $X = -\frac{1}{x^2} \Rightarrow x^2 = -\frac{1}{X} \Rightarrow x = \sqrt{-\frac{1}{X}}, X \rightarrow -\infty$  lorsque  $x \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{g(x)}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left( \frac{e^{-\frac{1}{2x^2}}}{x} \right) = \lim_{X \rightarrow -\infty} \left( \frac{e^{\frac{X}{2}}}{\sqrt{-\frac{1}{X}}} \right) = \lim_{X \rightarrow -\infty} \left( \sqrt{-X} e^{\frac{X}{2}} \right) = 0 \Rightarrow g'_d(0) = 0$$

$\zeta$  admet une demi-tangente horizontale au point  $O$  par raison de symétrie ( $g$  est paire)

$g'(0) = 0$

D'où  $g$  est dérivable en 0

b) •  $x \mapsto u(x) = -\frac{1}{2x^2}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  et  $u(\mathbb{R}^*) = ]-\infty, 0[$

$x \mapsto v(x) = e^x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  en particulier sur  $]-\infty, 0[$  d'où  $g$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$

• pour tout  $x \neq 0$  on a :  $g'(x) = \left(-\frac{1}{2x^2}\right)' e^{-\frac{1}{2x^2}} = \frac{1}{x^3} e^{-\frac{1}{2x^2}} = \frac{g(x)}{x^3}$

c)  $g$  est paire  $\Rightarrow$  on étudie  $g$  sur  $[0, +\infty[$ ,  $g'(x) > 0$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2x^2}\right) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} e^x = 1 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1$$

d)  $g$  est continue et strictement croissante sur  $[0, +\infty[$

$$\text{et } f([0, +\infty[) = [f(0), \lim_{+\infty} f] = [0, 1[$$

$\Rightarrow g$  réalise une bijection de  $[0, +\infty[$  sur  $[0, 1[$

|         |   |           |
|---------|---|-----------|
| $x$     | 0 | $+\infty$ |
| $g'(x)$ | + |           |
| $g(x)$  |   |           |

e)  $y \in ]0, +\infty[$ ,  $x \in ]0, 1[$ ,  $g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x \Leftrightarrow e^{-\frac{1}{2y^2}} = x \Leftrightarrow -\frac{1}{2y^2} = \ln x$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2 \ln x} = y^2 \text{ or } g^{-1}(x) = y \in ]0, +\infty[ \text{ et } g(0) = 0 \Leftrightarrow g^{-1}(0) = 0$$

$$\text{D'où } \forall x \in [0, 1[ : g^{-1}(x) = \sqrt{-\frac{1}{2 \ln x}}$$

$$3^\circ) \text{ a) Pour tout } x \neq 0 \text{ on a : } g''(x) = \frac{x^3 g'(x) - 3x^2 g(x)}{x^6} = \frac{x^3 \frac{g(x)}{x^3} - 3x^2 g(x)}{x^6} = \frac{g(x)(1 - 3x^2)}{x^6}$$

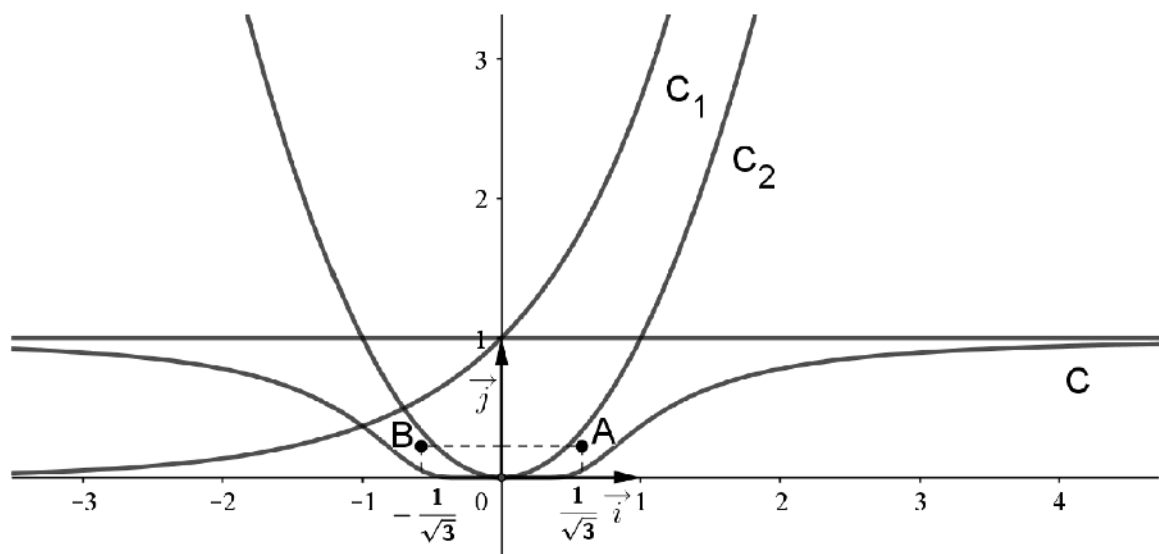
Le signe de  $g''(x)$  est celui de  $(1 - 3x^2)$ , on a  $1 - 3x^2 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{3}}$  ou  $x = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$g''(x)$  s'annule deux fois et change de signe donc  $\zeta$  admet deux points

d'inflexions  $A\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, e^{-\frac{3}{2}}\right)$  et  $B\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, e^{-\frac{3}{2}}\right)$

|                   |           |                       |                      |           |   |
|-------------------|-----------|-----------------------|----------------------|-----------|---|
| x                 | $-\infty$ | $-\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $\frac{1}{\sqrt{3}}$ | $+\infty$ |   |
| signe de $g''(x)$ | -         | ○                     | +                    | ○         | - |

b)



4°)  $\forall x \in [0, +\infty[ , f(x) = g^2(x) \Rightarrow f'(x) = 2g'(x)g(x) \geq 0 \Rightarrow f$  est croissante sur  $[0, +\infty[$

5°) a)  $V(n) = \pi \int_0^n f(t) dt = \pi \int_0^n g^2(t) dt \Rightarrow$  comme  $g$  est continue et positive sur  $[0, \pi]$

Alors :  $V(n)$  est le volume(en unité de volume) engendré par rotation de la courbe  $\zeta$  au tour de l'axe des abscisses

$$\begin{aligned} \text{b) } \pi \int_{\sqrt{n}}^n f(t) dt - \pi \int_{\sqrt{n}}^n f(t) dt &= \pi \left( \int_0^n f(t) dt + \int_n^{\sqrt{n}} f(t) dt \right) = \pi \int_0^{\sqrt{n}} f(t) dt \geq 0 \\ &\Rightarrow V(n) \geq \pi \int_0^{\sqrt{n}} f(t) dt \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \bullet f \text{ est croissante sur } [0, +\infty[ ; t \geq \sqrt{n} \Rightarrow f(t) \geq f(\sqrt{n}) &\Rightarrow \pi \int_{\sqrt{n}}^n f(t) dt \geq \pi f(\sqrt{n}) \int_{\sqrt{n}}^n 1 dt \\ &\Rightarrow V(n) \geq \pi f(\sqrt{n})(n - \sqrt{n}) \Rightarrow V(n) \geq \pi \sqrt{n} f(\sqrt{n})(\sqrt{n} - 1) \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} f(\sqrt{n}) = 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \pi \sqrt{n} f(\sqrt{n})(\sqrt{n} - 1) = +\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} V(n) = +\infty$$

$$\begin{aligned} \text{d) Pour tout réel } t \text{ de } [0, +\infty[ , g(t) \leq 1 \Rightarrow f(t) \leq 1 &\Rightarrow \pi \int_{\sqrt{n}}^n f(t) dt \leq \pi \int_{\sqrt{n}}^n 1 dt \\ &\Rightarrow V(n) \leq \pi(n - \sqrt{n}) \leq \pi n \end{aligned}$$

$$\text{e) } \pi f(\sqrt{n})(n - \sqrt{n}) \leq V(n) \leq \pi n \Leftrightarrow \pi f(\sqrt{n}) \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \leq \frac{V(n)}{n} \leq \pi$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \overbrace{\pi f(\sqrt{n})}^1 \left(1 - \underbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}_0\right) = \pi \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{V(n)}{n} = \pi$$

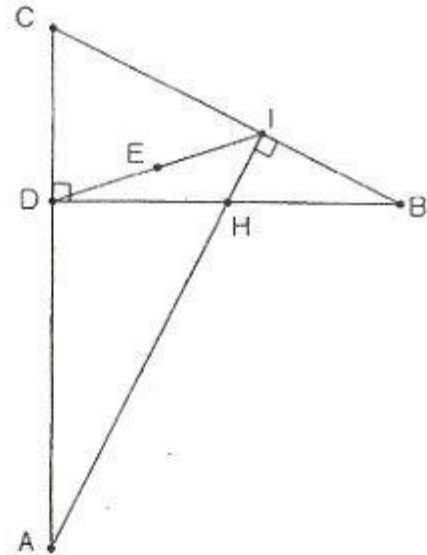
|                                                                                                            |                                          |                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| REPUBLIQUE TUNISIENNE<br>MINISTRE DE L'EDUCATION<br>●●●●●<br><b>EXAMEN DU BACCALAUREAT</b><br>SESSION 2018 | <b>Session principale</b>                |                                                                                                                                                                                                                                                                                   |
|                                                                                                            | <i>Epreuve :</i><br><b>Mathématiques</b> | Section :<br><b>Mathématiques</b>                                                                                                                                                                                                                                                 |
|                                                                                                            | Durée : <b>4h</b>                        | <div style="border: 1px solid black; width: 40px; height: 40px; margin: 0 auto; display: flex; align-items: center; justify-content: center;"> <div style="width: 10px; height: 10px; background-color: black; margin: 0 auto;"></div> </div> Coefficient de l'épreuve : <b>4</b> |

Le sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6.  
Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie.

### Exercice 1 (5 points)

Le plan est orienté. Dans la figure ci-contre,

- DBC est un triangle rectangle en D tel que  $\left(\overrightarrow{DB}, \overrightarrow{DC}\right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$  et  $DB = 2DC$  ;
- le point H est le milieu du segment  $[DB]$  ;
- le point I est le projeté orthogonal du point H sur la droite  $(BC)$  ;
- le point E est le milieu du segment  $[ID]$  ;
- les droites  $(IH)$  et  $(CD)$  se coupent au point A.



1) Soit R la rotation de centre H et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .

a) Calculer  $\widehat{CBD}$ . En déduire que  $\frac{IH}{IB} = \frac{1}{2}$ .

b) Montrer alors que  $R(I) = E$ .

2) Soit h l'homothétie de centre D et de rapport 2. On pose  $f = h \circ R$ .

a) Déterminer  $f(H)$ .

b) Montrer que  $f(I) = I$ .

c) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f.

d) Montrer que  $f(C) = A$ .

3) a) La droite  $(CH)$  coupe la droite  $(AB)$  en un point F.

Justifier que les points B, I, H et F sont sur le cercle de diamètre  $[BH]$ .

En déduire que  $\left(\overrightarrow{IH}, \overrightarrow{IF}\right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$ .

b) Montrer alors que l'image par f de la droite  $(ID)$  est la droite  $(IF)$ .

c) La droite  $(ID)$  coupe les droites  $(CF)$  et  $(AB)$  respectivement en J et  $\Omega$ . Montrer que  $f(J) = F$ .

d) Montrer que  $f(F) = \Omega$ .

4) Montrer que le triangle  $CA\Omega$  est rectangle.

### Exercice 2 (3 points)

Soit  $\theta$  un réel non nul.

Dans la **figure 1** de l'annexe jointe,

- $(O, \vec{u}, \vec{v})$  est un repère orthonormé direct ;
- $\mathcal{C}$  est le cercle de centre  $O$  et de rayon 1 ;
- $E$  est le point de  $\mathcal{C}$  tel que  $\left(\vec{u}, \overrightarrow{OE}\right) \equiv \theta [2\pi]$  ;
- $F$  et  $G$  sont les points d'affixes, respectives,  $-1$  et  $1+\sqrt{2}$  ;
- $\Gamma$  est le demi-cercle de diamètre  $[FG]$  ;
- $D$  est le point d'intersection de  $\Gamma$  et l'axe  $(O, \vec{v})$ .

1) a) Vérifier que  $OD^2 = 1 + \sqrt{2}$ .

b) Soit  $A$  le point d'affixe  $z_A = i\sqrt{1+\sqrt{2}} e^{i0}$ . Vérifier que  $z_A = OD e^{i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}$ . Construire alors le point  $A$ .

2) On considère, dans  $\mathbb{C}$ , l'équation (E) :  $z^2 + \frac{\sqrt{2}}{i\sqrt{1+\sqrt{2}}} e^{i0} z + e^{2i0} = 0$ .

a) Vérifier que  $z_A$  est une solution de l'équation (E).

b) On désigne par  $B$  le point d'affixe  $z_B$ , où  $z_B$  est la deuxième solution de (E).

Déterminer  $z_B$ .

3) a) Montrer que les points  $O, A$  et  $B$  sont alignés.

b) Placer le point  $C$  d'affixe  $z_C = OD e^{i0}$ .

c) Montrer que  $\frac{\text{Aff}(\overrightarrow{AC})}{\text{Aff}(\overrightarrow{AB})} = \frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)$ .

En déduire que le triangle  $ABC$  est isocèle et que  $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$ .

d) Construire alors le point  $B$ .

### Exercice 3 (7 points)

A) On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par  $\begin{cases} f(x) = x \ln x & \text{si } x > 0, \\ f(0) = 0. \end{cases}$

On note  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) a) Vérifier que  $f$  est continue à droite en 0.

b) Etudier la dérivabilité de  $f$  à droite en 0. Interpréter graphiquement.

c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

2) Dans la **Figure 2** de l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , la courbe  $\Gamma$

de la fonction  $x \mapsto e^x$  et les droites  $\Delta$  et  $\Delta'$  d'équations respectives  $y = x$  et  $y = -x$ .

a) Construire les points  $A$  et  $B$  de  $(C_f)$  d'abscisses respectives  $e$  et  $\frac{1}{e}$ .

b) Déterminer la position relative de  $(C_f)$  et  $\Delta$  puis la position relative de  $(C_f)$  et  $\Delta'$ .

c) Tracer la courbe  $(C_f)$ .

3) Soit  $S$  la partie du plan limitée par la courbe  $(C_f)$  et les droites  $\Delta$  et  $\Delta'$ .

Montrer que l'aire de la partie  $S$  est égale à  $\frac{1}{4} \left( e^2 - \frac{1}{e^2} \right)$ .

B) Soit  $n$  un entier naturel.

On pose  $u_n = \int_{\frac{1}{e}}^1 t^n e^t dt$  et  $v_n = \int_{\frac{1}{e}}^1 t^n e^t f(t) dt$ .

1) a) Montrer que  $u_n > 0$ .

b) Montrer que  $0 < u_n \leq \frac{e}{n+1}$ . En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$ .

c) Montrer que  $u_{n+1} = e - \frac{e^e}{e^{n+1}} - (n+1) u_n$ .

d) Montrer alors que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+1) u_n = e$ .

2) a) Montrer que  $-\frac{u_n}{e} \leq v_n \leq 0$ . Déterminer alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} v_n$ .

b) Vérifier que pour tout  $t \in ]0, +\infty[$ ,  $f(t) = t f'(t) - t$ .

Montrer alors que  $v_n = \int_{\frac{1}{e}}^1 t^{n+1} e^t f'(t) dt - u_{n+1}$ .

c) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que  $(n+2) v_n = \frac{e^{\frac{1}{e}}}{e^{n+2}} - v_{n+1} - u_{n+1}$ .

d) Montrer alors que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (n+2) v_n = 0$ .

3) a) Montrer qu'il existe un seul réel  $\alpha_n$  appartenant à l'intervalle  $\left[ \frac{1}{e}, 1 \right]$  tel que  $f(\alpha_n) = \frac{v_n}{u_n}$ .

b) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{v_n}{u_n} = 0$ .

c) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n$ .

#### Exercice 4 (5 points)

A) Soit  $q$  un entier naturel.

1) Montrer que  $q^2$  est impair si et seulement si  $q$  est impair.

2) Montrer que si  $q$  est impair alors  $q^2 \equiv 1 \pmod{8}$ .

B) On se propose de déterminer l'ensemble  $A$  des triplets d'entiers naturels non nuls  $(m, n, q)$  tels que  $2^{2m} + 3^{2n} = q^2$ .

1) Vérifier que le triplet  $(2, 1, 5)$  est un élément de  $A$ .

Dans la suite de l'exercice on suppose que  $(m, n, q)$  est un élément de  $A$ .

2) a) Montrer que  $q$  est impair.

b) Montrer que  $q^2 - 3^{2n} \equiv 0 \pmod{8}$ .

c) Montrer alors que  $m$  est différent de 1.

3) On suppose que  $m \geq 2$ .

a) Justifier que les entiers  $(q-3^n)$  et  $(q+3^n)$  sont pairs.

b) Soit  $d = (q-3^n) \wedge (q+3^n)$ .

Montrer que  $d$  divise  $2q$  et que  $d$  divise  $2^{2m}$ . En déduire que  $d = 2$ .

c) Montrer que  $q-3^n = 2$  et que  $q+3^n = 2^{2m-1}$ .

En déduire que  $q = 2^{2m-2} + 1$  et que  $3^n = 2^{2m-2} - 1$ .

4) Déterminer  $n$  et  $q$  lorsque  $m = 2$ .

5) On suppose que  $m \geq 3$ .

a) Montrer que  $3^n \equiv -1 \pmod{16}$ .

b) Déterminer, suivant les valeurs de l'entier naturel  $k$ , les restes possibles de  $3^k$  dans la division euclidienne par 16.

c) En déduire qu'il n'existe pas de triplets  $(m, n, q)$  éléments de l'ensemble  $A$  tels que  $m \geq 3$ .

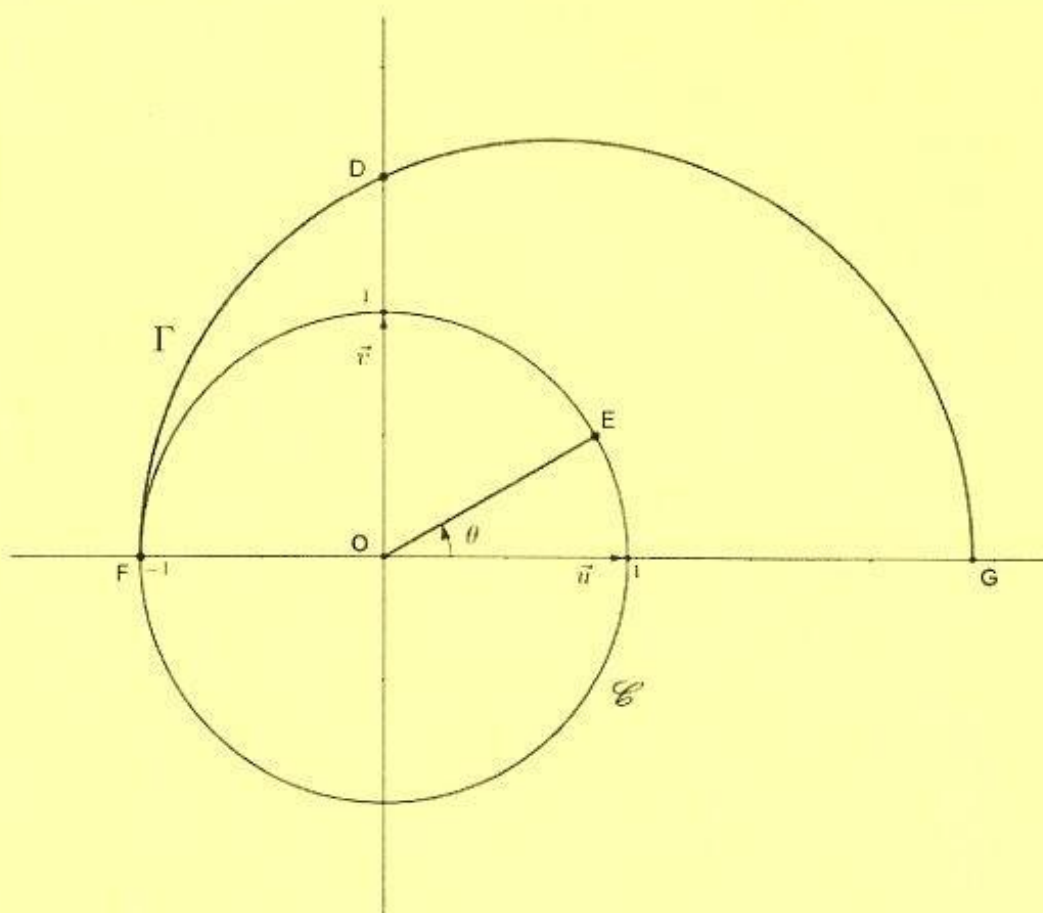
6) Déterminer l'ensemble  $A$ .

Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....  
Nom et Prénom : .....  
Date et lieu de naissance : .....

Signatures des surveillants

Épreuve : **Mathématiques** - Section : **Mathématiques** - Session principale - 2018

**Annexe à rendre avec la copie**



**Figure 1**

Ne rien écrire ici

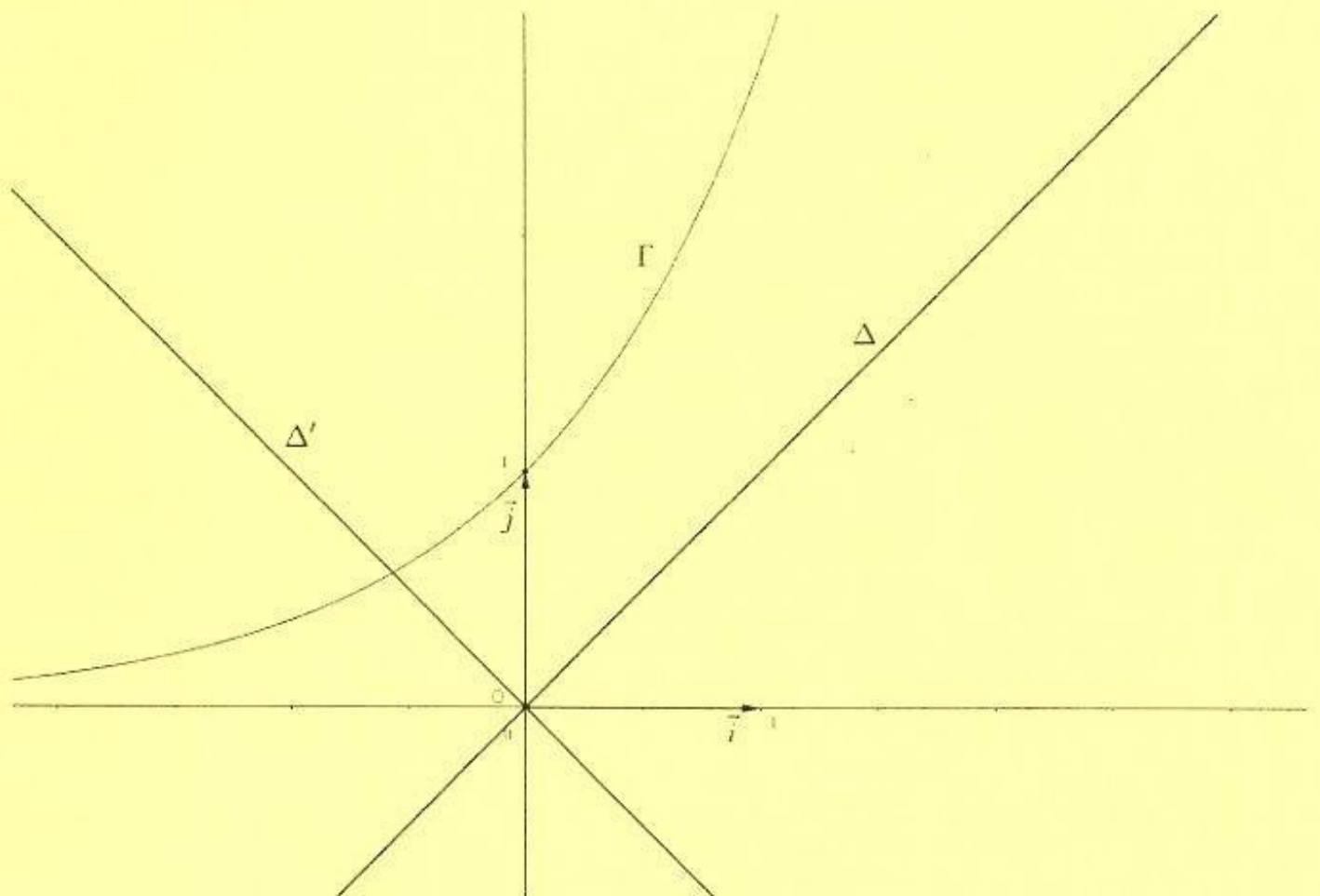


Figure 2

|                                                                                                            |                                   |                                                                                                                        |
|------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| REPUBLIQUE TUNISIENNE<br>MINISTRE DE L'EDUCATION<br>●●●●●<br><b>EXAMEN DU BACCALAUREAT</b><br>SESSION 2018 | <b>Session de contrôle</b>        |                                                                                                                        |
|                                                                                                            | Epreuve :<br><b>Mathématiques</b> | Section :<br><b>Mathématiques</b>                                                                                      |
|                                                                                                            | Durée : <b>4h</b>                 |  Coefficient de l'épreuve : <b>4</b> |

Le sujet comporte sept pages numérotées de 1/7 à 7/7.  
 Les pages 5/7, 6/7 et 7/7 sont à rendre avec la copie.

### Exercice 1 (5 points)

Le plan est orienté. Dans la Figure 1 de l'annexe jointe,

- ABC est un triangle équilatéral direct tel que  $\left(\vec{AB}, \vec{AC}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$  ;
- $\mathcal{C}_1$  est le cercle circonscrit au triangle ABC et O son centre ;
- I est le milieu du segment [BC] ;
- AICD est un rectangle direct.

1) Soit  $f$  le déplacement tel que  $f(A) = C$  et  $f(B) = A$ .

Montrer que  $f$  est une rotation dont on précisera son centre et une mesure de son angle.

2) Soit  $g$  l'antidépacement tel que  $g(A) = C$  et  $g(B) = A$ .

a) Justifier que  $g$  est une symétrie glissante.

b) Montrer que  $g = t_{\vec{BI}} \circ S_{\Delta}$ , où  $\Delta$  est la médiatrice du segment [AI].

3) Soit  $h$  l'homothétie de centre A et telle que  $h(O) = I$ . On pose  $\varphi = g \circ h \circ f$ .

a) Montrer que  $\varphi$  est une similitude indirecte de rapport  $\frac{3}{2}$ .

b) Montrer que  $\varphi(B) = C$  et  $\varphi(O) = D$ .

4) Soit  $E = \varphi(C)$ .

a) Montrer que le triangle DCE est isocèle en D.

b) Justifier que  $\left(\vec{DC}, \vec{DE}\right) \equiv -\frac{2\pi}{3}[2\pi]$ .

c) Construire alors le point E.

d) Soit  $\Omega$  le centre de  $\varphi$ .

Montrer que  $\vec{\Omega B} = \frac{4}{5} \vec{BE}$ . Construire le point  $\Omega$ .

5) On pose  $\mathcal{C}_2 = \varphi(\mathcal{C}_1)$ .

Le cercle  $\mathcal{C}_2$  coupe le cercle  $\mathcal{C}_1$  au point C et en un autre point M. On pose  $N = \varphi(M)$ .

Montrer que les points  $\Omega$ , B et M sont alignés. Construire alors le point N.

### Exercice 2 (3 points)

Une urne contient six pièces de monnaie :

- quatre pièces sont équilibrées ;
- les deux autres pièces sont truquées de façon que la probabilité d'obtenir « FACE » est égale à  $\frac{2}{3}$ .

On tire, au hasard, une pièce de l'urne et on effectue  $n$  lancers successifs de cette pièce,  $n \geq 1$ .

On considère les événements suivants :

- $E$  : « la pièce tirée est équilibrée ».
- $F_n$  : « on obtient FACE pour les  $n$  lancers ».

1) a) Déterminer  $p(E)$ ,  $p(F_1/E)$  et  $p(F_1/\bar{E})$ .

b) Montrer que  $p(F_1) = \frac{5}{9}$ .

2) Montrer que  $p(F_n) = \frac{1}{3} \left( \left( \frac{1}{2} \right)^{n-1} + \left( \frac{2}{3} \right)^n \right)$ .

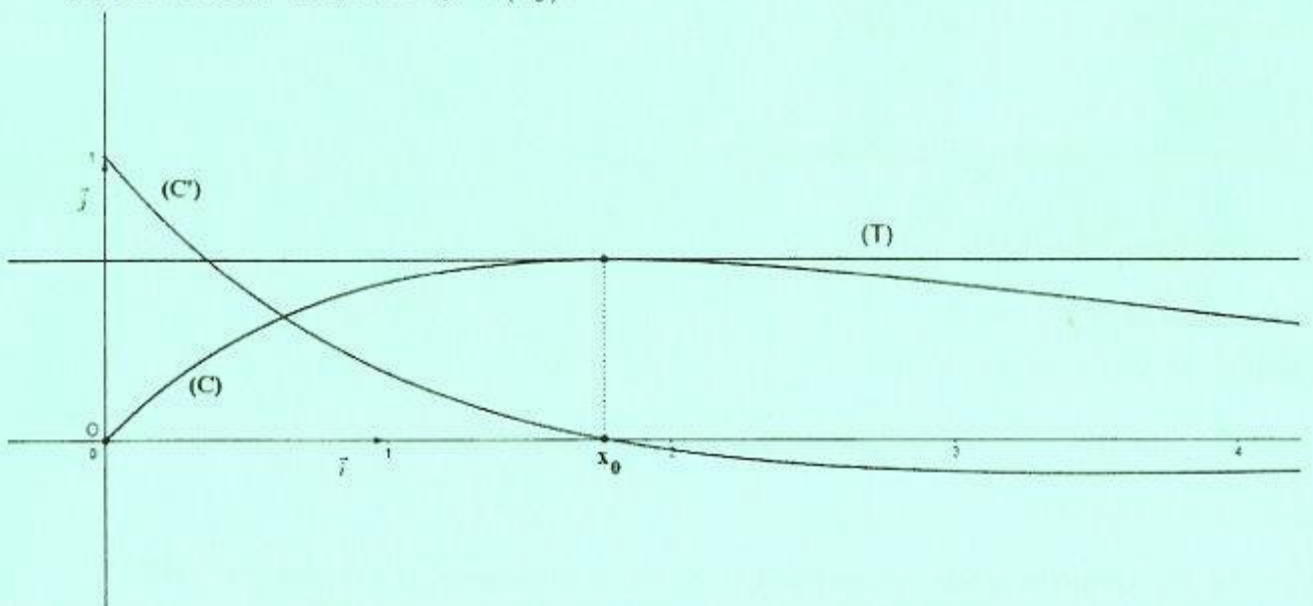
3) Soit  $X_n$  la variable aléatoire définie de la manière suivante : 
$$\begin{cases} X_n = n & \text{si } F_n \text{ est réalisé ;} \\ X_n = 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Donner la loi de probabilité de  $X_n$ .

b) Déterminer l'espérance mathématique de  $X_n$ .

c) Dans la figure ci-dessous,

- $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est un repère orthonormé du plan,
- $(C)$  est la courbe représentative de la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{x}{3} \left( \left( \frac{1}{2} \right)^{x-1} + \left( \frac{2}{3} \right)^x \right)$ ,
- $(C')$  est la courbe représentative de la fonction dérivée  $f'$  de  $f$ ,
- la courbe  $(C')$  coupe l'axe  $(O, \vec{i})$  en un seul point d'abscisse  $x_0$ ,
- $(T)$  est la droite d'équation  $y = f(x_0)$ .



Exploiter le graphique pour déterminer l'entier naturel  $n$  pour lequel l'espérance mathématique  $E(X_n)$  est maximale.

### Exercice 3 (7 points)

1) Soit  $g$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $g(x) = 1 - x + x \ln x$ .

a) Etudier les variations de  $g$ .

b) En déduire que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $1 + x \ln x \geq x$ .

2) Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par 
$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{1 + x \ln x} & \text{si } x > 0, \\ f(0) = 1. \end{cases}$$

On note  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

a) Montrer que  $f$  est continue à droite en 0.

b) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - 1}{x} = +\infty$ . Interpréter graphiquement.

c) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ . Interpréter graphiquement.

3) a) Montrer pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f'(x) = -\frac{1 + \ln x}{(1 + x \ln x)^2}$ .

b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

4) Dans la figure 2 de l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , les courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$  des fonctions définies sur  $]0, +\infty[$  respectivement par  $x \mapsto \ln x$  et  $x \mapsto \frac{1}{x}$ .

a) Construire le point A de  $(C_1)$  d'abscisse  $\frac{1}{e}$  et le point B de  $(C_2)$  d'abscisse  $1 - \frac{1}{e}$ .

En déduire une construction du point C de  $(C_f)$  d'abscisse  $\frac{1}{e}$ .

b) Déduire de la question 1) b) que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f(x) \leq \frac{1}{x}$ .

Déterminer alors la position relative de  $(C_f)$  et  $(C_2)$ .

c) Tracer la courbe  $(C_f)$ .

5) On considère la fonction  $F$  définie sur  $[1, +\infty[$  par  $F(x) = \int_1^x f(t) dt$ .

a) Montrer que pour tout  $t \in [1, +\infty[$ ,  $\frac{1}{t + t \ln(t)} \leq f(t)$ .

b) Montrer alors que pour tout  $x \in [1, +\infty[$ ,  $\ln(1 + \ln x) \leq F(x) \leq \ln x$ .

c) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{F(x)}{x}$ .

6) Soit  $n$  un entier naturel non nul.

a) Montrer que la fonction  $h : x \mapsto x - F(x)$  est une bijection de  $[1, +\infty[$  sur  $[1, +\infty[$ .

b) En déduire que l'équation  $h(x) = n$  admet dans  $[1, +\infty[$  une seule solution  $\alpha_n$ .

c) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = +\infty$ .

d) Vérifier que  $\frac{\alpha_n}{n} = \frac{1}{1 - \frac{F(\alpha_n)}{\alpha_n}}$ . Déterminer alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{n}$ .

#### Exercice 4 (5 points)

1) On considère, dans  $\mathbb{C}$ , l'équation (E) :  $z^2 - (1+i)z - i = 0$ .

Résoudre l'équation (E). On note  $z_1$  et  $z_2$ , les solutions de (E).

2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on désigne par A, B,  $M_1$  et  $M_2$  les points d'affixes respectives 1, i,  $z_1$  et  $z_2$ .

Soit  $z$  un nombre complexe distinct de 1, i,  $z_1$  et  $z_2$ .

On note M et M' les points d'affixes respectives  $z$  et  $z' = \frac{z+i}{z-i}$ .

Justifier que les points M et M' sont distincts.

Dans la suite de l'exercice on prend  $z = i + 2e^{i\theta}$ , où  $\theta$  est un réel.

3) a) Montrer que M décrit le cercle  $\Gamma$  de centre B et de rayon 2.

b) Montrer que  $z' = 1 + ie^{-i\theta}$ .

c) Montrer que  $AM' = 1$  et que  $\left(\vec{u}, \overrightarrow{AM'}\right) \equiv \frac{\pi}{2} - \theta [2\pi]$ .

d) Déterminer l'ensemble des points M' lorsque le point M décrit le cercle  $\Gamma$ .

4) Soit P le milieu du segment  $[MM']$  et  $z_P$  son affixe.

On désigne par Q le point d'affixe  $z_Q = e^{i\frac{\pi}{4}} z_P$ .

a) Vérifier que  $z_P = \frac{1+i+2e^{i\theta} + ie^{-i\theta}}{2}$ .

b) En déduire que  $z_Q = \frac{i\sqrt{2} + 2e^{i\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)} - e^{-i\left(\frac{\pi}{4}+\theta\right)}}{2}$ .

c) Montrer alors que  $z_Q = \frac{1}{2} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + i \left( \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{3}{2} \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) \right)$ .

5) a) Montrer que lorsque le point M varie sur le cercle  $\Gamma$ , le point Q varie sur l'ellipse  $\mathcal{E}$  d'équation

$$4x^2 + \frac{4}{9} \left( y - \frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 = 1.$$

b) Dans la **figure 3** de l'annexe jointe, on a tracé dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  le cercle  $\Gamma$ , l'ellipse  $\mathcal{E}$ ,

et on a placé un point M sur le cercle  $\Gamma$  tel que  $\left(\vec{u}, \overrightarrow{BM}\right) \equiv \theta [2\pi]$ . Construire les points M' et Q.

Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....

Nom et Prénom : .....

Date et lieu de naissance : .....

Signatures des surveillants

.....

.....



Épreuve : **Mathématiques** - Section : **Mathématiques** - Session de contrôle - 2018

Annexe à rendre avec la copie

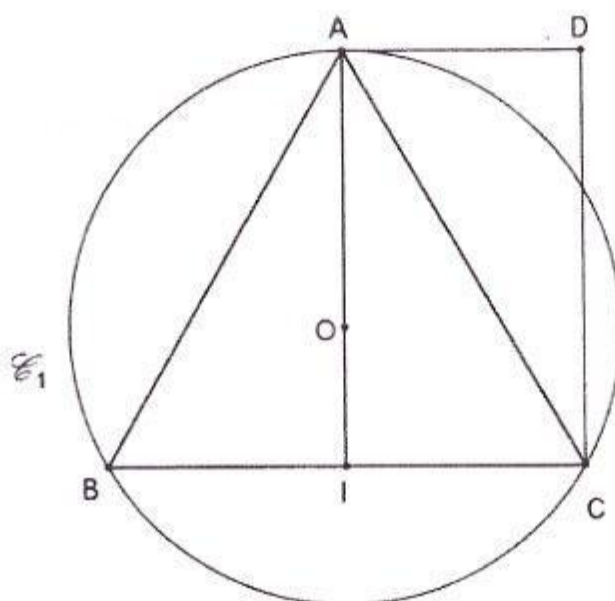


Figure 1

Ne rien écrire ici

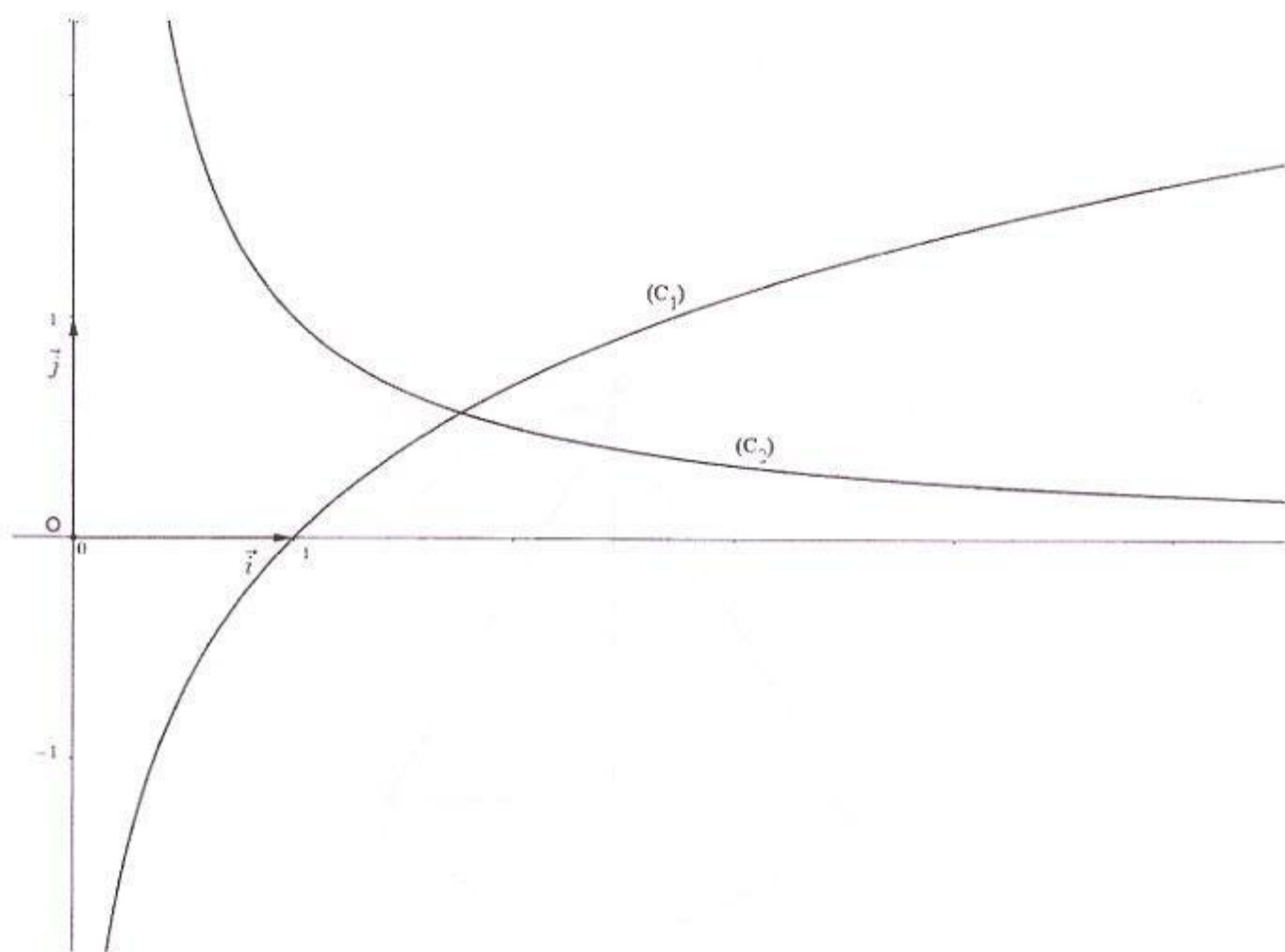


Figure 2

Ne rien écrire ici

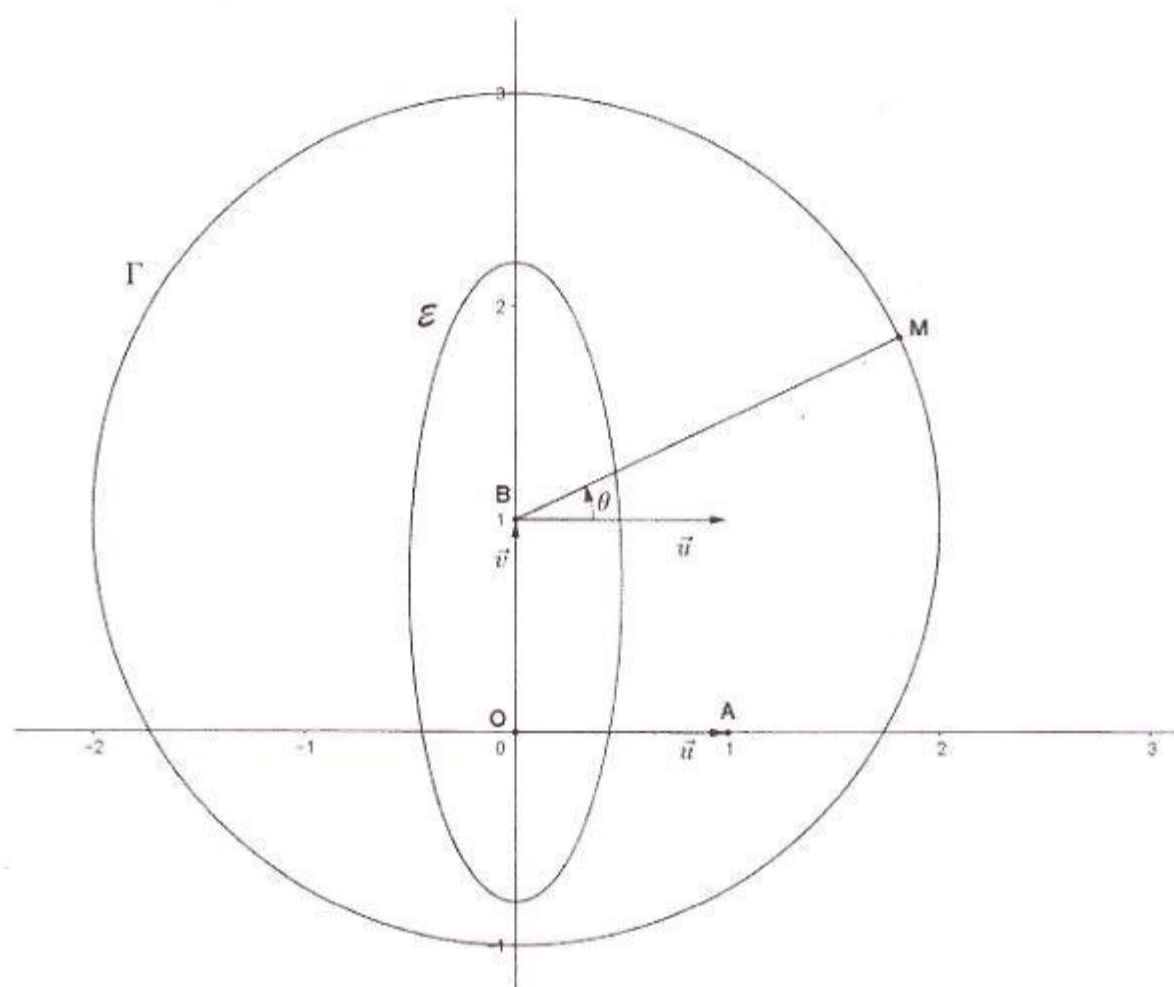


Figure 3

Le sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6.

Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie.

**Exercice 1 (5 points)**

Le plan est orienté.

Dans la figure 1 de l'annexe 1 jointe,

ABC est un triangle équilatéral tel que  $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ ,

$\Omega$  est un point intérieur au triangle ABC tel que  $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{A\Omega}\right) \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ ,

I et J sont les projetés orthogonaux de  $\Omega$  respectivement sur les droites (AB) et (AC),

D est le point de la droite (AC) tel que  $DA = D\Omega$ .

1) Montrer que  $\left(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega D}\right) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ .

2) Soit  $R = S_{(\Omega D)} \circ S_{(\Omega J)}$ .

a) Justifier que R est la rotation de centre  $\Omega$  et d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ .

b) Soit  $F = R(J)$ .

Montrer que F est un point de la demi-droite  $[\Omega I)$ . Construire le point F.

3) Soit h l'homothétie de centre  $\Omega$  et telle que  $h(F) = I$ . On pose  $f = h \circ R$ .

a) Vérifier que  $f(J) = I$ .

b) Montrer que f est une similitude directe dont on précisera le centre et l'angle.

c) Calculer  $\frac{\Omega I}{\Omega A}$  et  $\frac{\Omega A}{\Omega J}$ . (On donne  $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}}$ ).

En déduire que le rapport de f est égal à  $1 + \sqrt{3}$ .

4) Soit g la similitude indirecte de centre  $\Omega$  telle que  $g(J) = I$ .

a) Montrer que  $g = f \circ S_{(\Omega J)}$ .

b) Déterminer le rapport de g.

c) Montrer que l'axe de g est la droite  $(\Omega D)$ .

d) Montrer que  $g = h \circ S_{(\Omega D)}$ .

e) La droite  $(\Omega D)$  coupe la droite (BC) en un point K. On pose  $K' = g(K)$ .

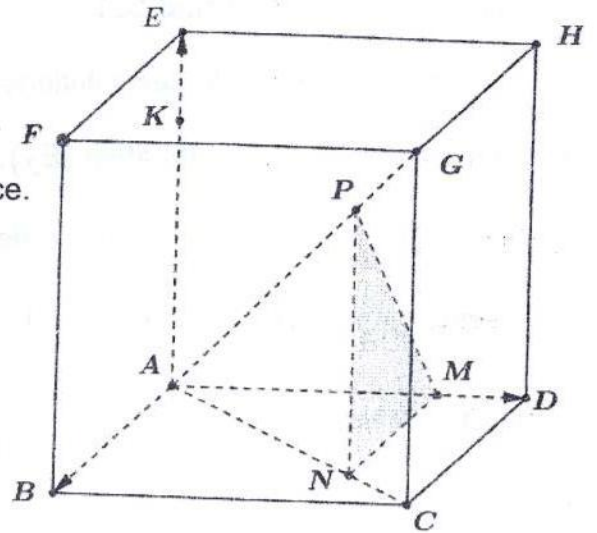
Vérifier que  $h(K) = K'$ . Construire alors le point  $K'$ .

### Exercise 2 (3,5 points)

L'espace est orienté.

Dans la figure ci-contre ABCDEFGH est un cube d'arrête 1.

$(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$  est un repère orthonormé direct de l'espace.



- 1) a) Montrer que  $\overrightarrow{EC} \wedge \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AH}$ .
  - b) Montrer que l'aire du triangle ECD est égale à  $\frac{\sqrt{2}}{2}$ .
  - c) Calculer le volume du tétraèdre AECD.
- 2) Soit h l'homothétie de centre A et de rapport  $\frac{3}{4}$ .

On pose  $M = h(D)$ .

- a) Le plan passant par M et parallèle au plan (DCG) coupe les segments [AC] et [AG] respectivement en N et P. Montrer que  $h(C) = N$  et  $h(G) = P$ .
- b) Le plan passant par M et parallèle au plan (ECD) coupe la droite (AE) en un point K. Calculer le volume du tétraèdre AKNM.

- 3) Soit (S) la sphère de centre le point I  $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$  et de rayon  $R = \frac{\sqrt{3}}{2}$ .

- a) Montrer que la sphère  $(S)$  coupe le plan  $(DCG)$  suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon.
- b) Soit  $(S')$  l'image de la sphère  $(S)$  par l'homothétie  $h$ .
- Montrer que  $(S')$  coupe le plan  $(MNP)$  suivant un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

### Exercise 3 (4 points)

- 1) Soit  $x$  un entier non nul premier avec 53.
- a) Déterminer le reste modulo 53 de  $x^{52}$ .
- b) En déduire que pour tout entier naturel  $k$ ,  $x^{52k+1} \equiv x \pmod{53}$ .

- 2) Soit l'équation  $(E_1): x^{29} \equiv 2 \pmod{53}$ , où  $x \in \mathbb{Z}$ .

Montrer que  $2^9$  est une solution de  $(E_1)$ .

- 3) Soit  $x$  une solution de l'équation  $(E_1)$ .
- a) Montrer que  $x$  est premier avec 53.
  - b) Montrer que  $x^{261} \equiv x \pmod{53}$ .
  - c) En déduire que  $x \equiv 2^9 \pmod{53}$ .

4) a) Montrer que  $2^9 \equiv 35 \pmod{53}$ .

b) Donner alors l'ensemble des solutions dans  $\mathbb{Z}$  de l'équation  $(E_1)$ .

5) On considère dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation  $(E_2)$ :  $71u - 53v = 1$ .

a) Vérifier que  $(3, 4)$  est une solution de l'équation  $(E_2)$ .

b) Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation  $(E_2)$ .

6) Résoudre dans  $\mathbb{Z}$  le système 
$$\begin{cases} x \equiv 34 \pmod{71} \\ x^{29} \equiv 2 \pmod{53} \end{cases}.$$

#### **Exercice 4 (7,5 points)**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f(x) = \sqrt{e^x - 1}$ .

On note  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) Déterminer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter graphiquement.

2) a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = +\infty$ . Interpréter graphiquement.

b) Montrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$ .

c) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

d) En déduire que  $e^x - 1 \leq \sqrt{e^x - 1}$ , si et seulement si,  $x \leq \ln(2)$ .

3) Montrer que le point  $B(\ln 2, 1)$  est un point d'inflexion de  $(C_f)$ .

4) Dans la figure 2 de l'annexe 2 jointe, on a tracé dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la courbe  $\Gamma$  de la fonction  $x : \mapsto e^x - 1$ .

a) Etudier la position relative de  $(C_f)$  par rapport à  $\Gamma$ .

b) Tracer la courbe  $(C_f)$ .

5) Soit  $g$  la fonction définie sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$  par  $g(x) = \tan(x)$ .

a) Montrer que  $g$  réalise une bijection de  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$  sur  $[0, +\infty[$ . On note  $g^{-1}$  sa fonction réciproque.

b) Calculer  $(g^{-1})(0)$  et  $(g^{-1})(1)$ .

c) Montrer que  $g^{-1}$  est dérivable sur  $[0, +\infty[$  et que  $(g^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ .

d) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g^{-1}(x)}{x} = 1$ .

6) On pose pour tout  $x \in [0, +\infty[$ ,  $F(x) = \int_0^x f(t) dt$  et  $G(x) = 2 \left( f(x) - (g^{-1} \circ f)(x) \right)$ .

a) Montrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $F'(x) = G'(x)$ .

b) En déduire que pour tout  $x \in [0, +\infty[$ ,  $F(x) = G(x)$ .

c) Soit  $A$  l'aire de la partie du plan limitée par la courbe  $(C_f)$ , la courbe  $\Gamma$  et les droites

d'équations  $x = 0$  et  $x = \ln 2$ . Montrer que  $A = 1 + \ln 2 - \frac{\pi}{2}$ .

7) Soit  $n$  un entier naturel tel que  $n \geq 2$ .

On désigne par  $f_n$  la fonction définie sur  $[\ln(n), +\infty[$  par  $f_n(x) = \sqrt{e^x - n}$ .

On note  $(C_n)$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

a) Soit  $G_n$  la fonction définie sur  $[\ln(n), +\infty[$  par  $G_n(x) = 2 \left( f_n(x) - \sqrt{n} g^{-1} \left( \frac{f_n(x)}{\sqrt{n}} \right) \right)$ .

Montrer que pour tout  $x \in [\ln(n), +\infty[$ ,  $G_n(x) = \int_{\ln(n)}^x f_n(t) dt$ .

b) Vérifier que pour tout  $x \geq \ln(n)$ ,  $\sqrt{e^x - n} < \sqrt{e^x - 1}$ .

En déduire que pour tout  $x \geq \ln(n)$ ,  $f_n(x) \leq e^x - 1$ .

c) Soit  $A_n$  l'aire de la partie du plan limitée par la courbe  $(C_n)$ , la courbe  $\Gamma$  et les droites

d'équations  $x = \ln(n)$  et  $x = \ln(n+1)$ . Montrer que  $A_n = 2 \sqrt{n} g^{-1} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} \right) + \ln \left( \frac{n}{n+1} \right) - 1$ .

d) Déterminer  $\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n$ .



Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....

Nom et Prénom : .....

Date et lieu de naissance : .....

Signatures des surveillants

.....  
.....



Épreuve : Mathématiques

Section : Mathématiques

Annexe 1 à rendre avec la copie

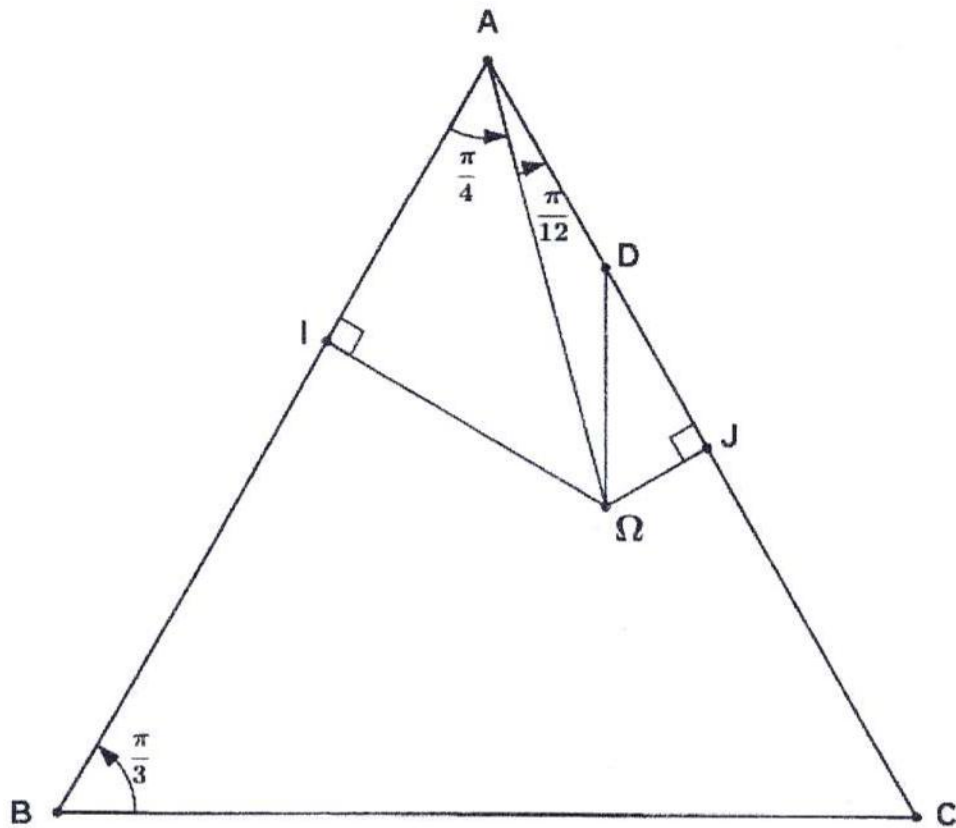


Figure 1

NE RIEN ECRIRE ICI

Épreuve : Mathématiques

Section : Mathématiques

Annexe 2 à rendre avec la copie

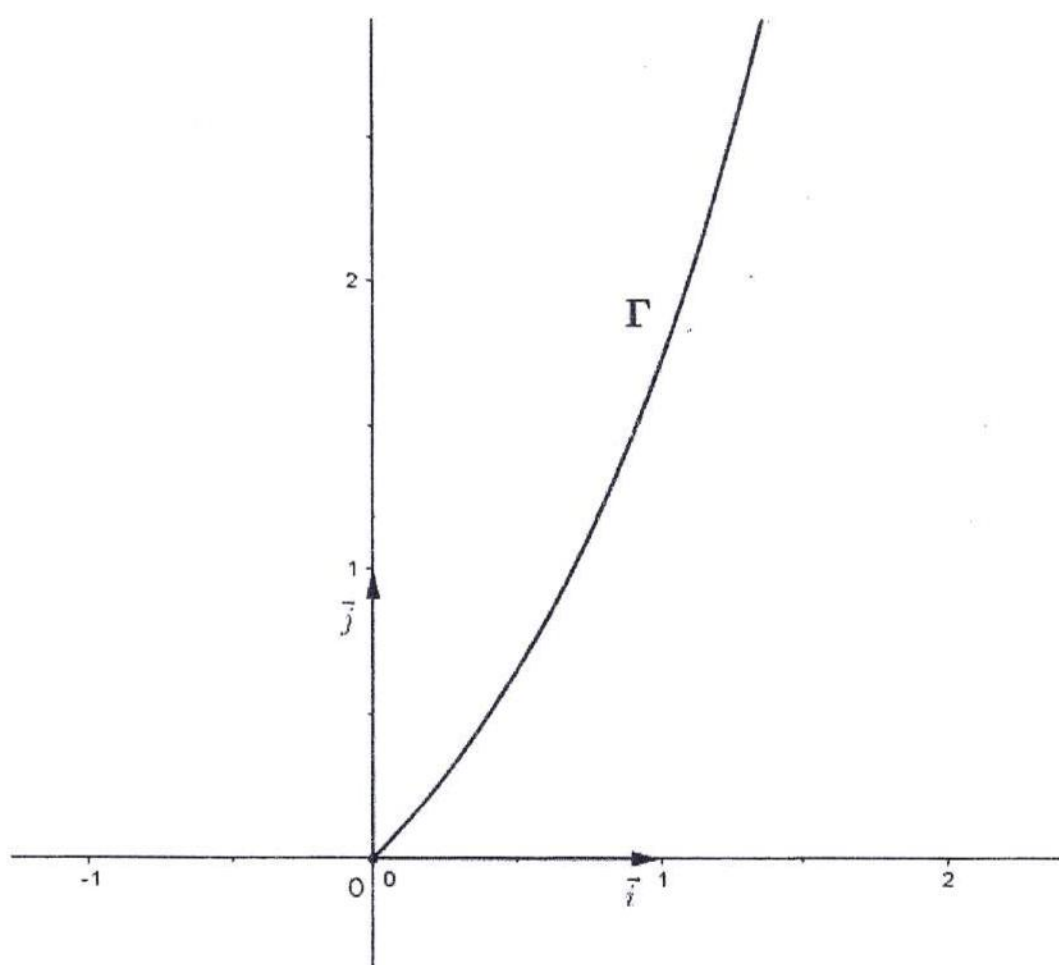


Figure 2

**Exercice 1**

1)  $(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega D}) \equiv (\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega A}) + (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega D}) [2\pi]$ .

$A\Omega J$  est un triangle rectangle en  $J$  tel que  $(\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AJ}) \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi]$ .

Alors  $(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega A}) \equiv (\overrightarrow{JA}, \overrightarrow{J\Omega}) - (\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AJ}) [2\pi] \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} [2\pi]$

$DA\Omega$  est un triangle isocèle (direct) en  $D$  tel que  $(\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AD}) \equiv (\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AJ}) [2\pi] \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi]$ .

Alors  $(\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega A}) \equiv (\overrightarrow{A\Omega}, \overrightarrow{AJ}) [2\pi] \equiv \frac{\pi}{12} [2\pi]$ . Par la suite  $(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega D}) \equiv \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{12} - \frac{\pi}{12} [2\pi] \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ .

2) a)  $R$  est la composée de deux symétries orthogonales d'axes sécants au point  $\Omega$

Donc  $R$  est la rotation de centre  $\Omega$  d'angle  $\frac{2\pi}{3}$  car  $2(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega D}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ .

b)  $\bullet F = R(J)$  donc  $(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega F}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ , de plus  $(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega I}) \equiv \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{12} + \frac{\pi}{4} [2\pi] \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$ .

$\bullet (\overrightarrow{\Omega F}, \overrightarrow{\Omega I}) \equiv (\overrightarrow{\Omega F}, \overrightarrow{\Omega J}) + (\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega I}) [2\pi] \equiv -\frac{2\pi}{3} + \frac{2\pi}{3} [2\pi] \equiv 0 [2\pi]$  donc  $F \in [OI]$ .

3) a)  $f(J) = h \circ R(J) = h(F) = I$ .

b)  $f$  est la composée d'une homothétie et d'un déplacement donc  $f$  est une similitude directe.

$\bullet f(\Omega) = h \circ R(\Omega) = h(\Omega) = \Omega$ . Alors  $\Omega$  est le centre de  $f$ .

$\bullet f(J) = I$  et  $(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega I}) \equiv \frac{2\pi}{3} [2\pi]$  donc  $f$  est d'angle  $\frac{2\pi}{3}$ .

**Remarques :**

\*  $f = h \circ R$  donc l'angle de  $f$  est celui de  $R$  car le rapport de  $h$  est positif car  $h(F) = I$  et  $F \in [OI]$ .

\*  $h$  et  $R$  ont le même centre  $\Omega$  alors  $\Omega$  est le centre de  $f = h \circ R$ .

c) Le triangle  $\Omega AI$  est rectangle et isocèle en  $I$ ,  $\frac{OI}{OA} = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

Le triangle  $\Omega JA$  est rectangle en  $J$  et  $\overrightarrow{\Omega A} \overrightarrow{AJ} = \frac{\pi}{12}$ , donc  $\frac{OA}{\Omega J} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1}$ .

$\bullet f(J) = I$ . Donc le rapport de  $f$  est égal à  $\frac{OI}{\Omega J} = \frac{OI}{OA} \cdot \frac{OA}{\Omega J} = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{3}-1} = \frac{2}{\sqrt{3}-1} = \sqrt{3} + 1$ .

4) a)  $\bullet g$  est une similitude indirecte telle que  $g(\Omega) = \Omega$  et  $g(J) = I$ .

$\bullet f \circ S_{(\Omega J)}$  est la composée d'une similitude directe et d'un antidéplacement ( $S_{(\Omega J)}$ ), donc  $f \circ S_{(\Omega J)}$  est une similitude indirecte. ( $S_{(\Omega J)}$  est une similitude indirecte).

On vérifie facilement que  $f \circ S_{(\Omega J)}(\Omega) = \Omega$  et  $f \circ S_{(\Omega J)}(J) = I$ .

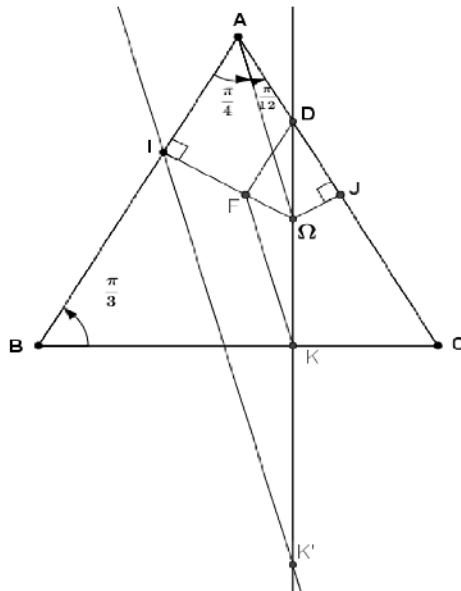
Ainsi  $g$  et  $f \circ S_{(\Omega J)}$  sont deux similitudes indirectes qui coïncident en deux points distincts donc  $g = f \circ S_{(\Omega J)}$ .

b)  $\bullet$  Méthode 1:  $g = f \circ S_{(\Omega J)}$  et  $S_{(\Omega J)}$  est une similitude indirecte de rapport 1.

Donc le rapport de  $g$  est celui de  $f$  c'est à dire  $\sqrt{3} + 1$ .

$\bullet$  Méthode 2:  $g(J) = I$  alors le rapport de  $g$  est  $\frac{OI}{\Omega J} = \sqrt{3} + 1$ .

- c)  $g(J) = I$  donc l'axe de  $g$  est la droite qui porte la bissectrice intérieure de l'angle  $\widehat{I\Omega J}$ .  
 Or  $\left(\overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega D}\right) \equiv \left(\overrightarrow{\Omega D}, \overrightarrow{\Omega I}\right) [2\pi]$ , alors la droite  $(\Omega D)$  porte la bissectrice intérieure de l'angle  $\widehat{I\Omega J}$ .  
 Ainsi l'axe de  $g$  est la droite  $(\Omega D)$ .
- d)  $g$  est la similitude indirecte de centre  $\Omega$ , de rapport  $\sqrt{3} + 1$  et d'axe  $(\Omega D)$  donc la forme réduite de  $g$  est  $g = h_{(\Omega, \sqrt{3}+1)} \circ S_{(\Omega D)} = S_{(\Omega D)} \circ h_{(\Omega, \sqrt{3}+1)}$   
 $h$  est l'homothétie de centre  $\Omega$ , de rapport  $\frac{\Omega I}{\Omega F} = \frac{\Omega I}{\Omega J} = \sqrt{3} + 1$ . Donc  $g = h \circ S_{(\Omega D)}$ .  
 Ou bien :  $g = f \circ S_{(\Omega J)} = h \circ R \circ S_{(\Omega J)} = h \circ S_{(\Omega D)} \circ S_{(\Omega J)} \circ S_{(\Omega J)} = h \circ S_{(\Omega D)}$ .
- e)  $K$  est un point de l'axe de  $g$  donc  $K' = g(K) = h \circ S_{(\Omega D)}(K) = h(K)$ .  
 \*  $h(K) = K'$  et  $h(F) = I$   
 \* Le point  $K'$  est donc le point d'intersection de la droite  $(\Omega K)$  avec la droite passant par  $I$  et parallèle à la droite  $(FK)$ .



## Exercice 2

- 1) a)  $\overrightarrow{EC} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  ;  $\overrightarrow{ED} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$  d'où  $\overrightarrow{EC} \wedge \overrightarrow{ED} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  or  $\overrightarrow{AH} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$  donc  $\overrightarrow{EC} \wedge \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{AH}$ .
- b) L'aire du triangle ECD est égale à :  $\frac{1}{2} \|\overrightarrow{EC} \wedge \overrightarrow{ED}\| = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AH}\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .
- c) Le volume du tétraèdre AECD est :  $v = \frac{1}{6} |(\overrightarrow{EC} \wedge \overrightarrow{ED}) \cdot \overrightarrow{EA}|$ . Avec  $\overrightarrow{EA} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ , On trouve  $v = \frac{1}{6}$ .
- 2) a) •  $C \in (AC) \cap (DCG)$  d'où  $h(C) \in h(AC) \cap h(DCG)$ .  
 $h(AC) = (AC)$  car le centre de  $h$  appartient à  $(AC)$  et  $h(DCG)$  est le plan passant

par M et parallèle au plan (DCG).

Comme  $(AC) \cap h(DCG) = \{N\}$  alors  $h(C) = N$ .

•  $C \in (AG) \cap (DCG)$  d'où  $h(G) \in h(AG) \cap h(DCG)$ .

$h(AG) = (AG)$  et  $(AG) \cap h(DCG) = \{P\}$  alors  $h(G) = P$ .

b)  $h(E)$  est le point d'intersection du plan  $h(ECD)$  avec la droite  $(AE) = h(AE)$ . Donc  $h(E) = K$ .

( $h(ECD)$  est le plan parallèle à  $(ECD)$  et passant par M).

Ainsi l'image par  $h$  du tétraèdre  $AECD$  est le tétraèdre  $AKMN$ .

Par la suite  $V(AKMN) = \left(\frac{3}{4}\right)^3 \times \frac{1}{6}$ .

3) a) **Méthode 1** : une équation du plan (DCG) est  $y - 1 = 0$  d'où  $d(I, (DCG)) = \frac{1}{2}$ ,

par conséquent : le plan (DCG) coupe la sphère (S) suivant un cercle (C) de rayon

$$r = \sqrt{R^2 - d(I, (DCG))^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Le centre de (C) est le point H du plan (DCG) vérifiant  $\overrightarrow{IH} = \alpha \overrightarrow{AD}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ .

(Le vecteur  $\overrightarrow{AD}$  est normal au plan (DCG)). On trouve  $H\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$ .

**Méthode 2** : Remarquons que les points D, C et G (qui ne sont pas alignés) appartiennent à (S), alors le plan (DCG) coupe la sphère (S) suivant le cercle (C) circonscrit au triangle DCG (qui est rectangle en C). Le centre du cercle (C) est donc le milieu du segment [DG]

c'est-à-dire le point de coordonnées  $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}\right)$  et le rayon de (C) est  $\frac{DG}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

b)  $h(S) = (S')$ ,  $h(DCG) = (MNP)$  et  $(S) \cap (DCG) = (C)$ .

Donc le plan (MNP) coupe la sphère (S') suivant le cercle  $(C') = h(C)$ .

(C') est un cercle de centre le point  $H' = h(H)$  et de rayon  $R' = \frac{3}{4}R = \frac{3\sqrt{2}}{8}$ .

On trouve  $H'\left(\frac{3}{8}, \frac{3}{4}, \frac{3}{8}\right)$ .

### Exercice 3

1) a) 53 est premier et  $x$  est un nombre premier avec 53 donc d'après Fermat :

$x^{52} \equiv 1 \pmod{53}$ . Le reste modulo 53 de  $x^{52}$  est égal à 1.

b) Soit  $k$  un entier naturel, on écrit  $x^{52k+1} = (x^{52})^k \cdot x$

Comme  $x^{52} \equiv 1 \pmod{53}$  alors  $x^{52k+1} \equiv x \pmod{53}$ .

2)  $(2^9)^{29} = 2^{9 \times 29}$  et  $9 \times 29 = 261 = 1 + 52 \times 5$ . Comme 2 est premier avec 53,

alors d'après 1)b)  $(2^9)^{29} \equiv 2 \pmod{53}$  d'où  $2^9$  est solution de l'équation  $(E_1)$ .

3) a) Soit  $d = x \wedge 53$ .

$d$  divise  $x$  donc  $d$  divise  $x^{29}$  et  $d$  divise 53 donc  $d$  divise 2. Car  $x^{29} \equiv 2 \pmod{53}$ .

(  $x^{29} \equiv 2 \pmod{53}$  ) alors il existe  $p \in \mathbb{Z}$  tel que  $x^{29} = 2 + 53p$  c'est à dire  $x^{29} - 53p = 2$  )

Donc  $d = 1$  ou  $d = 2$ . Comme 2 ne divise pas 53 alors  $d = 1$ .

b)  $x$  une solution de l'équation  $(E_1)$ . D'après 3)a)  $x$  est premier avec 53.

$$261 = 5x \cdot 52 + 1 \text{ donc } x^{261} \equiv x \pmod{53} \text{ d'après 1) b).}$$

c)  $x$  est une solution de  $(E_1)$  alors  $x^{29} \equiv 2 \pmod{53}$  d'où  $(x^{29})^9 \equiv 2^9 \pmod{53}$ . (I)

$$\text{Or } 29 \times 9 = 261 \text{ donc } (x^{29})^9 \equiv x^{261} \pmod{53}. \text{ D'après : 3)b) } x^{261} \equiv x \pmod{53}. \text{ (II)}$$

$$\text{(I) et (II) donnent } x \equiv 2^9 \pmod{53}.$$

$$4) \text{ a) } 2^9 = 512 = 9 \times 53 + 35 \text{ d'où } 2^9 \equiv 35 \pmod{53}$$

b) • Si  $x$  est une solution de  $(E_1)$  alors  $x \equiv 2^9 \pmod{53}$ , d'après 3)c)

$$\bullet \text{ Si } x \equiv 2^9 \pmod{53} \text{ alors } x^{29} \equiv (2^9)^{29} \pmod{53}$$

$$\text{et comme } (2^9)^{29} \equiv 2 \pmod{53} \text{ (car } 2^9 \text{ solution de } (E_1) \text{ ) alors } x^{29} \equiv 2 \pmod{53}.$$

D'où  $x$  solution de  $(E_1)$ .

$$\text{Conclusion : } x \text{ solution de } (E_1) \Leftrightarrow x \equiv 2^9 \pmod{53}.$$

Or  $2^9 \equiv 35 \pmod{53}$  d'après 4)a), d'où les solutions de l'équation  $(E_1)$

sont les entiers  $53k + 35$  avec  $k \in \mathbb{Z}$ .

$$5) \text{ a) } 71 \times 3 - 53 \times 4 = 213 - 212 = 1 \text{ donc } (3, 4) \text{ solution de } (E_2).$$

b) • Soit  $(u, v)$  une solution de  $(E_2)$

$$\text{Des égalités : } 71u - 53v = 1 \text{ et } 71 \times 3 - 53 \times 4 = 1 \text{ on déduit que } 71(u - 3) = 53(v - 4)$$

Comme  $71 \wedge 53 = 1$  alors il existe  $k \in \mathbb{Z}$  tel que  $v - 4 = 71k$  (lemme de Gauss)

$$\text{Ainsi } S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} \subset \{ (u, 4 + 71k), (u, k) \in \mathbb{Z}^2 \}$$

$$\bullet \text{ Soit } (u, k) \in \mathbb{Z}^2,$$

$$(u, 4 + 71k) \text{ est une solution de } (E_2) \Leftrightarrow 71u - 53(4 + 71k) = 1$$

$$\Leftrightarrow 71u - 53(4 + 71k) = 71 \times 3 - 53 \times 4$$

$$\Leftrightarrow 71u - 53 \cdot 71k = 71 \times 3$$

$$\Leftrightarrow u - 53 \cdot k = 3$$

$$\Leftrightarrow u = 3 + 53k$$

Par la suite  $\{ (u, 4 + 71k), (u, k) \in \mathbb{Z}^2 \} \subset S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}}$  si et seulement si  $u = 3 + 53k$ .

$$\text{Conclusion : } S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{ (3 + 53k, 4 + 71k), k \in \mathbb{Z} \}$$

**Remarque :** On pourra appliquer le lemme de gauss deux fois : On exprime  $u$  et  $v$  en fonction de  $k$  et  $k'$  puis on vérifie que  $k=k'$ .

6) Soit  $x \in \mathbb{Z}$ ,

$$\bullet \begin{cases} x \equiv 34 \pmod{71} \\ x^{29} \equiv 2 \pmod{53} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \equiv 34 \pmod{71} \\ x \equiv 35 \pmod{53} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 34 + 71u, & u \in \mathbb{Z} \\ x = 35 + 53v, & v \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Alors  $71u - 53v = 1$ . Donc  $(u, v)$  est solution de l'équation  $(E_2)$ .

$$\text{Par la suite il existe } k \in \mathbb{Z} \text{ tel que } \begin{cases} u = 3 + 53k \\ v = 4 + 71k \end{cases}$$

$$\text{Ainsi } x = 34 + 71(3 + 53k) = 247 + 3763k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

réciroquement :

si  $x = 247 + 3763k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  alors

$$\bullet x = 71 \times 3 + 34 + 71x(53k) \equiv 34 \pmod{71}$$

$$\bullet x = 35 + 53 \times 4 + 53x(71k) \equiv 35 \pmod{53}. \text{ On sait que } 2^{29} \equiv 35 \pmod{53}.$$

Conclusion : l'ensemble des solutions du système est  $S_{\mathbb{Z}} = \{ 247 + 3763k, k \in \mathbb{Z} \}$ .

#### Exercice 4

1)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{e^x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{e^x}{x^2} - \frac{1}{x^2}} = +\infty.$$

$(C_f)$  admet au voisinage de  $+\infty$ , une branche parabolique de direction  $(O, \vec{j})$ .

2) a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{e^x - 1}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \sqrt{\frac{e^x - 1}{x}} = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$ .

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = +\infty \text{ donc } f \text{ n'est pas dérivable à droite en } 0.$$

La courbe  $(C_f)$  admet au point d'abscisse 0 une demi-tangente verticale.

b) Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$ .

En effet : la fonction dérivée de  $u : x \mapsto e^x - 1$  est la fonction  $u' : x \mapsto e^x$  et  $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ .

( $u$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et  $u(x) > 0, \forall x \in ]0, +\infty[$ )

c)

|       |   |           |
|-------|---|-----------|
| x     | 0 | $+\infty$ |
| f'(x) |   | +         |
| f     | 0 | $+\infty$ |

d)  $f(\ln(2)) = 1$  et la fonction  $f$  est strictement croissante sur  $[0, +\infty[$  :

$$x \in [0, \ln(2)] \Leftrightarrow f(x) \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{e^x - 1} \leq 1 \Leftrightarrow \sqrt{e^x - 1} \times \sqrt{e^x - 1} \leq 1 \times \sqrt{e^x - 1} \\ \Leftrightarrow e^x - 1 \leq \sqrt{e^x - 1}$$

(On sait que  $\sqrt{e^x - 1} \geq 0$  pour tout  $x \geq 0$ ).

3) On vérifie que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f''(x) = \frac{e^x(e^x - 2)}{4(\sqrt{e^x - 1})^3}$ .

|        |   |          |           |
|--------|---|----------|-----------|
| x      | 0 | $\ln(2)$ | $+\infty$ |
| f''(x) |   | 0        | +         |

$f''(x)$  s'annule en  $\ln(2)$  en changeant de signe donc le point  $B(\ln(2), 1)$  est un point d'inflexion de  $(C_f)$ .

4) a) D'après 2) d):  $x \in [0, \ln 2] \Leftrightarrow e^x - 1 \leq f(x)$ . b)

Par la suite :

- si  $x \in [0, \ln 2]$  alors  $(C_f)$  au-dessus de  $\Gamma$ .
- si  $x \in [\ln(2), +\infty[$  alors  $(C_f)$  au-dessous de  $\Gamma$ .

(Remarque :  $(C_f) \cap \Gamma = \{B\}$ )

5) a) La fonction  $g$  est dérivable sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ .

Pour tout  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ ,  $g'(x) = 1 + \tan^2(x) > 0$

donc  $g$  est strictement croissante sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ .

Ainsi  $g$  réalise une bijection de  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$  sur  $g\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[ \right)$ .

De la continuité  $g$  sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$  et des égalités  $g(0) = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} g(x) = +\infty$ .

On déduit que  $g\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[ \right) = [0, +\infty[$ .

b)  $g^{-1}(0) = 0$  et  $g^{-1}(1) = \frac{\pi}{4}$ . Car  $g(0) = 0$  et  $g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1$ .

c) Pour tout  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ ,  $g'(x) \neq 0$  alors  $g^{-1}$  est dérivable sur  $g\left(\left[0, \frac{\pi}{2}\right[ \right) = [0, +\infty[$ .

Soit  $x \in [0, +\infty[$  et  $y \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ ,  $(g^{-1}(x) = y) \Leftrightarrow (g(y) = x) \Leftrightarrow (1 + \tan^2(y) = x)$ , ainsi :

$$\text{pour tout } x \in [0, +\infty[, \quad (g^{-1})'(x) = \frac{1}{g'(g^{-1}(x))} = \frac{1}{g'(y)} = \frac{1}{1 + (\tan y)^2} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

$$\text{d) } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g^{-1}(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g^{-1}(x) - g^{-1}(0)}{x - 0} = (g^{-1})'(0) = 1.$$

6) a)  $f$  est continue sur  $[0, +\infty[$  donc  $F$  est la primitive de  $f$  sur  $[0, +\infty[$  qui s'annule en 0. ( $F(0) = 0$ )

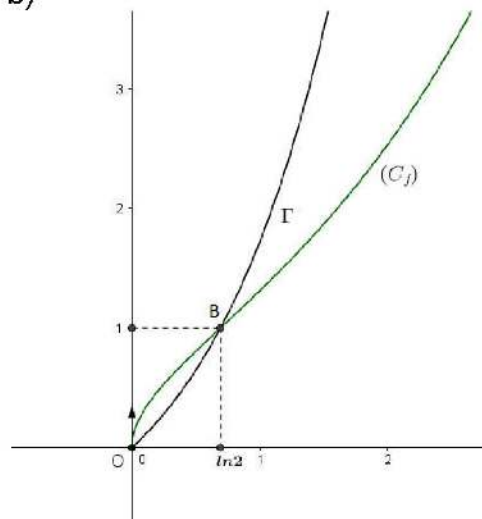
ainsi pour tout  $x \in [0, +\infty[$   $F'(x) = f(x)$ .

$$\bullet G(x) = 2 \left( f(x) - (g^{-1} \circ f)(x) \right).$$

$G$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,

$$G'(x) = 2 \left[ f'(x) - f'(x) \cdot (g^{-1})'(f(x)) \right] = 2f'(x) \left[ 1 - (g^{-1})'(f(x)) \right]$$

$$= 2f'(x) \left( 1 - \frac{1}{1 + (f(x))^2} \right) = 2f'(x) \left( 1 - \frac{1}{1 + e^x - 1} \right) = 2 \cdot \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} \left( \frac{e^x - 1}{e^x} \right) = \sqrt{e^x - 1} = f(x).$$



Donc  $F'(x) = G'(x)$  pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ .

b) Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $F'(x) = G'(x)$ ,

donc il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que ,pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $F(x) = G(x) + k$ .

Les fonctions  $F$  et  $G$  sont continues en 0 et  $F(0) = G(0)$  alors  $k = 0$ .

(En effet  $\lim_{x \rightarrow 0^+} F(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} G(x) + k$  c'est à dire  $F(0) = G(0) + k$ )

Conclusion: pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $F(x) = G(x)$ .

c) Pour tout  $x \in [0, \ln(2)]$ ,  $e^x - 1 \leq f(x)$ .

$$A = \int_0^{\ln(2)} (f(t) - (e^t - 1)) dt = G(\ln(2)) - [e^t - t]_0^{\ln(2)} = 2(1 - g^{-1}(1)) - (2 - \ln(2) - 1). \text{D'où } A = 1 + \ln 2 - \frac{\pi}{2}.$$

7)a) La fonction  $G_n$  est dérivable sur  $]\ln(n), +\infty[$  et pour tout  $x \in ]\ln(n), +\infty[$ ,

$$\begin{aligned} G'_n(x) &= 2 \left( (f_n)'(x) - \sqrt{n} \frac{(f_n)'(x)}{\sqrt{n}} \cdot (g^{-1})' \left( \frac{f_n(x)}{\sqrt{n}} \right) \right) = 2(f_n)'(x) \left( 1 - \sqrt{n} \frac{1}{1 + \left( \frac{f_n(x)}{\sqrt{n}} \right)^2} \right) \\ &= 2(f_n)'(x) \left( 1 - \frac{1}{1 + \frac{e^x - n}{n}} \right) = 2 \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - n}} \left( \frac{e^x - n}{e^x} \right) = \sqrt{e^x - n} = f_n(x). \end{aligned}$$

La fonction  $u : x \mapsto \int_{\ln(n)}^x f_n(t) dt$  est dérivable sur  $[\ln(n), +\infty[$  et  $u'(x) = f_n(x)$ .

( Voir l'explication en 6)a))

Donc pour tout  $x \in ]\ln(n), +\infty[$ ,  $G'_n(x) = u'(x)$ .

Alors il existe  $k \in \mathbb{R}$ , tel que pour tout  $x \in ]\ln(n), +\infty[$ ,  $G_n(x) = u(x) + k$ .

comme  $\lim_{x \rightarrow \ln n} G_n(x) = \lim_{x \rightarrow \ln n} [u(x) + k]$ , de plus  $G_n$  et  $u$  sont continues en  $\ln(n)$ ,

alors  $G_n(\ln n) = u(\ln n) + k$  et puisque  $G_n(\ln(n)) = u(\ln(n)) = 0$  on trouve  $k = 0$ .

Conclusion : Pour tout  $n \geq 2$  et pour tout  $x \in [\ln(n), +\infty[$ ,  $G_n(x) = \int_{\ln(n)}^x f_n(t) dt$ .

b) Soit  $n \geq 2$  ;  $n > 1$  alors  $-n < -1$  d'où  $e^x - n < e^x - 1$ .

Comme  $n \geq 2$  et  $x \geq \ln(n)$ ,  $e^x - n \geq 0$  et  $e^x - 1 \geq 0$ .

D'où pour tout  $n \geq 2$  et pour tout  $x \geq \ln(n)$ ,  $\sqrt{e^x - n} < \sqrt{e^x - 1}$ .

Or d'après 4)a),  $f(x) \leq e^x - 1$  pour tout  $x \in [\ln(n), +\infty[$ , car  $(\ln(n) \geq \ln(2))$ .

Donc  $f_n(x) \leq e^x - 1$ , pour tout  $n \geq 2$  et pour tout  $x \in [\ln(n), +\infty[$ .

$$\begin{aligned}
c) A_n &= \int_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} \left( (e^x - 1) - f_n(x) \right) dx = \left[ e^x - x \right]_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} - [G_n(x)]_{\ln(n)}^{\ln(n+1)} \\
&= (n+1 - \ln(n+1) - n + \ln(n)) - G_n(\ln(n+1)) \\
&= 1 + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - 2 \left( 1 - \sqrt{n} g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \right) = 2 \sqrt{n} g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) + \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - 1.
\end{aligned}$$

$$d) \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) = 0 \quad \text{car} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n}{n+1} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \ln(x) = 0$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{n} g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{g^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = 1 \quad \text{car} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g^{-1}(x)}{x} = 1 \quad \text{d'après 5)d).}$$

$$D'où \lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = 2 - 1 = 1.$$

Le sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6.  
Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie.

**Exercice 1 (3 points)**

Pour chacune des questions suivantes une seule des trois réponses proposées est exacte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

On représente une expérience aléatoire par l'arbre de probabilité ci-contre :

1) La probabilité de l'évènement  $\bar{B}$  sachant  $A$  est égale à :

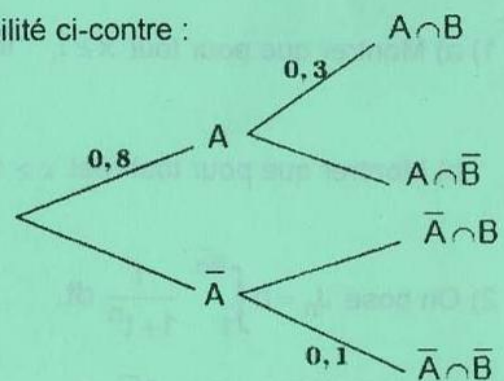
- a) 0,7                      b) 0,24                      c) 0,11

2) La probabilité de l'évènement  $\bar{A} \cap B$  est égale à :

- a) 0,11                      b) 0,18                      c) 0,92

3) La probabilité de l'évènement  $A$  sachant  $B$  est égale à :

- a)  $\frac{3}{7}$                       b)  $\frac{5}{7}$                       c)  $\frac{4}{7}$



**Exercice 2 (6 points)**

Le plan est orienté.

Dans la figure 1 de l'annexe 1 jointe,  $ABC$  est un triangle direct tel que  $(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$

et  $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB}) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$ . Les points  $I$ ,  $J$  et  $K$  sont les pieds des hauteurs du triangle  $ABC$  issues respectivement des sommets  $A$ ,  $B$  et  $C$ . Le point  $E$  est le milieu du segment  $[AC]$ .

1) Montrer que le triangle  $AIE$  est équilatéral direct.

2) Soit  $S$  la similitude directe de centre  $A$ , de rapport  $\sqrt{2}$  et d'angle  $-\frac{\pi}{4}$ .

On note  $\Delta$  est la médiatrice du segment  $[IE]$  et on pose  $f = S \circ S_{\Delta}$ .

a) Montrer que  $S(I) = B$ . En déduire que  $f(E) = B$ .

b) Montrer que  $f$  est une similitude indirecte de centre  $A$  et de rapport  $\sqrt{2}$ .

c) Caractériser  $f \circ f$ . En déduire que  $f(B) = C$ .

d) Montrer que l'image par  $f$  de la droite  $(BJ)$  est la droite  $(CK)$ . En déduire que  $f(J) = K$ .

3) Soit  $g$  la similitude indirecte telle que  $g(C) = A$  et  $g(K) = I$ .

a) En remarquant que le triangle  $BCK$  est rectangle, isocèle et direct, montrer que le point  $B$  est le centre de  $g$ .

b) On pose  $D = g(A)$ . Montrer que le point  $D$  appartient à la droite  $(BI)$ .

c) Justifier que  $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}\right) \equiv \frac{\pi}{6} [2\pi]$ . Construire alors le point  $D$ .

4) On pose  $\varphi = g \circ f$ .

a) Montrer que  $\varphi$  est une similitude directe. Déterminer  $\varphi(A)$  et  $\varphi(B)$ .

b) Montrer qu'une mesure de l'angle de  $\varphi$  est  $\frac{7\pi}{6}$ .

5) Soit  $\Omega$  le centre de  $\varphi$ .

a) Vérifier que  $D = \varphi \circ \varphi \circ \varphi(E)$ . En déduire que  $\left(\overrightarrow{\Omega E}, \overrightarrow{\Omega D}\right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

b) On pose  $F = \varphi \circ \varphi \circ \varphi(J)$ . Montrer les droites  $(FD)$  et  $(JE)$  sont perpendiculaires.

c) Vérifier que  $F = \varphi \circ \varphi(I)$ . En remarquant que  $IB = IE$ , montrer que  $FD = FA$ .

d) Construire le point  $F$ . En déduire une construction du point  $\Omega$ .

### Exercice 3 (4 points)

Soit dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $z^2 - \left(\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)z + 1 = 0$ .

1) a) Justifier que l'équation (E) possède deux solutions distinctes. (On ne demande pas de déterminer ces solutions).

b) Déterminer  $z_1 + z_2$ . En déduire que les solutions de l'équation (E) ne sont pas conjuguées.

On désigne par  $z_1$  la solution telle que  $|z_1| > 1$  et  $z_2$  l'autre solution.

On considère, dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , les points  $A, B, I$  et  $J$  d'abscisses respectives  $z_1, z_2, 1$  et  $-1$ .

2) a) Soit  $C$  le milieu du segment  $[AB]$ . Montrer que l'abscisse du point  $C$  est  $z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$ .

b) En utilisant  $(z_2 - z_1)^2 = (z_2 + z_1)^2 - 4z_1z_2$ , montrer que  $(z_2 - z_1)^2 = 4(z_C^2 - 1)$ .

c) Montrer que  $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CI}\right) + \left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CJ}\right) \equiv 0 [2\pi]$ .

En déduire que la droite  $(AB)$  porte la bissectrice intérieure de l'angle  $\hat{ICJ}$ .

3) Soit  $(C)$  le cercle circonscrit au triangle  $IAJ$ . On note  $K$  le centre de  $(C)$  et  $z_K$  l'affixe du point  $K$ .

a) Prouver que  $K$  est un point de l'axe  $(O, \vec{v})$ . On pose  $z_K = iy$ , où  $y$  est un réel non nul.

b) Soit  $M$  un point du plan d'affixe  $z$ . Justifier que  $(M \in (C))$  équivaut à  $(|z - iy|^2 = |1 - iy|^2)$ .

En déduire que  $(M \in (C))$  équivaut à  $(z\bar{z} + iy(z - \bar{z}) = 1)$ .

c) En remarquant que  $z_1 = \frac{1}{z_2}$ , montrer que le point  $B$  appartient au cercle  $(C)$ .

4) a) Construire le point  $C$  dans le repère  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

b) Construire la droite  $(AB)$  et la médiatrice du segment  $[AB]$ .

c) Déduire une construction des points  $A$  et  $B$ , images des solutions de l'équation  $(E)$ .

#### Exercice 4 (7 points)

Soit  $f$  la fonction définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right)$ .

On désigne par  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

A) 1) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ . Interpréter graphiquement.

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et montrer que  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ . Interpréter graphiquement.

2) a) Montrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{x+2}{x(x+1)}$ .

b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

c) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]0, +\infty[$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.

3) a) Résoudre dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $x^2 = x + 1$ .

b) On note  $\alpha$  la solution positive. Vérifier que la deuxième solution est égale à  $-\frac{1}{\alpha}$ .

c) Montrer que la courbe  $(C_f)$  coupe l'axe des abscisses au point  $A$  d'abscisse  $\alpha$ .

d) Montrer qu'une équation de la tangente  $T$  à  $(C_f)$  au point  $A$  est  $y = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3}\right)(x - \alpha)$ .

e) Vérifier que la tangente  $T$  passe par le point  $B\left(0, -1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)$ .

4) Dans la figure 2 de l'annexe 2 jointe, on a tracé dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , la droite D d'équation

$$y = x + 2 \text{ et la courbe } \Gamma \text{ de la fonction } x \mapsto x^2 + 1.$$

a) Construire les points A et B.

b) Construire la tangente T et tracer la courbe  $(C_f)$ .

B) Soit  $n$  un entier naturel non nul.

On pose pour tout  $x \geq 1$ ,  $G_n(x) = \int_1^x f(t^n) dt$ .

1) a) Montrer que pour tout  $x \geq 1$ ,  $\ln\left(\frac{1}{2}\right)(x-1) \leq G_n(x) \leq f(x^n)(x-1)$ .

b) Montrer que pour tout réel  $x \geq 1$ ,  $G_n(x) = x f(x^n) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - n(x-1) - \int_1^x \frac{n}{1+t^n} dt$ .

2) On pose  $J_n = n \int_1^{\sqrt[n]{a}} \frac{1}{1+t^n} dt$ .

a) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{a} = 1$ .

b) En utilisant B)1)a), montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(\sqrt[n]{a}) = 0$ .

c) Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{a} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln(a)$ .

d) Déterminer alors  $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$ .

Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....  
Nom et Prénom : .....  
Date et lieu de naissance : .....

Signatures des surveillants



Épreuve : Mathématiques

Section : Mathématiques

Annexe 1 à rendre avec la copie

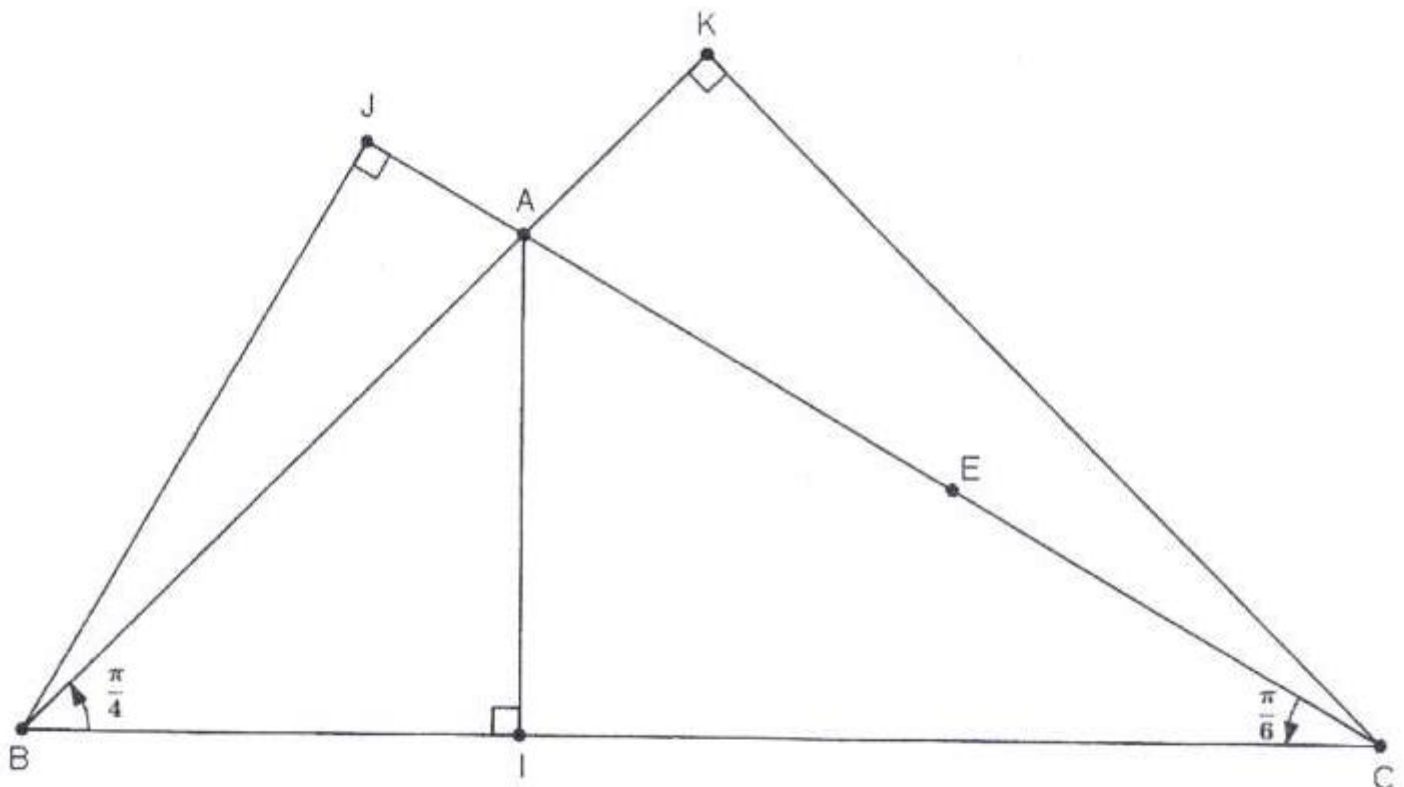


Figure 1

NE RIEN ECRIRE ICI

Épreuve : Mathématiques

Section : Mathématiques

Annexe 2 à rendre avec la copie

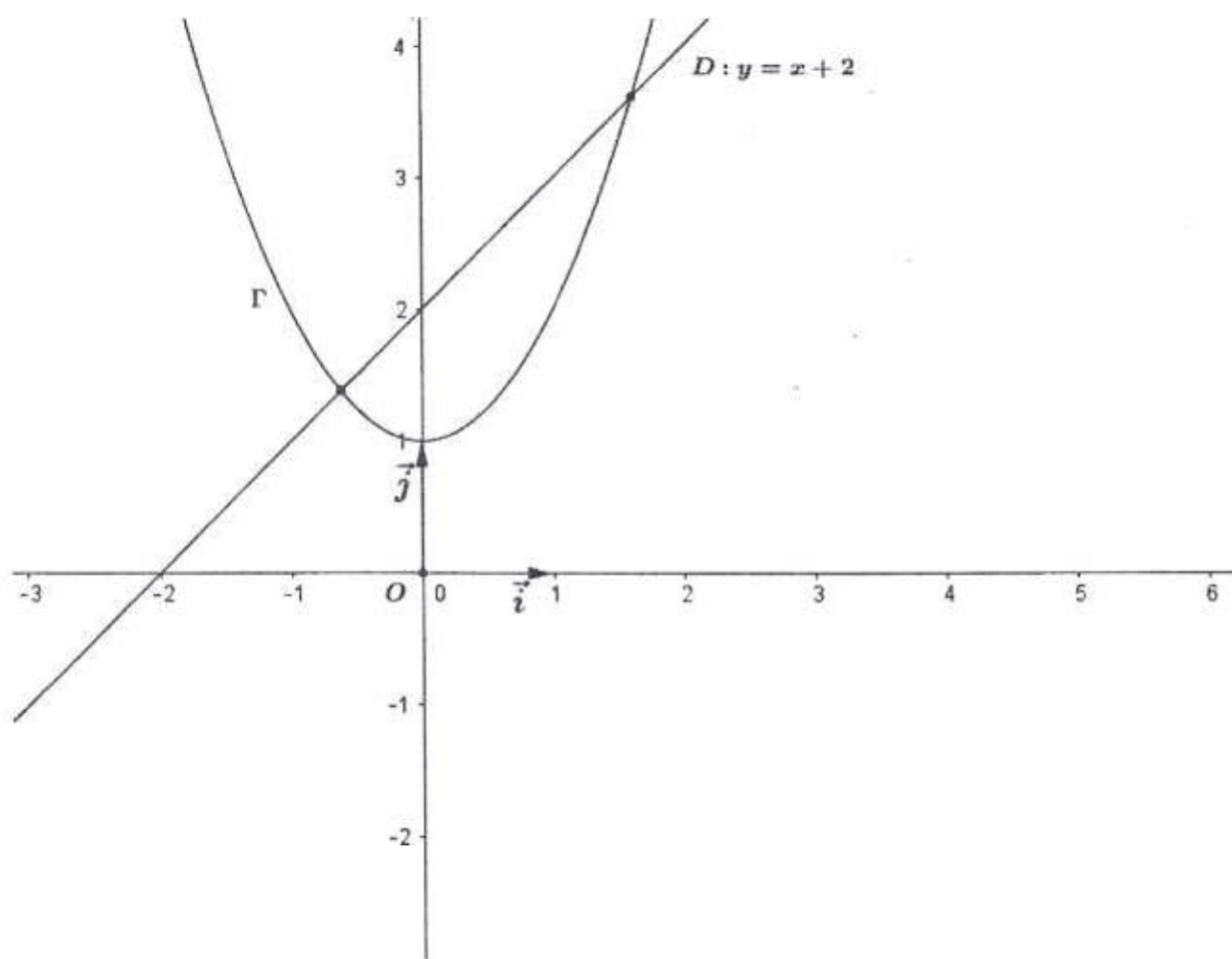


Figure 2

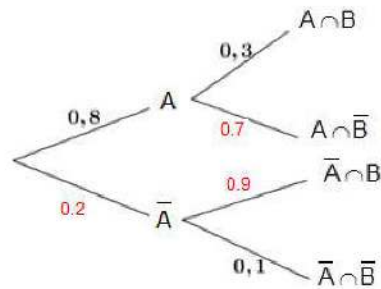
**Exercice 1**

Il suffit de compléter l'arbre de probabilité :

1) a) 0.7

2) b)  $0.18 = 0.2 \times 0.9$

3) c) 
$$\frac{p(A \cap B)}{P(B)} = \frac{0.8 \times 0.3}{0.8 \times 0.3 + 0.2 \times 0.9} = \frac{24}{42} = \frac{4}{7}.$$



**Exercice 2**

Le triangle AIC est rectangle en I et  $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$  car  $(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ , puisque  $I \in [CB]$ .

De plus  $[IE]$  est une médiane dans ce triangle donc  $IE = AE$  donc AIE est équilatéral.

AIE est direct car  $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AE}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$ .

2) a) ABI est un triangle rectangle en I, isocèle et direct donc

$AB = \sqrt{2} AI$  et  $(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}) \equiv -\frac{\pi}{4}[2\pi]$  par la suite  $S(I) = B$ .

•  $S_{\Delta}(E) = I$  alors  $f(E) = S \circ S_{\Delta}(E) = S(I) = B$ .

b) f est la composée d'une similitude directe S de centre A et de rapport  $\sqrt{2}$  et d'une similitude indirecte  $S_{\Delta}$  de rapport 1 et comme  $A \in \Delta$  alors  $f(A) = S \circ S_{\Delta}(A) = A$  ( $f(A) = A$ ) par la suite f est une similitude indirecte de centre A et de rapport  $\sqrt{2} \times 1 = \sqrt{2}$ .

c)  $f \circ f$  est une homothétie de centre A et de rapport :  $\sqrt{2}^2 = 2$ .

\*  $\overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AE}$  donc  $f \circ f(E) = C$ .

\*  $f \circ f(E) = C$  d'où  $f(f(E)) = C$  or  $f(E) = B$  alors  $f(B) = C$ .

d) \*  $(BJ) \perp (AE)$  et  $f(B) = C$  donc :

$f(BJ)$  est la droite passant par C et perpendiculaire à la droite  $f(AE) = (AB)$ . D'où  $f(BJ) = (CK)$ .

\*  $J \in (BJ) \cap (AC)$  donc  $f(J) \in f(BJ) \cap f(AC) = (CK) \cap (AB) = \{K\}$ . Ainsi  $f(J) = K$ . ( $f(AC) = f(AE)$ ).

3) a) On a  $g(C) = A$  et  $g(K) = I$ . On note  $B' = g(B)$ .

le triangle KBC est rectangle en K, isocèle et direct donc son image  $IB'A$  par g est un triangle rectangle en I, isocèle et indirect. Or le triangle IBA est rectangle en I, isocèle et indirect. D'où  $B = B'$  et par la suite B est le centre de g.

b)  $g(B) = B$  et  $g(K) = I$  et A appartient à la droite (BK) donc  $D = g(A)$  est un point de la droite (BI).

c)  $g(C) = A$ ,  $g(B) = B$  et  $g(A) = D$ ; g est une similitude indirecte d'où

$$(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv -(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})[2\pi] \equiv (\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CB})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi].$$

On construit un point T tel que  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AT}) \equiv \frac{\pi}{6}[2\pi]$ .

Le point D est l'intersection de la droite (BI) avec la demi-droite  $[AT)$ .

4) a)  $\varphi$  est la composée de deux similitudes indirectes donc c'est une similitude directe.

•  $\varphi(A) = g \circ f(A) = g(A) = D$  et  $\varphi(B) = g \circ f(B) = g(C) = A$ .

b)  $\varphi(A) = D$  et  $\varphi(B) = A$ . Soit  $\theta$  une mesure de l'angle de  $\varphi$ .

$$\theta \equiv \left( \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{DA} \right) [2\pi] \equiv \pi + \left( \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD} \right) [2\pi] \equiv \frac{7\pi}{6} [2\pi].$$

5) •  $\varphi(E) = g \circ f(E) = g(B) = A$ ,  $\varphi(B) = A$  et  $\varphi(A) = D$ . Donc  $\varphi \circ \varphi \circ \varphi(E) = D$ .

•  $\varphi \circ \varphi \circ \varphi$  est la composée de 3 similitudes directes de même centre  $\Omega$  et de même angle  $\frac{7\pi}{6}$  donc c'est une similitude directe de centre  $\Omega$  et d'angle  $3 \times \frac{7\pi}{6} \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

•  $\varphi \circ \varphi \circ \varphi(E) = D$  donc  $\left( \overrightarrow{\Omega E}, \overrightarrow{\Omega D} \right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ .

b)  $\varphi \circ \varphi \circ \varphi(E) = D$  et  $\varphi \circ \varphi \circ \varphi(J) = F$  donc  $\left( \overrightarrow{EJ}, \overrightarrow{DF} \right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$ , donc  $(EJ) \perp (DF)$ .

c) •  $F = \varphi \circ \varphi \circ \varphi(J)$  et  $\varphi(J) = g \circ f(J) = g(K) = I$  d'où  $F = \varphi \circ \varphi(I)$

$$\begin{cases} \varphi \circ \varphi(I) = F \\ \varphi \circ \varphi(E) = A \text{ et comme } IB = IE \text{ alors } FD = FA. \\ \varphi \circ \varphi(B) = D \end{cases}$$

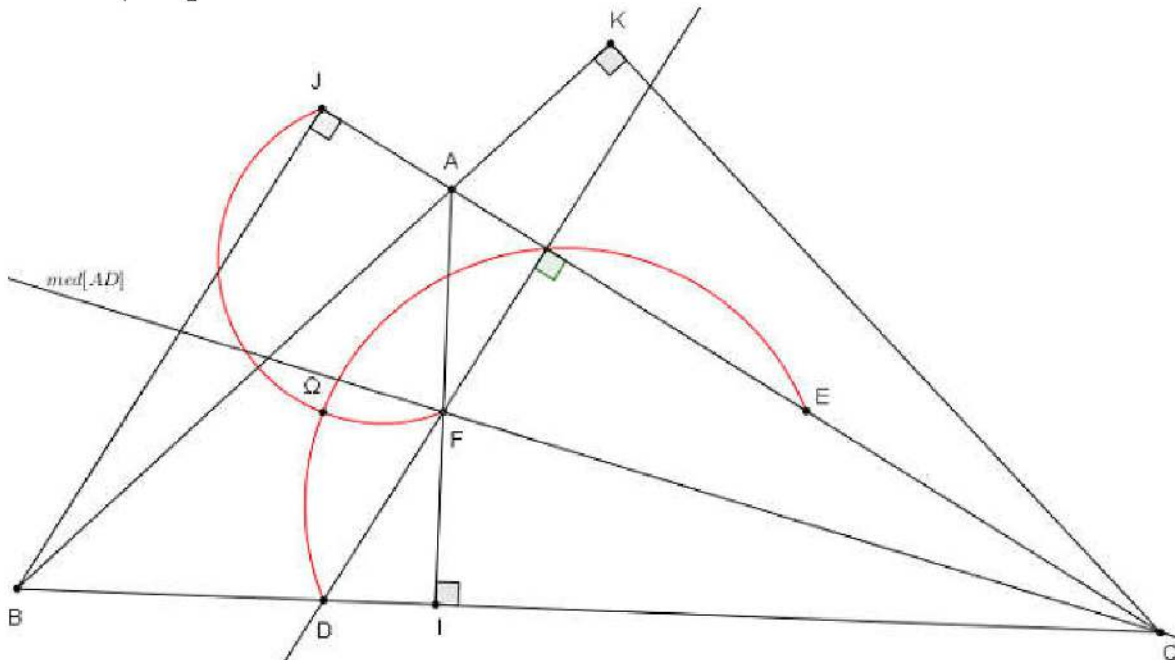
d) • Pour la construction du point  $D$  :

On utilise le fait que  $FD = FA$  c'est à dire  $F \in \text{med}[AD]$  et que  $(FD) \perp (JE)$ .

•  $\left( \overrightarrow{\Omega E}, \overrightarrow{\Omega D} \right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$  donc  $\Omega$  est un point du demi-cercle  $\Gamma_1$  de diamètre  $[ED]$ . Voir figure

$\left( \overrightarrow{\Omega J}, \overrightarrow{\Omega F} \right) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$  donc  $\Omega$  est un point du demi-cercle  $\Gamma_2$  de diamètre  $[JF]$ . Voir figure

•  $\Omega \in \Gamma_1 \cap \Gamma_2$ .



### Exercice 3

1) a) Il suffit de vérifier que le discriminant de l'équation (E) est non nul.

b)  $z_1 + z_2 = \frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \notin \mathbb{R}$  donc  $z_1$  et  $z_2$  ne sont pas conjugués.

$$2) a) z_C = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}$$

b)  $(z_2 - z_1)^2 = (z_2 + z_1)^2 - 4z_1z_2 = (2z_C)^2 - 4 = 4(z_C^2 - 1)$ . Car  $z_2 + z_1 = 2z_C$  et  $z_1z_2 = 1$ .

$$\begin{aligned} c) \left( \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CI} \right) + \left( \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CJ} \right) &\equiv \arg \left( \frac{1 - z_C}{z_2 - z_1} \right) + \arg \left( \frac{-1 - z_C}{z_2 - z_1} \right) [2\pi] \equiv \arg \left( \frac{1 - z_C}{z_2 - z_1} \cdot \frac{-1 - z_C}{z_2 - z_1} \right) [2\pi] \\ &\equiv \arg \left( \frac{z_C^2 - 1}{(z_2 - z_1)^2} \right) [2\pi] \equiv \arg \left( \frac{1}{4} \right) [2\pi] \equiv 0 [2\pi] \end{aligned}$$

d'où la droite (AB) porte la bissectrice intérieure de l'angle  $\widehat{ICJ}$ .

3) a) K est le centre d'un cercle passant par I et J donc K appartient à la médiatrice du segment [IJ].

La médiatrice du segment [IJ] est l'axe des ordonnées.

$$b) \bullet (M \in (C)) \Leftrightarrow KM = KI \Leftrightarrow |z - iy| = |1 - iy| \Leftrightarrow (|z - iy|^2 = |1 - iy|^2)$$

$$\Leftrightarrow (z - iy)(\bar{z} + iy) = (1 - iy)(1 + iy)$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} + iy(z - \bar{z}) + y^2 = 1 + y^2$$

$$\Leftrightarrow z\bar{z} + iy(z - \bar{z}) = 1.$$

$$c) A \in (C) \Leftrightarrow z_1\bar{z}_1 + iy(z_1 - \bar{z}_1) = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{z_2} \frac{1}{z_2} + iy \left( \frac{1}{z_2} - \frac{1}{z_2} \right) = 1$$

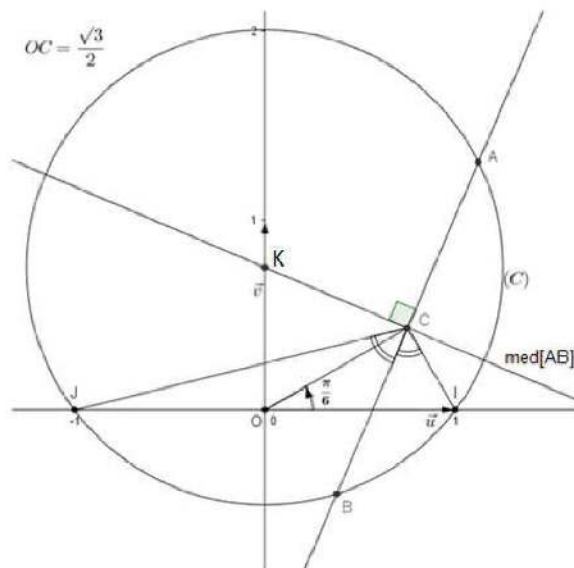
$$\Leftrightarrow \frac{1}{z_2 \cdot z_2} (1 + iy(\bar{z}_2 - z_2)) = 1 \Leftrightarrow z_2\bar{z}_2 + iy(z_2 - \bar{z}_2) = 1 \Leftrightarrow B \in (C).$$

$$4) a) z_C = \frac{\sqrt{3}}{2} e^{i\frac{\pi}{6}}, \text{ Voir figure.}$$

b) La droite (AB) porte la bissectrice intérieure de l'angle  $\widehat{ICJ}$ .

La médiatrice du segment [AB] est la perpendiculaire en C à la droite (AB).

c) Les points A et B sont les points d'intersection du cercle (C) avec la droite (AB). ( $OA > OB$  car  $|z_1| > 1$ .)



#### Exercice 4

A) 1) a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x+1} = 0$  et  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x) = -\infty$  donc  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty$ .

La droite d'équation  $x = 0$  est une asymptote verticale à  $(C_f)$

b) •  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$ .

•  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \frac{\ln(x)}{x} - \frac{\ln(x+1)}{x}$ . (pour  $x > 0$ ,  $f(x) = \ln(x^2) - \ln(x+1) = 2\ln x - \ln(x+1)$ )

\*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$ ,

\*  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} \cdot \frac{x+1}{x}$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x+1)}{x+1} = 0$  car  $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

d'où  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$ .

La courbe  $(C_f)$  admet au voisinage de  $+\infty$  une branche parabolique de direction celle de  $(0, \vec{i})$ .

2) a) Pour tout  $x > 0$ ,

$$f(x) = \ln\left(\frac{x^2}{x+1}\right) = 2\ln x - \ln(x+1).$$

$$\text{D'où } f'(x) = \frac{2}{x} - \frac{1}{x+1} = \frac{x+2}{x(x+1)}.$$

b) Tableau de variation

|       |                    |           |
|-------|--------------------|-----------|
| x     | 0                  | +         |
| f'(x) | $\frac{\infty}{0}$ | +         |
| f     | $-\infty$          | $+\infty$ |

c) La fonction  $f$  est strictement croissante sur  $]0, +\infty[$  donc  $f$  est une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $f(]0, +\infty[)$ .

De la continuité de  $f$  sur  $]0, +\infty[$  et des égalités  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f = -\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$  on déduit que  $f(]0, +\infty[) = \mathbb{R}$ .

3) a) On trouve  $x' = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  et  $x'' = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ .

b)  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  d'où  $-\frac{1}{\alpha} = -\frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{1-\sqrt{5}}{2} = x''$ .

Soit  $M(x, y)$  un point du plan.

$$M \in (C_f) \cap (O, \vec{i}) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ y = f(x) \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ \frac{x^2}{x+1} = 1 \\ y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0, \\ x^2 = x+1, \\ y = 0 \end{cases}$$

Donc la courbe  $(C_f)$  coupe l'axe des abscisses en un seul point  $A$  d'abscisse  $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ .

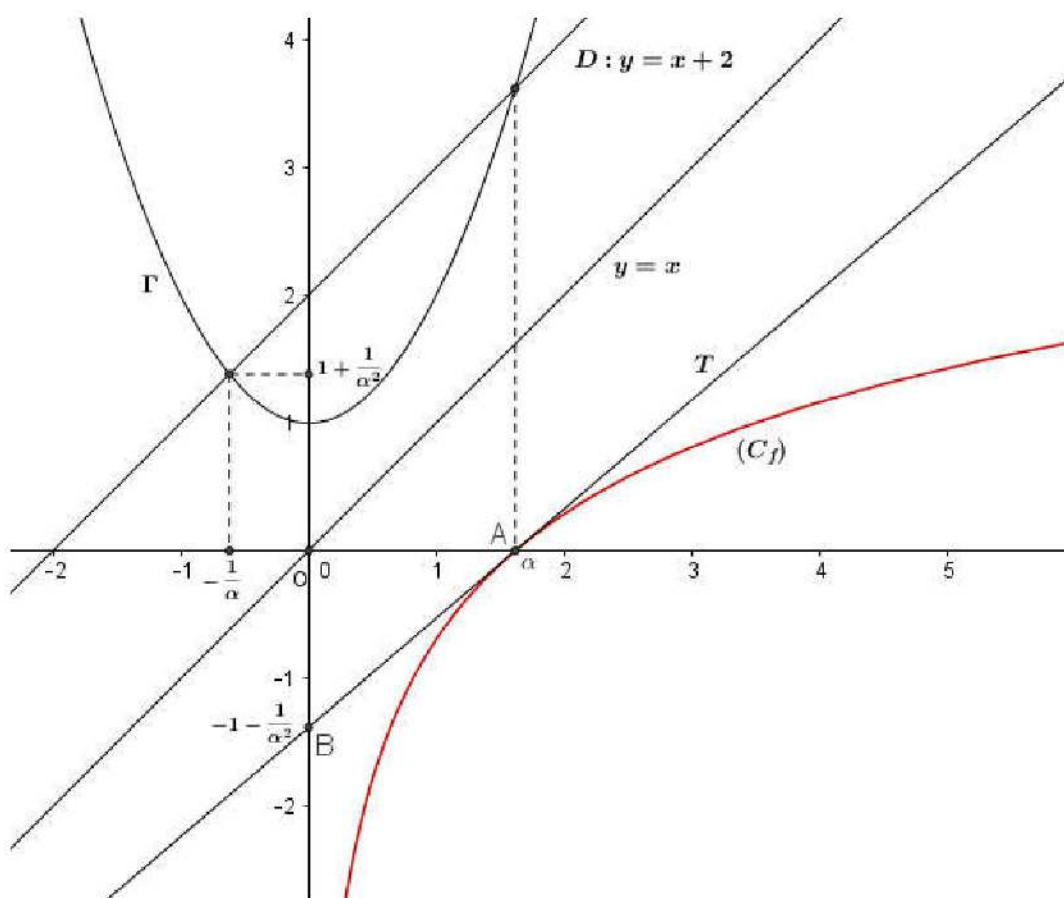
d)  $T: y = f'(\alpha)(x - \alpha) + f(\alpha).$

$f(\alpha) = 0$  et  $f'(\alpha) = \frac{\alpha+2}{\alpha(\alpha+1)} = \frac{\alpha^2+1}{\alpha^3}$  puisque  $\alpha^2 = \alpha+1$ , d'où  $f'(\alpha) = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3}.$

Par la suite  $T: y = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3}\right)(x - \alpha).$

e)  $B\left(0, -1 - \frac{1}{\alpha^2}\right)$  et  $\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^3}\right)(0 - \alpha) = -1 - \frac{1}{\alpha^2}$  alors  $B \in (T).$

4) a) et b)



B) 1) a) Soit  $x \geq 1$  et  $t \in [1, x]$ ,

\*  $1 \leq t \leq x$  et  $n \geq 1$  alors  $1 \leq t^n \leq x^n$  or  $f$  est strictement croissante sur  $[1, +\infty[$

donc  $f(1) \leq f(t^n) \leq f(x^n)$  d'où  $\int_1^x \ln\left(\frac{1}{2}\right) dt \leq \int_1^x f(t^n) dt \leq \int_1^x f(x^n) dt.$

Donc pour tout  $x \geq 1$ ,  $\ln\left(\frac{1}{2}\right)(x-1) \leq G_n(x) \leq f(x^n)(x-1).$

b)  $G_n(x) = \int_1^x f(t^n) dt$ . On intègre par parties:

$$\text{Posons } \begin{cases} u(t) = f(t^n) \\ v'(t) = 1 \end{cases}, \begin{cases} u'(t) = n t^{n-1} \frac{t^n + 2}{t^n (t^n + 1)} = \frac{n}{t} \frac{t^n + 2}{t^n + 1} \\ v(t) = t \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \text{Donc } G_n(x) &= \left[ t f(t^n) \right]_1^x - n \int_1^x \frac{t^n + 2}{t^n + 1} dt = x f(x^n) - f(1) - n \int_1^x \left( 1 + \frac{1}{t^n + 1} \right) dt \\ &= x f(x^n) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - n(x-1) - \int_1^x \frac{n}{t^n + 1} dt. \end{aligned}$$

Autrement : vérifier l'égalité de deux fonctions (ont la même dérivée et coïncident en 1).

2) a)  $\alpha > 1$  donc  $\sqrt[n]{\alpha} > 1$

$$\text{D'après B)1)a) : } \ln\left(\frac{1}{2}\right)(\sqrt[n]{\alpha} - 1) \leq G_n(\sqrt[n]{\alpha}) \leq f\left((\sqrt[n]{\alpha})^n\right)(\sqrt[n]{\alpha} - 1).$$

$$\text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha} = 1 ; (\sqrt[n]{\alpha} = \alpha^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n} \ln \alpha}) \text{ et } f\left((\sqrt[n]{\alpha})^n\right) = f(\alpha) = 0$$

$$\text{D'après le théorème de comparaison des limites } \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(\sqrt[n]{\alpha}) = 0.$$

$$\text{c) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{\alpha} - 1}{\frac{1}{n}} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{n} \ln(\alpha)} - 1}{\frac{1}{n} \ln(\alpha)} \cdot \ln(\alpha). \text{ Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln(\alpha) = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

$$\text{Par la suite } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{\alpha} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln(\alpha).$$

$$\text{d) } J_n = -G_n(\sqrt[n]{\alpha}) + \sqrt[n]{\alpha} f\left((\sqrt[n]{\alpha})^n\right) - \ln\left(\frac{1}{2}\right) - n(\sqrt[n]{\alpha} - 1).$$

$$* \lim_{n \rightarrow +\infty} G_n(\sqrt[n]{\alpha}) = 0.$$

$$* \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha} f\left((\sqrt[n]{\alpha})^n\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{\alpha} f(\alpha) = 1 \times 0 = 0$$

$$* \lim_{n \rightarrow +\infty} n(\sqrt[n]{\alpha} - 1) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt[n]{\alpha} - 1}{\frac{1}{n}} = \ln(\alpha).$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = -\ln\left(\frac{1}{2}\right) - \ln(\alpha) = \ln\left(\frac{2}{\alpha}\right).$$

|                                                                                      |                                |                 |
|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|-----------------|
| RÉPUBLIQUE TUNISIENNE<br>MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION<br>*****<br>EXAMEN DU BACCALAURÉAT | Épreuve : <b>MATHÉMATIQUES</b> |                 |
|                                                                                      | Section : <b>Mathématiques</b> |                 |
|                                                                                      | Durée : 4 h                    | Coefficient : 4 |
| SESSION <b>2016</b>                                                                  | Session principale             |                 |

**Le sujet comporte cinq pages numérotées de 1/5 à 5/5  
La page 5/5 est à rendre avec la copie.**

### **Exercice 1 (5 points)**

Le plan est orienté.

Dans la figure 1 de l'annexe jointe, ABC est un triangle direct, rectangle en A et tel que  $AB < AC$ .  
La médiatrice du segment [BC] coupe les droites (AB), (AC) et (BC) respectivement en E, F et G.

1) Soit  $f$  la similitude directe de centre A et telle que  $f(B) = F$ .

- Déterminer l'angle de  $f$ .
- Montrer que l'image de la droite (BC) par  $f$  est la droite (GF).
- Déterminer  $f(C)$ .

2) Le cercle  $\mathcal{C}_1$  de diamètre [BC] et le cercle  $\mathcal{C}_2$  de diamètre [EF] se coupent en A et H.

- Montrer que  $f(\mathcal{C}_1) = \mathcal{C}_2$ .
- Soit  $I = f(H)$ . Construire le point I.
- Montrer que le quadrilatère HEIF est un rectangle.
- La droite (FI) coupe la droite (AE) en un point J. Montrer que  $f(F) = J$ .

3) Soit  $g$  la similitude indirecte de centre A et telle que  $g(B) = F$ .

- Montrer que  $g = S_{(AC)} \circ f$ .
- Soit  $E' = f(E)$ . Montrer que  $E'$  est un point de la droite (AC).
- Soit  $F' = g(F)$  et  $H' = g(H)$ . Construire l'image par  $g$  du rectangle FHEI.

### Exercice 2 (3 points)

On considère dans l'ensemble  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $z^2 - (1+2i)mz - (1-i)m^2 = 0$ , où  $m$  est un nombre complexe non nul, d'argument  $\theta \in ]0, \pi[$ .

1) a) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E).

On note  $z_1$  et  $z_2$  les solutions de l'équation (E).

b) Montrer que  $(z_1 z_2 \text{ est un réel strictement positif})$  si et seulement si  $\left(\theta = \frac{5\pi}{8}\right)$ .

Dans la suite de l'exercice on prend  $\theta = \frac{5\pi}{8}$ .

2) Vérifier que  $z_1 z_2 = |m|^2 \sqrt{2}$ .

3) Soit  $t$  un réel strictement positif et  $m = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt[4]{2}} e^{i\frac{5\pi}{8}}$ . On se propose de construire les points  $M_1$  et  $M_2$ ,

images des solutions  $z_1$  et  $z_2$  de l'équation (E), correspondant au nombre complexe  $m$ .

Dans la figure 2 de l'annexe jointe,  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  est un repère orthonormé direct ;

B et C sont les points d'affixes respectives  $-\frac{\sqrt{2}}{2}$  et  $t$  ;

E est le point d'intersection du demi-cercle  $\mathcal{C}$  de diamètre  $[BC]$  avec l'axe  $(O, \vec{v})$ .

a) Montrer que  $OE^2 = OB \cdot OC$ .

b) En déduire que  $|m| = OE$ .

4) a) Construire le point A d'affixe  $m$ .

b) En déduire une construction des points  $M_1$  et  $M_2$  images des solutions  $z_1$  et  $z_2$  de l'équation (E).

(On convient que  $|z_1| < |z_2|$ ).

### Exercice 3 (4 points)

1) Soit  $a$  un entier tel que  $a \equiv 1 \pmod{2^4}$  et  $a \equiv 1 \pmod{5^4}$ . Montrer que  $a \equiv 1 \pmod{10^4}$ .

2) Soit  $b = (9217)^4$ . Montrer que  $b \equiv 1 \pmod{5}$  et  $b \equiv 1 \pmod{2^4}$ .

3) Pour tout entier naturel  $n$ , on pose  $b_n = b^{5^n} - 1$ .

a) Montrer que pour tout entier naturel  $n$ ,  $b_{n+1} = (b_n + 1)^5 - 1$ .

b) En déduire que pour tout entier naturel  $n$ ,  $b_{n+1} = b_n^5 + 5b_n^4 + 10b_n^3 + 10b_n^2 + 5b_n$ .

4) a) Montrer que si  $5^{n+1}$  divise  $b_n$  alors  $5^{n+2}$  divise  $b_n^5$ .

b) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel  $n$ ,  $b_n \equiv 0 \pmod{5^{n+1}}$ .

5) a) Montrer que  $(9217)^{500} \equiv 1 \pmod{625}$ .

b) Montrer que  $(9217)^{500} \equiv 1 \pmod{10000}$ .

c) Trouver un entier dont le cube est congru à 9217 modulo 10000.

**Exercice 4 (8 points)**

A) On considère la fonction  $f$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $f(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$ .

On note  $(C_f)$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) a) Calculer  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$ . Interpréter graphiquement.

b) Calculer  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ . Interpréter graphiquement.

2) a) Montrer que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $f'(x) = \frac{(\sqrt{x}-1)e^{\sqrt{x}}}{2x\sqrt{x}}$ .

b) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

c) Tracer la courbe  $(C_f)$ .

3) Soit  $\lambda$  un réel de  $]0, 1[$ . On désigne par  $S_\lambda$  l'aire de la partie du plan limitée par  $(C_f)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = \lambda$  et  $x = 1$ .

Calculer  $S_\lambda$  en fonction de  $\lambda$  et déterminer  $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} S_\lambda$ .

B) 1) Soit  $g_1$  et  $g_2$  les restrictions de  $f$  respectivement à chacun des intervalles  $]0, 1]$  et  $[1, +\infty[$ .

Montrer que  $g_1$  réalise une bijection de  $]0, 1]$  sur un intervalle  $I$  que l'on déterminera et que  $g_2$  réalise une bijection de  $[1, +\infty[$  sur l'intervalle  $I$ .

2) Soit  $n$  un entier naturel non nul.

a) Montrer que l'équation  $f(x) = e + \frac{1}{n}$  admet dans  $]0, +\infty[$  exactement deux solutions notées

$\alpha_n$  et  $\beta_n$  telles que  $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$ .

On définit ainsi, pour tout entier naturel non nul  $n$ , deux suites réelles  $(\alpha_n)$  et  $(\beta_n)$ .

b) Montrer que les suites  $(\alpha_n)$  et  $(\beta_n)$  sont convergentes et déterminer leur limite.

3) On considère la fonction  $h$  définie sur  $[0, +\infty[$  par  $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \left( f(x) - \left( e + \frac{1}{n} \right) \right) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$

On note  $(C_h)$  sa courbe représentative dans le repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

a) Montrer que  $h$  est continue à droite en 0.

b) Déterminer le signe de  $h(x)$  pour tout  $x \in [0, +\infty[$ .

4) Soit  $H$  la primitive de  $h$  sur  $[0, +\infty[$  qui s'annule en 0.

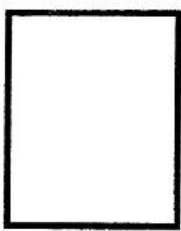
a) Justifier que les fonctions  $u : x \mapsto \int_0^x e^{\sqrt{t}} dt$  et  $v : x \mapsto 2 + 2(\sqrt{x} - 1) e^{\sqrt{x}}$  sont continues sur  $[0, +\infty[$  et dérivables sur  $]0, +\infty[$ .

b) Montrer que pour tout  $x \geq 0$ ,  $u(x) = v(x)$ .

c) Donner l'expression de  $H(x)$  pour tout  $x \in [0, +\infty[$ .

5) Soit  $\mathcal{A}_n$  l'aire de la partie du plan limitée par  $(C_n)$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations

$x = 0$  et  $x = \beta_n$ . Montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{A}_n = 2 - \frac{2}{3}e$ .



Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....

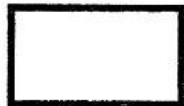
Nom et prénom : .....

Date et lieu de naissance : .....

Signatures des  
surveillants

.....

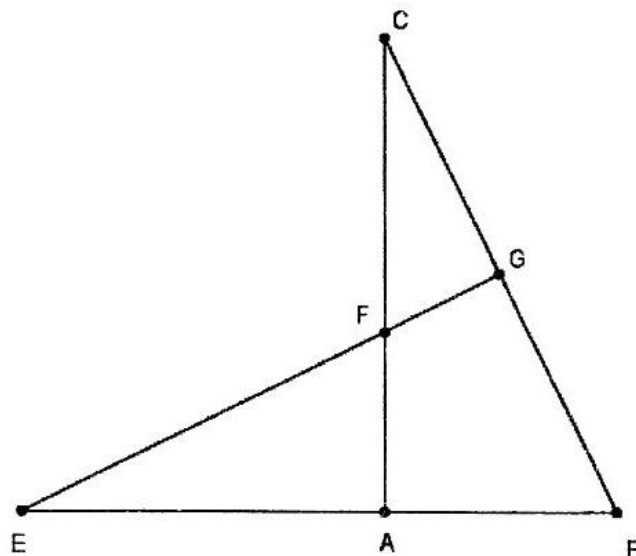
.....



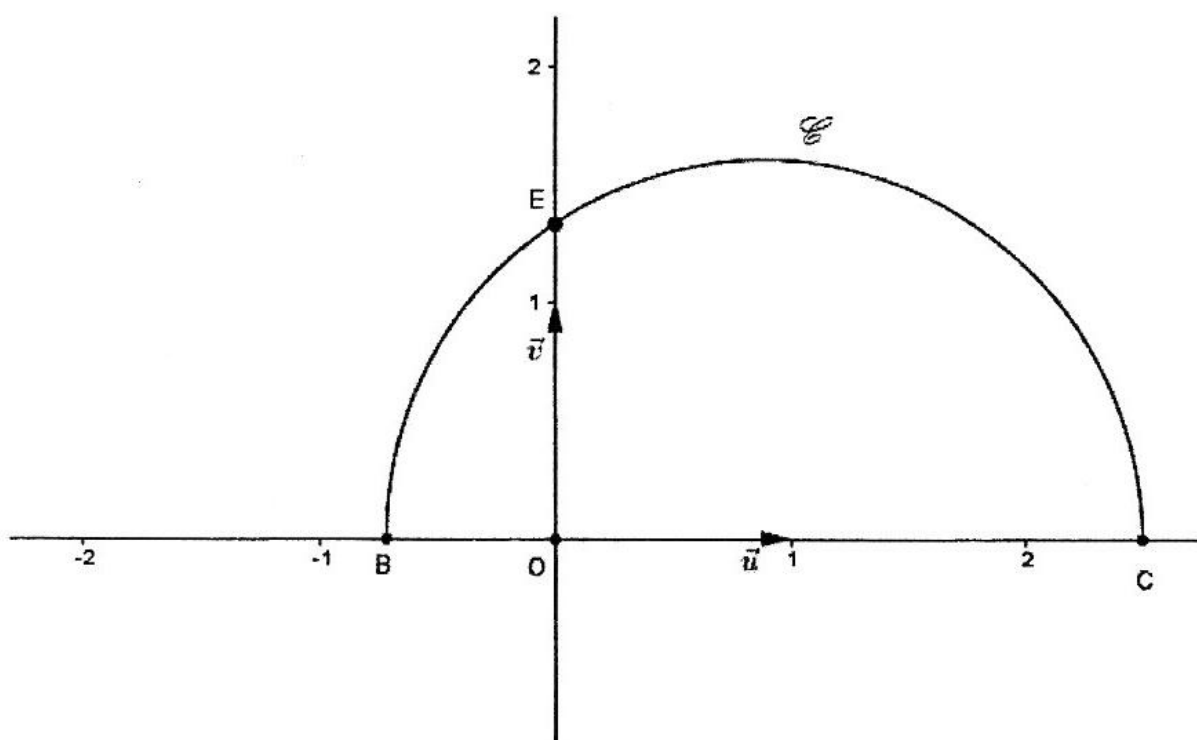
Épreuve : Mathématiques (Section : Mathématiques) Session principale

**Annexe (à rendre avec la copie)**

**Figure 1**

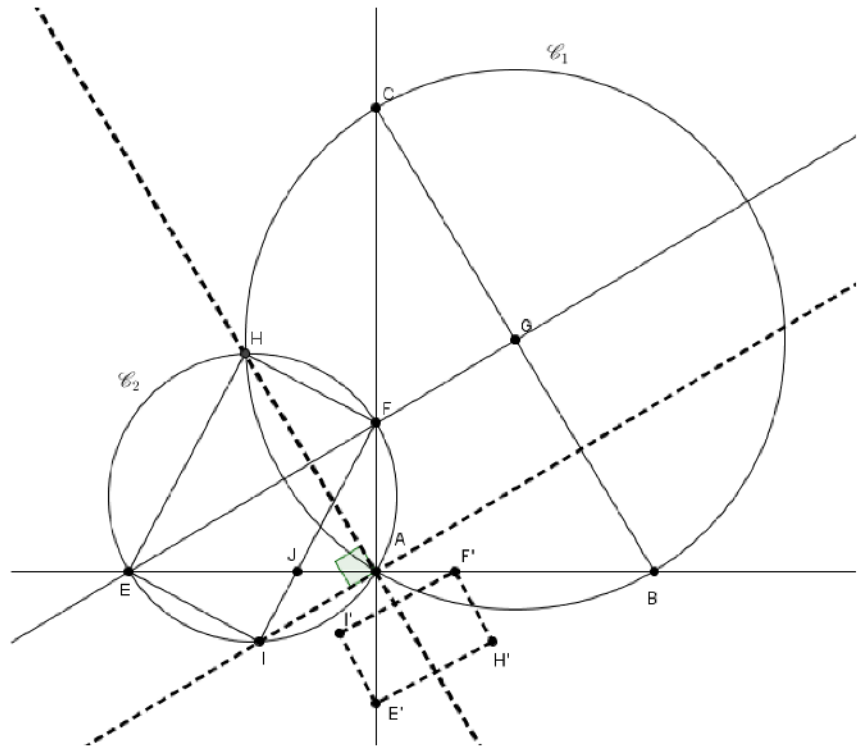


**Figure 2**



**Exercice 1**

- 1) a)  $0 \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AF})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ .
- b) On sait que  $f(B) = F$  et  $(GF) \perp (BC)$  car  $(GF)$  est la médiatrice de  $[BC]$ , on en déduit que l'image de  $(BC)$  est  $(GF)$ .
- c) Puisque  $f(A) = A$  et  $(AB) \perp (AC)$  donc l'image de  $(AC)$  est  $(AB)$ .  
 $C \in (BC) \cap (AC)$  donc  $f(C) \in f((BC)) \cap f((AC))$  donc  $f(C) \in (GF) \cap (AB) = \{E\}$ .  
 Il en résulte que  $f(C) = E$ .
- 2) a) Le cercle  $\zeta_1$  est de diamètre  $[BC]$  donc son image par  $f$  est le cercle de diamètre  $[f(B)f(C)]$ ,  
 or  $f(B) = F$  et  $f(C) = E$ , il en résulte que l'image de  $\zeta_1$  par  $f$  est le cercle de diamètre  $[EF]$ .  
 Ainsi  $f(\zeta_1) = \zeta_2$ .
- b) (Voir figure)
- c) Les points  $I$  et  $H$  appartiennent au cercle  $\zeta_2$  de diamètre  $[EF]$  privé de  $E$  et  $F$  donc  
 $\angle EIF = \angle EHF = \frac{\pi}{2}$ , de plus les points  $A$  et  $F$  sont deux points de l'arc orienté  $\text{III} \setminus \{I, H\}$  situé sur  $\zeta_2$   
 donc  $(\overrightarrow{FH}, \overrightarrow{FI}) \equiv (\overrightarrow{AH}, \overrightarrow{AI})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ . Ainsi le quadrilatère  $HEIF$  admet trois angles droits donc  
 c'est un rectangle.
- d)  $F \in (AF) \cap (HF)$  donc  $f(F) \in f((AF)) \cap f((HF))$  donc  $(AE) \cap (IF) = \{I\}$ .  
 Il en résulte que  $f(F) = I$ .
- 3) a)  $S_{(AC)} \circ f$  est la composée d'une symétrie orthogonale (similitude indirecte) et d'une similitude directe donc c'est une similitude indirecte  
 de plus  $\begin{cases} S_{(AC)} \circ f(A) = A = g(A) \\ S_{(AC)} \circ f(B) = F = g(B) \\ A \neq B \end{cases}$ , on en déduit que  $g = S_{(AC)} \circ f$ .
- b) Le point  $E \in (AB)$  donc  
 $E' = g(E) \in g((AB)) = (AF) = (AC)$ .
- c) Voir figure.



## Exercise 2

1) a)  $\Delta = (1+2i)^2 m^2 + 4(1-i)m^2 = m^2$ . Soit  $\delta = m$ .

$$z_1 = \frac{(1+2i)m - m}{2} = im \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{(1+2i)m - m}{2} = m(1+i).$$

$$b) (z_1 z_2 \text{ est un réel strictement positif}) \Leftrightarrow \begin{cases} \arg(z_1 z_2) \equiv 0[2\pi] \\ \theta \in ]0, \pi[ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \arg(z_1) + \arg(z_2) \equiv 0[2\pi] \\ \theta \in ]0, \pi[ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\theta + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \equiv 0[2\pi] \\ \theta \in ]0, \pi[ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\theta \equiv -\frac{3\pi}{4}[2\pi] \\ \theta \in ]0, \pi[ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \theta = -\frac{3\pi}{8} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ \theta \in ]0, \pi[ \end{cases} \Leftrightarrow \left( \theta = \frac{5\pi}{8} \right).$$

$$2) z_1 z_2 = m^2 i(1+i) = |m|^2 e^{i\frac{5\pi}{4}} e^{i\frac{\pi}{2}} \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} = |m|^2 \sqrt{2} e^{i2\pi} = |m|^2 \sqrt{2}.$$

3) a) Le point  $E \in \mathcal{C}_1 \cap \{B, C\}$  donc le triangle BEC est rectangle en E et les triangles OCE et OEB sont rectangles en O.

$$\frac{OC}{OE} = \tan(OEC) = \cotan\left(\frac{\pi}{2} - OEC\right) = \cotan(BEO) = \frac{OE}{OB}, \text{ il en résulte que}$$

$$\frac{OC}{OE} = \frac{OE}{OB} \Leftrightarrow OE^2 = OC \cdot OB.$$

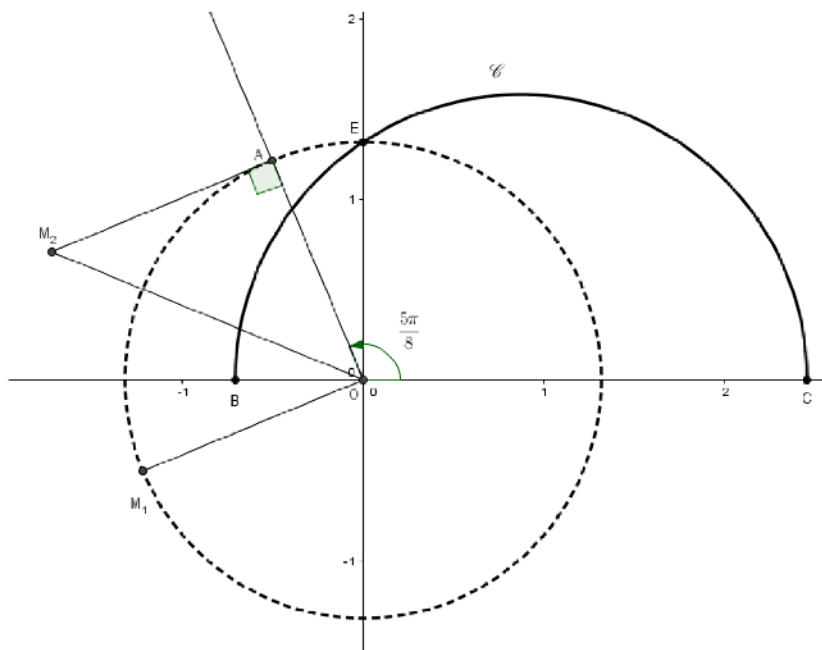
$$b) \text{ D'une part } m = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt[4]{2}} e^{i\frac{5\pi}{8}} \text{ donc } |m| = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt[4]{2}}, \text{ d'autre part } OE^2 = OC \cdot OB = t \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ donc } OE = \frac{\sqrt{t}}{\sqrt[4]{2}}.$$

Il en résulte que  $|m| = OE$ .

4) a) Voir figure.

a) On a  $z_2 = m(1+i) = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} m$ , il en résulte que  $M_2$  est l'image de A par la similitude directe de centre O, de rapport  $\sqrt{2}$  et d'angle  $\frac{\pi}{4}$

$z_1 = im = e^{i\frac{\pi}{2}} m$ , il en résulte que  $M_1$  est l'image de A par la rotation de centre O et d'angle  $\frac{\pi}{2}$ .



### Exercise 3

- 1) On a  $\begin{cases} a \equiv 1 \pmod{2^4} \\ a \equiv 1 \pmod{5^4} \end{cases}$  donc  $\begin{cases} a - 1 \equiv 0 \pmod{2^4} \\ a - 1 \equiv 0 \pmod{5^4} \end{cases}$ , on en déduit que  $a - 1 \equiv 0 \pmod{2^4 \times 5^4}$  ou encore  $2^4 \wedge 5^4 = 1$

$$a \equiv 1 \pmod{10^4}.$$

- 2)  $9217 \equiv 2 \pmod{5}$  donc  $b = (9217)^4 \equiv 2^4 \pmod{5} \equiv 1 \pmod{5}$ .

$$9217 \equiv 1 \pmod{2^4} \text{ donc } b = (9217)^4 \equiv 1 \pmod{2^4}.$$

- 3) a) Pour tout entier naturel  $n$ ,  $b_{n+1} = b^{5^{n+1}} - 1 = (b^{5^n})^5 - 1 = (b^{5^n} - 1 + 1)^5 - 1 = (b_n + 1)^5 - 1$ .

b) En utilisant la formule du binôme,

$$b_{n+1} = (b_n + 1)^5 - 1 = b_n^5 + 5b_n^4 + 10b_n^3 + 10b_n^2 + 5b_n + 1 - 1 = b_n^5 + 5b_n^4 + 10b_n^3 + 10b_n^2 + 5b_n.$$

- 4) a) Si  $5^{n+1}$  divise  $b_n$  alors il existe un entier  $k$  tel que  $b_n = 5^{n+1}k$ , il en résulte que

$$b_n^5 = (5^{n+1}k)^5 = 5^{5n+5}k^5 = 5^{n+2}(5^{4n+3}k^5) \text{ ce qui prouve que } 5^{n+2} \text{ divise } b_n^5.$$

b) Vérification pour  $n = 0$ .  $b_0 = b - 1 \equiv 0 \pmod{5}$  Vrai (D'après 2)

Soit  $n$  un entier naturel. Supposons que  $b_n \equiv 0 \pmod{5^{n+1}}$  et montrons que  $b_{n+1} \equiv 0 \pmod{5^{n+2}}$ .

Puisque  $b_n \equiv 0 \pmod{5^{n+1}}$  c'est-à-dire  $5^{n+1}$  divise  $b_n$  donc  $5^{n+2}$  divise  $b_n^5$ ,  $5b_n^4$ ,  $10b_n^3$ ,  $10b_n^2$  et  $5b_n$ , il en résulte que  $5^{n+2}$  divise  $b_n^5 + 5b_n^4 + 10b_n^3 + 10b_n^2 + 5b_n = b_{n+1}$ . D'où le résultat.

- 5) a) D'après 4)b) et pour  $n = 3$ ,  $b_3 = b^{125} - 1 = 9217^{500} - 1 \equiv 0 \pmod{5^4}$  donc  $(9217)^{500} \equiv 1 \pmod{625}$ .

b) D'après 2)  $b = (9217)^4 \equiv 1 \pmod{2^4}$  donc  $b^{125} = (9217)^{500} \equiv 1 \pmod{16}$ .

Ainsi  $(9217)^{500} \equiv 1 \pmod{16}$  et  $(9217)^{500} \equiv 1 \pmod{625}$  d'après 1)  $(9217)^{500} \equiv 1 \pmod{10000}$ .

c) on sait que  $(9217)^{500} \equiv 1 \pmod{10000}$  donc  $(9217)^{501} \equiv 9217 \pmod{10000}$ , il en résulte que

$$\left((9217)^{167}\right)^3 \equiv 9217 \pmod{10000} \text{ ou encore le cube du nombre } (9217)^{167} \text{ est congru à } 9217 \text{ modulo } 10000.$$

#### Exercice 4

A.

1) a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ . La droite  $x = 0$  est une asymptote à  $(C_f)$ .

b)  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{x\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^3} = +\infty$ .  $(C_f)$  admet une branche

parabolique infinie de direction celle de  $(O, \vec{j})$  en  $+\infty$ .

2) a) La fonction  $f$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  et  $f'(x) = \frac{\frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} \sqrt{x} - \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}}}{2x\sqrt{x}}$ .

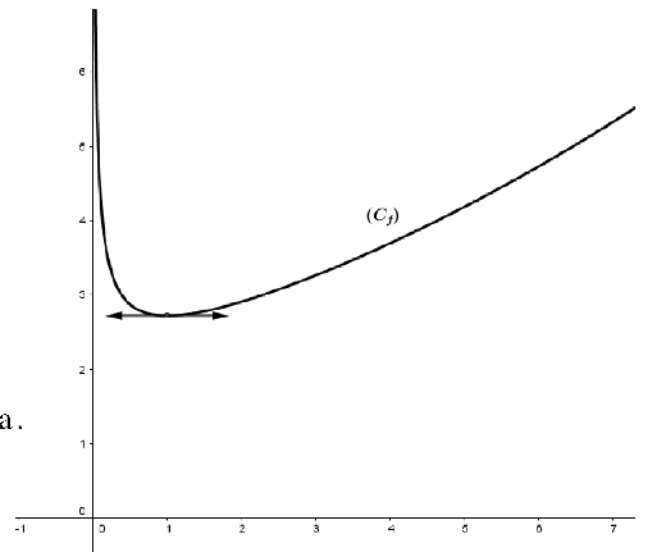
b) Le signe de  $f'(x)$  est celui de  $\sqrt{x} - 1 = \frac{x-1}{\sqrt{x}+1}$ .

| x       | 0 | 1         | $+\infty$ |
|---------|---|-----------|-----------|
| $f'(x)$ |   | -         | +         |
| $f(x)$  |   | $+\infty$ | $+\infty$ |

c) Voir figure.

$$3) S_\lambda = \int_\lambda^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = 2 \int_\lambda^1 \frac{e^{\sqrt{x}}}{2\sqrt{x}} dx = 2 \left[ e^{\sqrt{x}} \right]_\lambda^1 = 2(e - e^\lambda) \text{ ua.}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} S_\lambda = \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} 2(e - e^\lambda) = 2(e - 1).$$



B.

1) La fonction  $g_1$  est continue et strictement décroissante sur  $]0, 1]$  donc elle réalise une bijection de  $]0, 1]$  sur  $g_1([0, 1]) = [e, +\infty[$ .

La fonction  $g_2$  est continue et strictement décroissante sur  $[1, +\infty[$  donc elle réalise une bijection de  $[1, +\infty[$  sur  $g_2([1, +\infty[) = [e, +\infty[$ .

2) a) La fonction  $g_1$  est une bijection de  $]0, 1]$  sur  $[e, +\infty[$ .  $e + \frac{1}{n} \in [e, +\infty[$  donc l'équation  $g_1(x) = e + \frac{1}{n}$  admet une solution unique  $\alpha_n \in ]0, 1]$ , or  $g_1(1) = e \neq e + \frac{1}{n}$  il en résulte que  $\alpha_n \in ]0, 1[$ .

La fonction  $g_2$  est une bijection de  $[1, +\infty[$  sur  $[e, +\infty[$ .  $e + \frac{1}{n} \in [e, +\infty[$  donc l'équation  $g_2(x) = e + \frac{1}{n}$  admet une solution unique  $\beta_n \in [1, +\infty[$ , or  $g_2(1) = e \neq e + \frac{1}{n}$  il en résulte que  $\beta_n \in ]1, +\infty[$ .

Conclusion : L'équation  $f(x) = e + \frac{1}{n}$  admet dans  $]0, +\infty[$  exactement deux solutions  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  telle que  $0 < \alpha_n < 1 < \beta_n$ .

b) On sait que  $g_1(\alpha_n) = e + \frac{1}{n} \Leftrightarrow \alpha_n = g_1^{-1}\left(e + \frac{1}{n}\right)$ . Or  $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} e + \frac{1}{n} = e \\ \lim_{x \rightarrow e} g_1^{-1}(x) = 1 \end{cases}$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_n = 1$ .

De même on sait que  $g_2(\beta_n) = e + \frac{1}{n} \Leftrightarrow \alpha_n = g_2^{-1}\left(e + \frac{1}{n}\right)$ . Or  $\begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} e + \frac{1}{n} = e \\ \lim_{x \rightarrow e} g_2^{-1}(x) = 1 \end{cases}$  donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \beta_n = 1$ .

3) a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} f(x) - \left(e + \frac{1}{n}\right) \sqrt{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\sqrt{x}} - \left(e + \frac{1}{n}\right) \sqrt{x} = 1 = h(0)$  donc  $h$  est continue à droite en 0.

b) Pour tout  $x \in [0, +\infty[$ ,  $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$  ou  $f(x) = e + \frac{1}{n} \Leftrightarrow x = 0$  ou  $x = \alpha_n$  ou  $x = \beta_n$ .

|        |   |            |           |           |
|--------|---|------------|-----------|-----------|
| $x$    | 0 | $\alpha_n$ | $\beta_n$ | $+\infty$ |
| $h(x)$ | ○ | +          | ○         | +         |

4) a) La fonction  $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et  $0 \in [0, +\infty[$  donc la fonction  $u$  est la primitive de la fonction  $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$  qui s'annule en 0, il en résulte que  $u$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et dérivable sur  $]0, +\infty[$ .

Les fonctions  $x \mapsto e^{\sqrt{x}}$  et  $x \mapsto \sqrt{x} - 1$  sont continues sur  $[0, +\infty[$  et dérivables sur  $]0, +\infty[$ , il en résulte que la fonction  $v$  est continue sur  $[0, +\infty[$  et dérivable sur  $]0, +\infty[$ .

b) Pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $u'(x) = e^{\sqrt{x}}$  et  $v'(x) = \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} + \frac{(\sqrt{x} - 1)}{\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} = e^{\sqrt{x}}$ .

Il en résulte que pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,  $u'(x) = v'(x)$  par suite pour tout  $x \in ]0, +\infty[$ ,

$u(x) = v(x) + c$  où  $c$  est un réel, or les fonctions  $u$  et  $v$  sont continues sur  $[0, +\infty[$  donc

$u(x) = v(x) + c$  pour tout  $x \in [0, +\infty[$  et comme  $u(0) = v(0) = 0$  donc  $c = 0$ .

Ainsi  $u(x) = v(x)$  pour tout  $x \in [0, +\infty[$ .

c) Pour tout  $x \in [0, +\infty[$ ,  $h(x) = \begin{cases} \sqrt{x} f(x) - \sqrt{x} \left(e + \frac{1}{n}\right) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases} = \begin{cases} e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x} \left(e + \frac{1}{n}\right) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$ ,

on en déduit que pour tout  $x \in [0, +\infty[$ ,  $h(x) = e^{\sqrt{x}} - \sqrt{x} \left(e + \frac{1}{n}\right)$  par suite pour tout  $x \in [0, +\infty[$ ,

$$\begin{aligned} H(x) &= \int_0^x e^{\sqrt{t}} dt - \left(e + \frac{1}{n}\right) \int_0^x \sqrt{t} dt = 2 + 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} - \frac{2}{3} \left(e + \frac{1}{n}\right) [t\sqrt{t}]_0^x \\ &= 2 + 2(\sqrt{x} - 1)e^{\sqrt{x}} - \frac{2}{3} \left(e + \frac{1}{n}\right) x\sqrt{x}. \end{aligned}$$

5)  $A_n = \int_0^{\beta_n} |h(x)| dx = \int_0^{\alpha_n} h(x) dx + \int_{\beta_n}^{\alpha_n} h(x) dx = 2H(\alpha_n) - H(\beta_n)$ .

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} A_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 2H(\alpha_n) - H(\beta_n)$$

$$= \lim_{n \rightarrow +\infty} 2 + 4(\sqrt{\alpha_n} - 1)e^{\sqrt{\alpha_n}} - \frac{4}{3} \left(e + \frac{1}{n}\right) \alpha_n \sqrt{\alpha_n} - 2(\sqrt{\beta_n} - 1)e^{\sqrt{\beta_n}} + \frac{2}{3} \left(e + \frac{1}{n}\right) \beta_n \sqrt{\beta_n} = 2 - \frac{2}{3}e.$$

|                                                                                      |                                |                 |
|--------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|-----------------|
| RÉPUBLIQUE TUNISIENNE<br>MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION<br>*****<br>EXAMEN DU BACCALAURÉAT | Épreuve : <b>MATHÉMATIQUES</b> |                 |
|                                                                                      | Section : <b>Mathématiques</b> |                 |
|                                                                                      | Durée : 4 h                    | Coefficient : 4 |
| SESSION <b>2016</b>                                                                  | <b>Session de contrôle</b>     |                 |

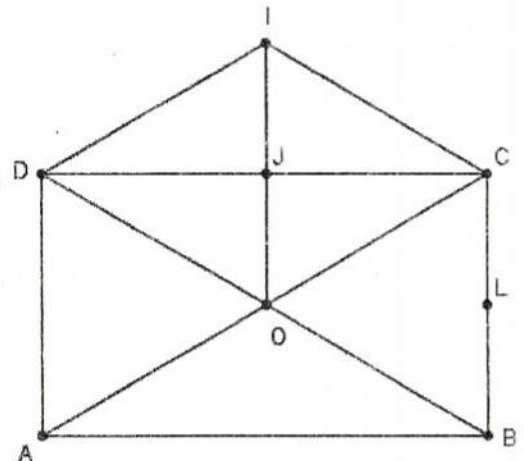
Le sujet comporte six pages numérotées de 1/6 à 6/6  
Les pages 5/6 et 6/6 sont à rendre avec la copie.

### Exercice 1 (5 points)

Le plan est orienté.

Dans la figure ci-contre ABCD est un rectangle direct de centre O

AOID et OCID sont deux losanges. Le point J est le milieu du segment [CD] et le point L est le milieu du segment [BC].



1) Soit R la rotation de centre I et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

a) Déterminer  $R(O)$  et  $R(D)$ .

b) Montrer que  $R(A) = B$ .

2) Soit  $g = S_{(OL)} \circ S_{(OI)} \circ S_{(AD)}$ .

a) Vérifier que  $g(A) = C$  et  $g(D) = B$ .

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de g.

3) Soit h l'homothétie de centre le point C et de rapport  $\frac{1}{2}$  et on pose  $\varphi = R \circ h \circ g^{-1}$ .

a) Montrer que  $\varphi$  est une similitude indirecte de centre C.

b) Soit K le milieu du segment [IC]. Montrer que  $\varphi(B) = K$ .

c) Montrer que  $\varphi = h \circ S_{(AC)}$ .

4) Déterminer l'image par  $\varphi$  du rectangle ABCD.

### Exercice 2 (4 points)

Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct, on désigne par (E) l'ellipse d'équation :  $x^2 + 9y^2 = 9$ .

Dans la figure 1 de l'annexe 1 jointe,  $(C_1)$  est le cercle de centre O et de rayon 1,  $(C_2)$  est le cercle de centre O et de rayon 3, N est le point de coordonnées  $(\cos\theta, \sin\theta)$ . P est le point de coordonnées  $(3\cos\theta, 3\sin\theta)$ , où  $\theta$  est un réel appartenant à  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ .

1) Soit M le point de coordonnées  $(3\cos\theta, \sin\theta)$ .

a) Vérifier que M est un point de l'ellipse (E).

b) Placer le point M.

c) Justifier qu'une équation de la tangente T à (E) en M est  $x \cos\theta + 3y \sin\theta = 3$ .

2) La tangente T à (E) en M coupe l'axe des abscisses et l'axe des ordonnées respectivement en H et K.

a) Déterminer les coordonnées des points H et K.

b) Montrer que  $HK^2 = \frac{9}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}$ .

3) Soit f la fonction définie sur  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  par  $f(\theta) = HK^2$ .

a) Montrer que pour tout  $\theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ,  $f'(\theta) = 2(4\sin^2\theta - 1) \frac{\cos^2\theta + 3\sin^2\theta}{\cos^3\theta \sin^3\theta}$ .

b) En déduire que la distance HK est minimale si et seulement si  $\theta = \frac{\pi}{6}$ .

c) On désigne par D le point de l'ellipse (E) correspondant à  $\theta = \frac{\pi}{6}$ .

Construire le point D ainsi que la tangente en ce point à l'ellipse (E).

### Exercice 3 (4 points)

Soit a un entier naturel non nul et premier avec 5.

1) En utilisant les restes possibles de la division euclidienne de a par 5, montrer que  $a^4 \equiv 1 \pmod{5}$ .

2) Soit p et q deux entiers naturels non nuls tels que  $p \leq q$  et  $q \equiv p \pmod{4}$ .

a) Montrer que  $a^q \equiv a^p \pmod{5}$ .

b) Montrer que  $a^q \equiv a^p \pmod{2}$ .

c) En déduire que  $a^q \equiv a^p \pmod{10}$ .

3) Soit dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E) :  $25x - 21y = 4$ .

a) Vérifier que  $(1,1)$  est une solution de (E).

b) Résoudre dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E).

c) En déduire l'ensemble A des solutions de l'équation (E) dans  $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ .

d) Soit  $(\alpha, \beta)$  un élément de A. Montrer que, pour tout entier naturel non nul n et premier avec 5,  $n^\alpha$  et  $n^\beta$  ont le même chiffre d'unité.

#### Exercice 4 (7 points)

Soit f la fonction définie sur  $[e^{-\sqrt{2}}, e^{\sqrt{2}}]$  par  $f(x) = \frac{\sqrt{2 - \ln^2 x}}{x}$ .

On note  $C_f$  sa courbe représentative dans un repère orthonormé direct  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) a) Montrer que  $\lim_{x \rightarrow e^{\sqrt{2}}} \left( \frac{\ln x - \sqrt{2}}{x - e^{\sqrt{2}}} \right) = e^{-\sqrt{2}}$ .

b) En écrivant  $\frac{f(x)}{x - e^{\sqrt{2}}} = \frac{-(\ln x + \sqrt{2})}{x\sqrt{2 - \ln^2 x}} \cdot \frac{\ln x - \sqrt{2}}{x - e^{\sqrt{2}}}$ , montrer que  $\lim_{x \rightarrow (e^{\sqrt{2}})^-} \left( \frac{f(x)}{x - e^{\sqrt{2}}} \right) = -\infty$ .

Interpréter graphiquement le résultat.

c) Montrer que f n'est pas dérivable à droite en  $e^{-\sqrt{2}}$ .

2) On donne, ci-dessous, le tableau donnant le signe de  $f''(x)$ , le signe de  $f'(x)$  et les variations de la fonction f.

| x        | $e^{-\sqrt{2}}$ | $e^{-1}$ | $\alpha$ | $\beta$ | $e^{\sqrt{2}}$ |   |
|----------|-----------------|----------|----------|---------|----------------|---|
| $f''(x)$ | -               | 0        | -        | 0       | +              | - |
| $f'(x)$  | +               | 0        | -        | -       | -              |   |
| f        | 0               | e        |          |         | 0              |   |

Justifier que les points C et D, de coordonnées respectives  $(\alpha, f(\alpha))$  et  $(\beta, f(\beta))$ , sont deux points d'inflexion de  $C_f$ .

3) Dans la figure 2 de l'annexe 2 jointe,  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  est un repère orthonormé direct ;

A et B sont les points de coordonnées respectives  $(\sqrt{2}, 0)$  et  $(-\sqrt{2}, 0)$ ;

C et D sont les points de coordonnées respectives  $(\alpha, f(\alpha))$  et  $(\beta, f(\beta))$ ;

$\Gamma$  est la courbe représentative de la fonction exponentielle.

a) Construire les points de  $C_f$  d'abscisses  $e^{-\sqrt{2}}$ ,  $e^{-1}$  et  $e^{\sqrt{2}}$ .

b) Tracer la courbe  $C_f$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

4) Soit  $g$  la fonction définie sur  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$  par  $g(x) = \sin x$ .

a) Montrer que la fonction  $g$  réalise une bijection de  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$  sur  $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$ .

On note  $h$  sa fonction réciproque.

b) Montrer que la fonction  $h$  est dérivable sur  $\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$  et que  $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

c) Soit  $u$  la fonction définie sur  $[e^{-1}, e]$  par  $u(x) = h\left(\frac{\ln x}{\sqrt{2}}\right)$ .

Montrer que pour tout  $x \in [e^{-1}, e]$ ,  $u'(x) = \frac{1}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}$ .

d) En déduire que  $\int_{e^{-1}}^e \frac{dx}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} = \frac{\pi}{2}$ .

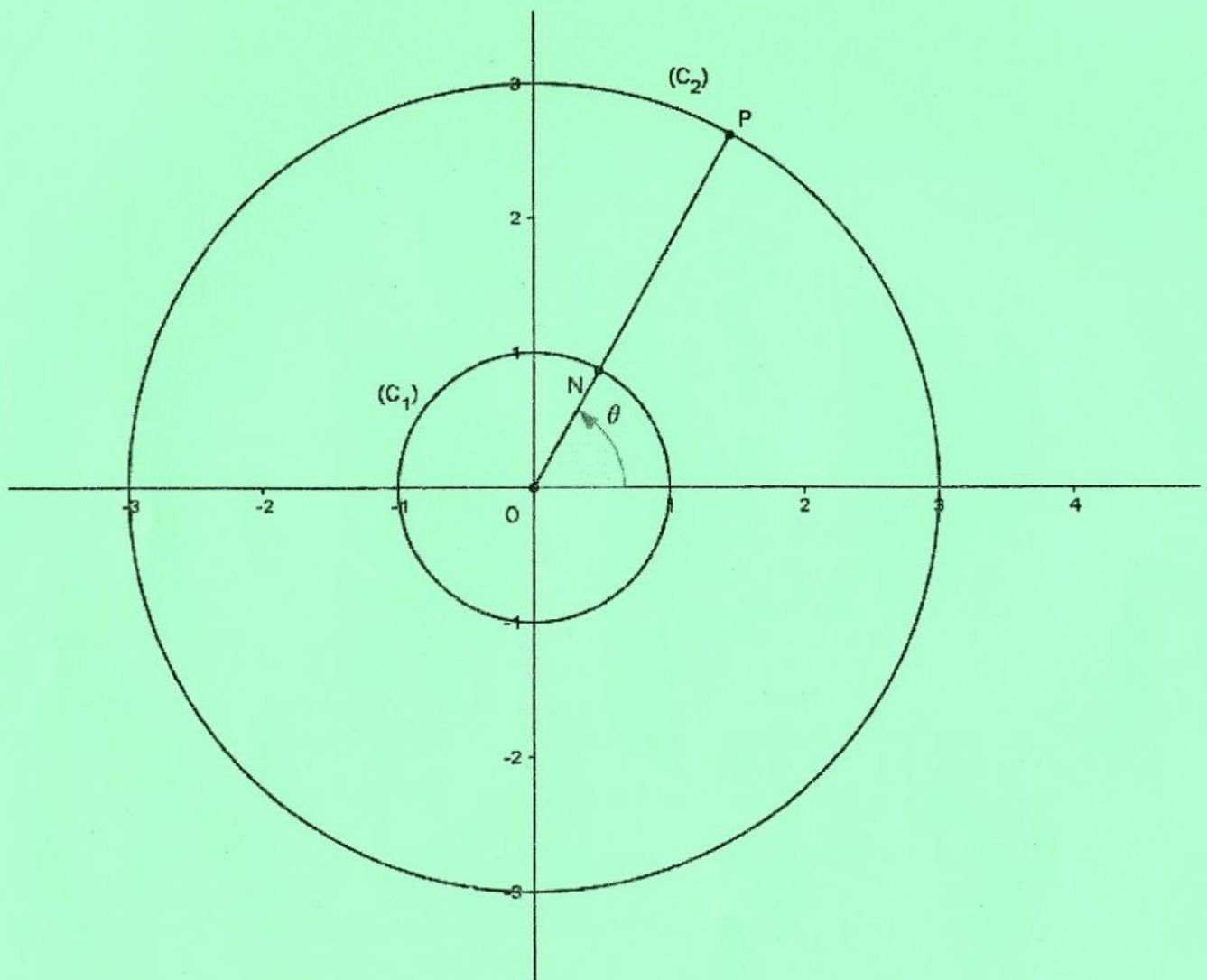
5) Soit  $\mathcal{A}$  l'aire de la partie du plan limitée par  $C_f$ , l'axe des abscisses et les droites d'équations  $x = e^{-1}$  et  $x = e$ .

a) Montrer que  $\mathcal{A} = 2 + \int_{e^{-1}}^e \left( \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} \right) dx$ .

b) Vérifier que pour tout  $x \in [e^{-1}, e]$ ,  $\frac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} = \frac{2}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} - f(x)$ .

c) En déduire la valeur de  $\mathcal{A}$ .

**Annexe 1 (à rendre avec la copie)**



**Figure 1**

Annexe 2 (à rendre avec la copie)

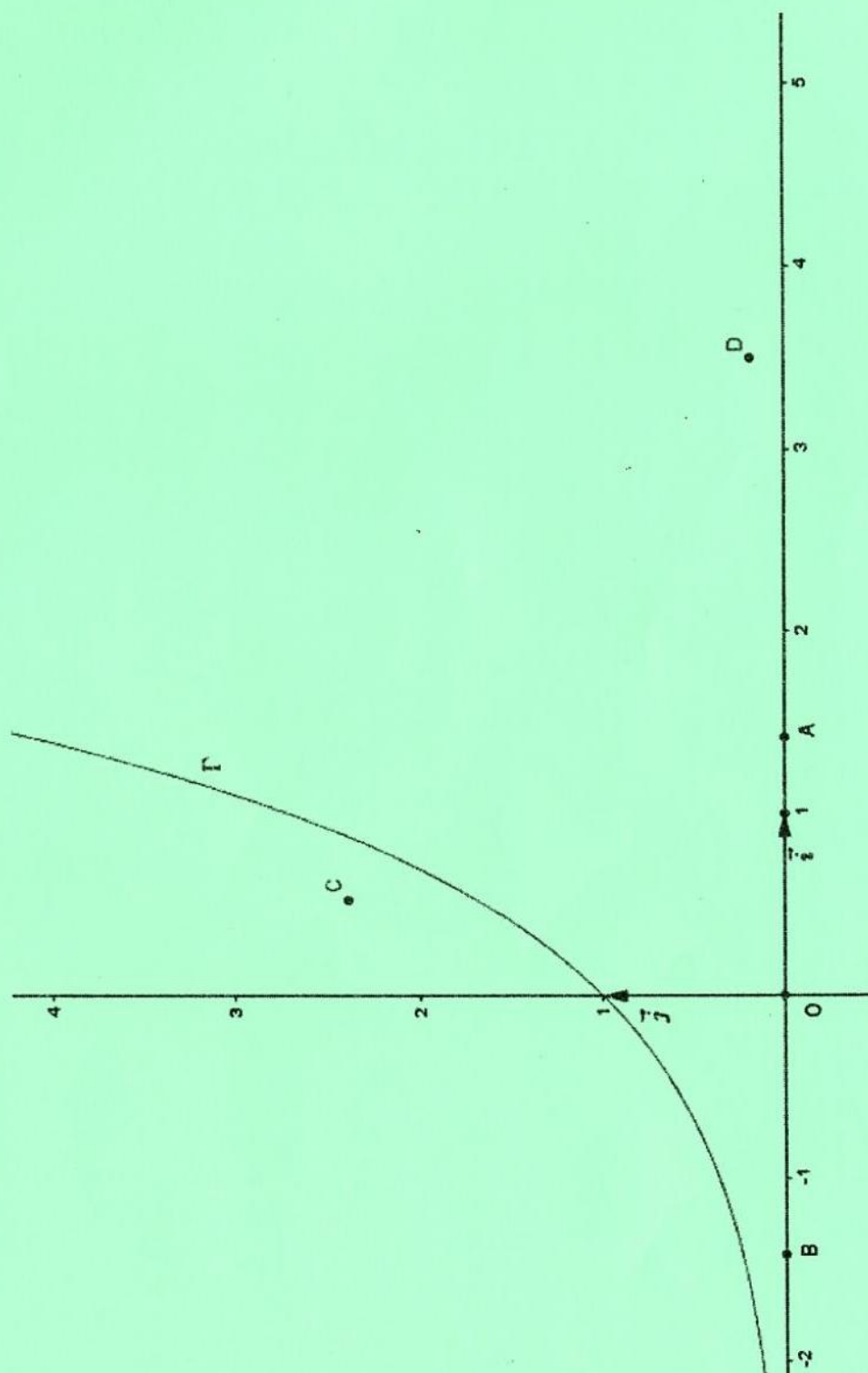


Figure 2

**Exercice 1**

- 1) a) On sait que OCID est un losange donc  $DI = DO$  et OIDA est un losange donc  $IO = ID$ , il en résulte que  $DI = DO = OI$  par suite le triangle DOI est équilatéral donc  $\begin{cases} ID = IO \\ \left(\overrightarrow{ID}, \overrightarrow{IO}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$  ce qui prouve que  $R(D) = O$ .
- Le triangle DOI est équilatéral et J est un centre de symétrie du losange OCID donc OCI est un triangle équilatéral donc  $\begin{cases} IO = IC \\ \left(\overrightarrow{IO}, \overrightarrow{IC}\right) = \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$  ce qui prouve que  $R(O) = C$ .
- b) Le triangle DAO est équilatéral direct (Le symétrique de DOI par (DO)) de donc son image par R est un triangle équilatéral direct (Le symétrique de COI par (CO)) et puisque  $R(D) = O$ ,  $R(O) = C$  et le triangle OBC est équilatéral direct donc l'image du triangle DAO par R est le triangle OBC, on en déduit que  $R(A) = B$ .
- 2) a)  $g(A) = S_{(OL)} \circ S_{(OI)} \circ S_{(AD)}(A) = S_{(OL)} \circ S_{(OI)}(A) = S_{(OL)}(B) = C$ .  
 $g(D) = S_{(OL)} \circ S_{(OI)} \circ S_{(AD)}(D) = S_{(OL)} \circ S_{(OI)}(D) = S_{(OL)}(C) = B$ .
- b)  $g = S_{(OL)} \circ S_{(OI)} \circ S_{(AD)} = S_{(OL)} \circ t_{2Dj} = S_{(OL)} \circ t_{DC}$  et puisque  $\overrightarrow{DC}$  est directeur de (OL), il en résulte que g est une symétrie glissante de vecteur  $\overrightarrow{DC}$  et d'axe (OL).
- 3) a)  $\varphi$  est la composée de deux similitudes directes (R et h) de rapports respectifs 1 et  $\frac{1}{2}$  et d'une similitude indirecte ( $g^{-1}$ ) de rapport 1 donc  $\varphi$  est une similitude indirecte de rapport  $1 \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2}$  donc elle admet un centre et puisque  $\varphi(C) = R \circ h \circ g^{-1}(C) = R \circ h(A) = R(O) = C$ , on en déduit que C est le centre de  $\varphi$ .
- b)  $\varphi(B) = R \circ h \circ g^{-1}(B) = R \circ h(D) = R(J) = K$ .
- c)  $h \circ S_{(AC)}$  est la composée d'une similitude directe et d'une symétrie orthogonale (similitude indirecte) donc c'est une similitude indirecte

$$\text{de plus } \begin{cases} h \circ S_{(AC)}(C) = C = \varphi(C) \\ h \circ S_{(AC)}(B) = h(I) = K = \varphi(B), \text{ on en déduit que } \varphi = h \circ S_{(AC)}. \\ C \neq B \end{cases}$$

4) Soit  $D'$  le milieu de  $[OB]$ .  $ABCD$  est un rectangle donc son image par  $\varphi$  est un rectangle

$$\begin{cases} \varphi(A) = h \circ S_{(AC)}(A) = O \\ \varphi(B) = K \\ \varphi(C) = C \end{cases}$$

et  $OKCD'$  est un rectangle, il en résulte que l'image du rectangle  $ABCD$

par  $\varphi$  est le rectangle  $OKCD'$ .

## Exercice 2

1) a)  $(3\cos\theta)^2 + 9(\sin\theta)^2 = 9(\cos\theta)^2 + 9(\sin\theta)^2 = 9$  donc  $M$  est un point de  $(E)$ .

b)  $\begin{cases} x_M = x_P \\ y_M = y_N \end{cases}$ .

c)  $T: 3(\cos\theta)x + 9(\sin\theta)y = 9 \Leftrightarrow x\cos\theta + 3y\sin\theta = 3$ .

2) a)  $H(x, y) \in T \cap (O, \vec{i}) \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x\cos\theta + 3y\sin\theta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = \frac{3}{\cos\theta} \end{cases}$ , il en résulte que  $H\left(\frac{3}{\cos\theta}, 0\right)$ .

$K(x, y) \in T \cap (O, \vec{j}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x\cos\theta + 3y\sin\theta = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = \frac{1}{\sin\theta} \end{cases}$ , il en résulte que  $K\left(0, \frac{1}{\sin\theta}\right)$ .

b)  $HK^2 = \left(\frac{3}{\cos\theta}\right)^2 + \left(\frac{1}{\sin\theta}\right)^2 = \frac{9}{\cos^2\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}$ .

3) a) La fonction  $f$  est dérivable sur  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  et

$$f'(\theta) = \frac{18\cos\theta\sin\theta}{\cos^4\theta} - \frac{2\cos\theta\sin\theta}{\sin^4\theta} = \frac{18\sin^4\theta - 2\cos^4\theta}{\cos^3\theta\sin^3\theta} = 2(4\sin^2\theta - 1) \frac{3\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\cos^3\theta\sin^3\theta}.$$

b) Le signe de  $f'(\theta)$  est celui de  $4\sin^2\theta - 1 = (2\sin\theta - 1)(2\sin\theta + 1)$ .

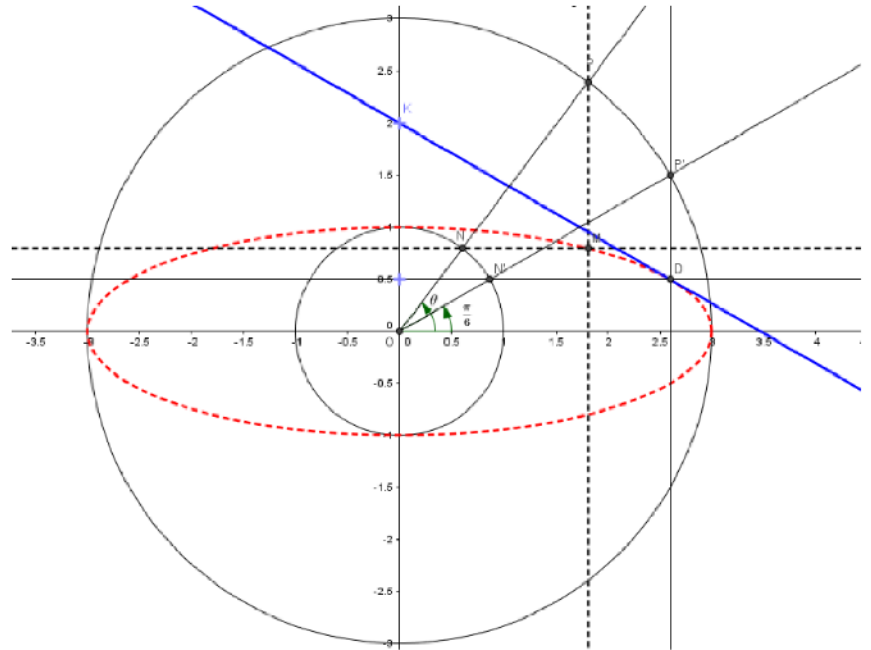
$$\begin{cases} f'(\theta) = 0 \\ \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sin\theta - 1 = 0 \\ \theta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[ \end{cases} \Leftrightarrow \theta = \frac{\pi}{6}.$$

| $\theta$     | 0 | $\frac{\pi}{6}$                                                                 | $\frac{\pi}{2}$ |
|--------------|---|---------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| $f'(\theta)$ |   | $\begin{array}{c} - \\ \circ \\ + \end{array}$                                  |                 |
| $f(\theta)$  |   | $\begin{array}{c} +\infty \\ \nearrow \\ 16 \\ \nwarrow \\ +\infty \end{array}$ |                 |

D'après le tableau de variation HK

est minimale si et seulement si  $\theta = \frac{\pi}{6}$ .

c) Voir figure.



### Exercice 3

1) Soit  $r$  le reste de  $a \pmod{5}$ .

On a  $a$  est premier avec 5, donc  $r \in \{1, 2, 3, 4\}$  or  $r \wedge 5 = 1$  et 5 est premier donc  $r^4 \equiv 1 \pmod{5}$

Puisque  $a^4 \equiv r^4 \pmod{5}$ , il en résulte que  $a^4 \equiv 1 \pmod{5}$ .

2) a)  $q \equiv p \pmod{4}$  et  $p \leq q \Leftrightarrow q = 4n + p, n \in \mathbb{N}$ .

$$a^q \equiv a^{4n+p} \pmod{5} \equiv a^{4n} \cdot a^p \pmod{5} \equiv a^p \pmod{5}.$$

b) Soit  $r$  le reste de  $a$  modulo 2, donc  $r \in \{0, 1\}$

Si  $r = 0$  alors  $a^p \equiv a^q \equiv 0 \pmod{2}$  et si  $r = 1$  alors  $a^p \equiv a^q \equiv 1 \pmod{2}$

On en déduit que  $a^p \equiv a^q \pmod{2}$

$$\text{c) On a } \begin{cases} a^p \equiv a^q \pmod{2} \\ a^p \equiv a^q \pmod{5} \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} a^p - a^q \equiv 0 \pmod{2} \\ a^p - a^q \equiv 0 \pmod{5} \end{cases}, \text{ on en déduit que } a^p - a^q \equiv 0 \pmod{2 \times 5} \text{ ou } 2 \wedge 5 = 1$$

encore  $a^p \equiv a^q \pmod{10}$ .

3) a)  $25 \times 1 - 21 \times 1 = 4$ .

$$\text{b) } 25x - 21y = 25 \times 1 - 21 \times 1 \text{ donc } 25(x-1) = 21(y-1) (*)$$

25 divise  $21(y-1)$  donc 25 divise  $(y-1)$  donc  $y = 25k + 1, k \in \mathbb{Z}$ .

$$25 \wedge 21 = 1$$

En remplaçant  $y$  dans  $(*)$ , on obtient  $x = 21k + 1, k \in \mathbb{Z}$ .

$$\text{Ainsi } S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(21k+1, 25k+1), k \in \mathbb{Z}\}$$

$$\text{c) } A = \{(21k+1, 25k+1), k \in \mathbb{N}\}$$

d)  $\alpha = 21k + 1$  et  $\beta = 25k + 1, k \in \mathbb{N}$ , donc  $\beta - \alpha = 4k$  on déduit d'après 2) que  $n^\alpha \equiv n^\beta \pmod{10}$ .

### Exercice 4

1) a) La fonction  $v : x \mapsto \ln x$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$  en particulier en  $e^{\sqrt{2}}$ , il en résulte que

$$\lim_{x \rightarrow e^{\sqrt{2}}} \left( \frac{\ln x - \sqrt{2}}{x - e^{\sqrt{2}}} \right) = \lim_{x \rightarrow e^{\sqrt{2}}} \left( \frac{v(x) - v(e^{\sqrt{2}})}{x - e^{\sqrt{2}}} \right) = v'(e^{\sqrt{2}}) = \frac{1}{e^{\sqrt{2}}} = e^{-\sqrt{2}}.$$

$$b) \lim_{x \rightarrow (e^{\sqrt{2}})^-} \frac{f(x)}{x - e^{\sqrt{2}}} = \lim_{x \rightarrow (e^{\sqrt{2}})^-} \frac{-(\ln x + \sqrt{2})}{x\sqrt{2 - \ln^2 x}} \cdot \left( \frac{\ln x - \sqrt{2}}{x - e^{\sqrt{2}}} \right), \text{ or } \lim_{x \rightarrow (e^{\sqrt{2}})^-} \frac{-(\ln x + \sqrt{2})}{x\sqrt{2 - \ln^2 x}} = -\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow (e^{\sqrt{2}})^-} \left( \frac{\ln x - \sqrt{2}}{x - e^{\sqrt{2}}} \right) = e^{-\sqrt{2}}, \text{ il en résulte que}$$

$$\lim_{x \rightarrow (e^{\sqrt{2}})^-} \frac{f(x)}{x - e^{\sqrt{2}}} = \lim_{x \rightarrow (e^{\sqrt{2}})^-} \frac{-(\ln x + \sqrt{2})}{x\sqrt{2 - \ln^2 x}} \cdot \left( \frac{\ln x - \sqrt{2}}{x - e^{\sqrt{2}}} \right) = -\infty. \text{ La courbe } (C_f) \text{ admet au point}$$

d'abscisse  $e^{\sqrt{2}}$  une demi-tangente verticale.

$$c) \lim_{x \rightarrow e^{\sqrt{2}}} \left( \frac{\ln x + \sqrt{2}}{x - e^{\sqrt{2}}} \right) = \lim_{x \rightarrow e^{\sqrt{2}}} \left( \frac{v(x) - v(e^{-\sqrt{2}})}{x - e^{\sqrt{2}}} \right) = v'(e^{-\sqrt{2}}) = \frac{1}{e^{-\sqrt{2}}} = e^{\sqrt{2}}.$$

$$\lim_{x \rightarrow (e^{-\sqrt{2}})^+} \frac{f(x)}{x - e^{-\sqrt{2}}} = \lim_{x \rightarrow (e^{-\sqrt{2}})^+} \frac{-(\ln x - \sqrt{2})}{x\sqrt{2 - \ln^2 x}} \cdot \left( \frac{\ln x + \sqrt{2}}{x - e^{-\sqrt{2}}} \right) = +\infty. \text{ On en déduit que } f \text{ n'est pas dérivable à droite en } e^{-\sqrt{2}}.$$

2) La fonction  $f$  est dérivable respectivement en  $\alpha$  et  $\beta$  de plus  $f''$  s'annule respectivement en  $\alpha$  et  $\beta$  en changeant de signe donc les points C et D sont deux points d'inflexions de  $(C_f)$ .

3) a) Voir figure.

b) Voir figure.

4) a) La fonction  $g$  est dérivable sur  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$  et  $g'(x) = \cos x > 0$  donc  $g$  est continue et strictement

croissante sur  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$  par suite elle réalise une bijection de  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$  sur

$$g\left(\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\right) = \left[g\left(-\frac{\pi}{4}\right), g\left(\frac{\pi}{4}\right)\right] = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

$$b) \begin{cases} g \text{ est strictement croissante sur } \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \\ g \text{ est dérivable sur } \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \\ g'(x) \neq 0 \text{ sur } \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \end{cases} \quad \text{donc } h \text{ est dérivable sur } g\left(\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]\right) = \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right].$$

$$h'(x) = \frac{1}{g'(h(x))} = \frac{1}{\cos y} \text{ avec } \begin{cases} h(x) = y \\ x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ y \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} g(y) = x \\ x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ y \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} \sin y = x \\ x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ y \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin^2 y = x^2 \\ x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ y \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \\ \sin y \text{ et } x \text{ de même signe} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = \sqrt{1-x^2} \\ x \in \left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right] \\ y \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \end{cases}.$$

On en déduit que  $h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ .

c) La fonction  $u$  est dérivable sur  $[e^{-1}, e]$  et  $u'(x) = h'\left(\frac{\ln x}{\sqrt{2}}\right) \frac{1}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\ln^2 x}{2}}} \frac{1}{\sqrt{2}x} = \frac{1}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}$ .

$$d) \int_{e^{-1}}^e \frac{1}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} dx = [u(x)]_{e^{-1}}^e = u(e) - u(e^{-1}) = h\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - h\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

$$5) \text{ a) } A = \int_{e^{-1}}^e f(x) dx = \int_{e^{-1}}^e \frac{\sqrt{2-\ln^2 x}}{x} dx$$

$$\text{On pose } \begin{cases} u(x) = \sqrt{2-\ln^2 x} \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u(x) = \frac{-\ln x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} \\ v(x) = \ln x \end{cases}$$

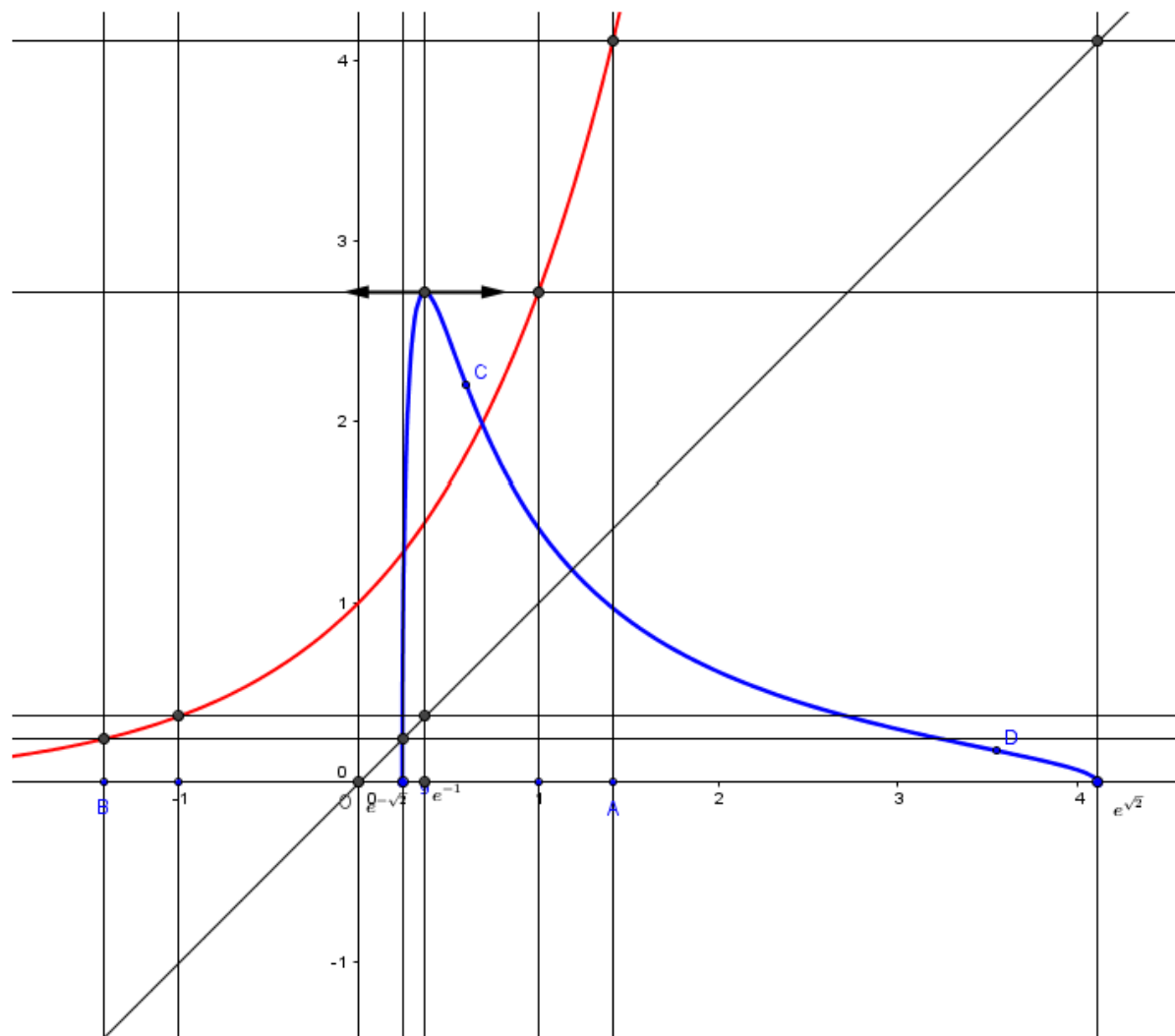
$$A = \left[ \sqrt{2-\ln^2 x} \ln x \right]_{e^{-1}}^e + \int_{e^{-1}}^e \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} dx = 2 + \int_{e^{-1}}^e \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} dx.$$

b) Pour tout  $x \in [e^{-1}, e]$ ,  $f(x) = \frac{\sqrt{2-\ln^2 x}}{x} = \frac{2-\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} = \frac{2}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} - \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}}$ , il en résulte

$$\text{que } \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} = \frac{2}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} - f(x).$$

$$c) A = 2 + \int_{e^{-1}}^e \frac{\ln^2 x}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} dx = 2 + \int_{e^{-1}}^e \frac{2}{x\sqrt{2-\ln^2 x}} dx - \int_{e^{-1}}^e f(x) dx = 2 + \pi - A, \text{ il en résulte que}$$

$$2A = \pi + 2 \text{ ou encore } A = \left(\frac{\pi}{2} + 1\right) \text{ u.a.}$$



|                                                                                                             |                                |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------|
| REPUBLICQUE TUNISIENNE<br>MINISTERE DE L'EDUCATION<br>◆◆◆◆<br><b>EXAMEN DU BACCALAUREAT</b><br>SESSION 2015 | Epreuve : <b>MATHEMATIQUES</b> |
|                                                                                                             | Durée : 4 H                    |
|                                                                                                             | Coefficient : 4                |
| Section : <b>Mathématiques</b>                                                                              | <b>Session principale</b>      |

### Exercice 1 (5 points)

- 1) a) Résoudre dans  $\mathbb{C}$  l'équation (E) :  $z^2 - 2z + 4 = 0$ .  
b) Déterminer une écriture exponentielle de chacune des solutions de (E).
- 2) Dans le plan rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ , on considère le cercle  $(\Gamma)$  de centre O et de rayon 2 et le point A d'affixe 2.

Placer les points B et C d'affixes respectives  $2e^{i\frac{\pi}{3}}$  et  $2e^{-i\frac{\pi}{3}}$ .

- 3) Soit  $\theta \in ]-\pi, \pi]$  et M le point du cercle  $(\Gamma)$  d'affixe  $2e^{i\theta}$ .

On désigne par N le point de  $(\Gamma)$  tel que  $(\widehat{OM, ON}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ . Justifier que N a pour affixe  $2e^{i(\theta + \frac{\pi}{3})}$ .

- 4) Soit r la rotation de centre A et d'angle  $\frac{\pi}{3}$ .

- a) Vérifier que la rotation r a pour expression complexe :  $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}z + 2 - 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ .  
b) Soit F et K les milieux respectifs des segments [BM] et [CN]. Montrer que  $r(F) = K$ .  
c) En déduire la nature du triangle AFK.

- 5) a) Montrer que  $AF^2 = 4 - 2\sqrt{3} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ .

- b) En déduire l'affixe du point M pour laquelle AF est maximale et construire le triangle AFK correspondant.

### Exercice 2 (4 points)

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que  $(\widehat{AB, AC}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$  et  $(\widehat{BC, BA}) \equiv \frac{\pi}{3} [2\pi]$ .

- 1) Soit f la similitude directe de centre A qui envoie B sur C. Déterminer l'angle et le rapport de f.

2) Soit  $g$  la similitude indirecte de centre  $A$  qui envoie  $C$  sur  $B$ .

a) Déterminer le rapport de  $g$ .

b) Déterminer l'axe  $\Delta$  de  $g$ .

c) Soit  $D$  le point défini par  $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ .

Montrer que  $g(B) = D$  et en déduire que  $[BD)$  est la bissectrice intérieure de l'angle  $\widehat{ABC}$ .

3) a) Montrer que  $f \circ g$  est une symétrie axiale et préciser son axe.

b) On pose  $D' = f(D)$ . Montrer que  $D'$  est le symétrique de  $B$  par rapport à  $A$ .

4) La bissectrice intérieure de l'angle  $\widehat{CAD'}$  coupe la droite  $(CD')$  en un point  $J$ .

Soit  $I$  le centre du cercle inscrit dans le triangle  $ABC$ . Déterminer  $f(I)$ .

### Exercice 3 (4 points)

1) On considère dans  $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$  l'équation (E):  $47x + 53y = 1$ .

a) Vérifier que  $(-9, 8)$  est une solution de (E).

b) Résoudre l'équation (E).

c) Déterminer l'ensemble des inverses de 47 modulo 53.

d) En déduire que 44 est le plus petit inverse positif de 47 modulo 53.

2) a) Justifier que  $45^{52} \equiv 1 \pmod{53}$ .

b) Déterminer alors le reste de  $45^{106}$  modulo 53.

3) Soit  $N = 1 + 45 + 45^2 + \dots + 45^{105} = \sum_{k=0}^{105} 45^k$ .

a) Montrer que  $44N \equiv 10 \pmod{53}$ .

b) En déduire le reste de  $N$  modulo 53.

### Exercice 4 (7 points)

1- Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, \pi]$  par  $f(x) = e^{\sin x}$ .

On désigne par  $(C_f)$  la courbe représentative de  $f$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) a) Déterminer la dérivée  $f'$  et dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $[0, \pi]$ .

b) Montrer que la droite  $\Delta: x = \frac{\pi}{2}$  est un axe de symétrie de la courbe  $(C_f)$ .

c) Soit  $(T)$  la tangente à  $(C_f)$  au point d'abscisse 0.

Justifier que  $(T)$  a pour équation  $y = x + 1$ .

2) Soit la fonction  $g$  définie sur  $[0,1]$  par  $g(x) = e^x \sqrt{1-x^2} - 1$ .

On donne ci-contre le tableau de variation de  $g$ .

- a) Justifier que l'équation  $g(x) = 0$  admet dans l'intervalle  $]0,1[$  une solution unique  $\alpha$ .
- b) En déduire le signe de  $g(x)$  sur  $[0,1]$ .

|         |   |                                       |    |
|---------|---|---------------------------------------|----|
| $x$     | 0 | $\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$               | 1  |
| $g'(x)$ | + | 0                                     | -  |
| $g$     | 0 | $g\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)$ | -1 |

3) On se propose de déterminer la position relative de  $(C_f)$  et de sa tangente  $(T)$  au point d'abscisse 0 sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ .

Soit la fonction  $h$  définie sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  par  $h(x) = e^{\sin x} - (x+1)$ .

- a) Vérifier que pour tout  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $h'(x) = g(\sin x)$ .
- b) Montrer qu'il existe un unique réel  $\beta$  dans  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  tel que  $\sin \beta = \alpha$ .
- c) Déterminer alors l'image par la fonction sinus de chacun des intervalles  $[0, \beta]$  et  $\left[\beta, \frac{\pi}{2}\right]$ .
- d) Dresser le tableau de variation de  $h$ .
- e) En déduire que pour tout  $x$  de  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $f(x) \geq x+1$ . Conclure.

## II

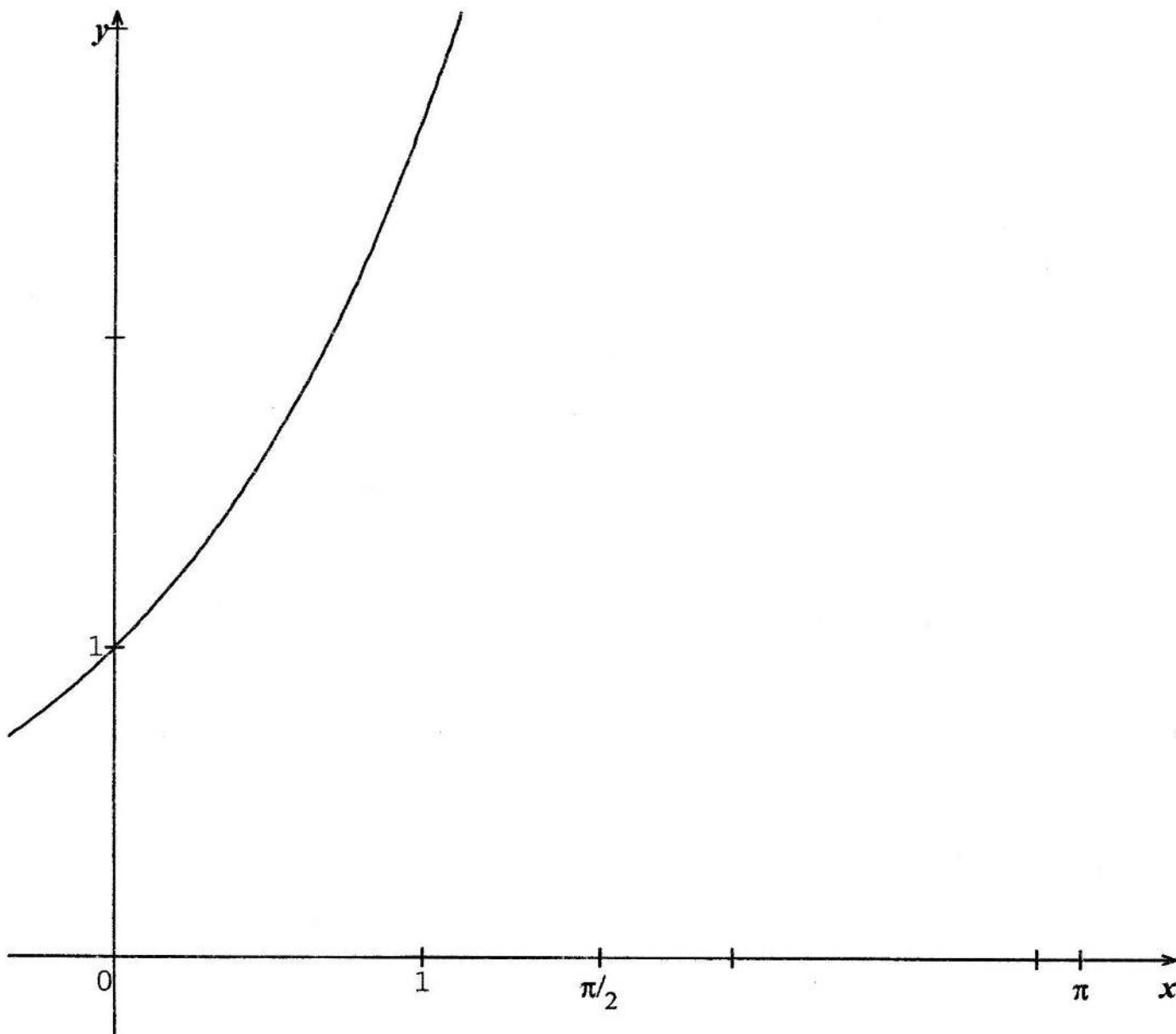
- 1) a) Montrer que pour tout réel  $x \geq 0$ ,  $\sin x \leq x$ .
- b) Déduire alors que pour tout réel  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $f(x) \leq e^x$ .
- c) Dans l'annexe ci-jointe, on a tracé la courbe de la fonction  $x \mapsto e^x$ .  
Tracer la droite  $(T)$  et la courbe  $(C_f)$ .

2) a) Montrer que  $\int_0^1 f(x) dx \leq e-1$  et que  $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq e\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$ .

b) Soit  $A$  l'aire de la partie du plan limitée par la courbe  $(C_f)$ , l'axe  $(O, \vec{i})$  et les droites

d'équations  $x=0$  et  $x=\pi$ . Montrer que  $\frac{\pi^2}{4} + \pi \leq A \leq e\pi - 2$ .

**Annexe (à rendre avec la copie)**



# MATHÉMATIQUES

Section : Mathématiques  
Session principale : juin 2015

## Exercice 1 (Thème : nombres complexes)

1) a)  $\Delta = 4 - 16 = -12 = (2\sqrt{3}i)^2$  ;  $z_1 = \frac{2 - 2\sqrt{3}i}{2} = 1 - i\sqrt{3}$  et  $z_2 = \frac{2 + 2\sqrt{3}i}{2} = 1 + i\sqrt{3}$ .

$$S_C = \{1 - i\sqrt{3}, 1 + i\sqrt{3}\}.$$

b)  $1 - i\sqrt{3} = 2e^{-i\frac{\pi}{3}}$  et  $1 + i\sqrt{3} = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$ .

2) voir figure.

3) On sait que  $N \in \Gamma$  donc  $|z_N| = 2$ .

De plus  $\arg(z_N) \equiv (\vec{u}, \vec{ON})[2\pi] \equiv (\vec{OM}, \vec{ON}) + (\vec{u}, \vec{OM})[2\pi] \equiv \theta + \frac{\pi}{3}[2\pi]$ .

Il en résulte que  $z_N = 2e^{i(\theta + \frac{\pi}{3})}$ .

4) a) L'expression complexe de  $r$  est  $z' = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - z_A) + z_A = e^{i\frac{\pi}{3}}(z - 2) + 2 = e^{i\frac{\pi}{3}}z - 2e^{i\frac{\pi}{3}} + 2$ .

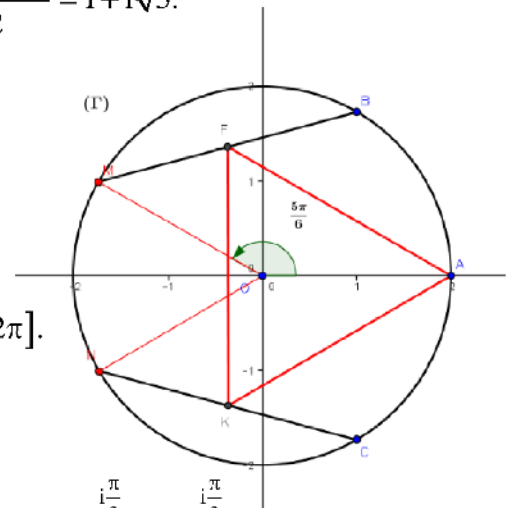
b)  $z_F = \frac{z_B + z_M}{2} = e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{3}}$  et  $z_K = \frac{z_C + z_N}{2} = e^{i(\theta + \frac{\pi}{3})} + e^{-i\frac{\pi}{3}}$ . En remplaçant  $z$  par  $z_F$  dans l'expression complexe de  $r$ , on obtient

$$\begin{aligned} z' &= e^{i\frac{\pi}{3}} \left( e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{3}} \right) - 2e^{i\frac{\pi}{3}} + 2 = e^{i(\theta + \frac{\pi}{3})} + e^{i\frac{2\pi}{3}} - 2e^{i\frac{\pi}{3}} + 2 \\ &= e^{i(\theta + \frac{\pi}{3})} - \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 2\left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2 = e^{i(\theta + \frac{\pi}{3})} + \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i(\theta + \frac{\pi}{3})} + e^{-i\frac{\pi}{3}} = z_K \text{ donc } r(F) = K. \end{aligned}$$

c) Puisque  $r(F) = K$  donc  $\begin{cases} AF = AK \\ (\vec{AF}, \vec{AK}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi] \end{cases}$ , il en résulte que le triangle AFK est équilatéral.

5) a)  $AF^2 = \left| e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{3}} - 2 \right|^2 = \left( e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{3}} - 2 \right) \left( e^{-i\theta} + e^{-i\frac{\pi}{3}} - 2 \right) =$   
 $6 + 2\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) - 4\cos\frac{\pi}{3} - 4\cos\theta = 4 - (3\cos\theta - \sqrt{3}\sin\theta)$   
 $= 4 - 2\sqrt{3}\cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right)$ .

b)  $AF^2$  est maximale si et seulement si  $\begin{cases} \cos\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = -1 \\ \theta \in ]-\pi, \pi] \end{cases}$  d'où  $\theta = \frac{5\pi}{6}$ .



$$a \cos x + b \sin x = r \cos(x - \varphi) ;$$

$$r = \sqrt{a^2 + b^2} \text{ et } \begin{cases} \cos \varphi = \frac{a}{r} \\ \sin \varphi = \frac{b}{r} \end{cases}$$

**Exercice 2 ( Thèmes : similitude indirecte ; similitude indirecte ; antidéplacement )**

1) Une mesure de l'angle de  $f$  est  $(\overline{AB}, \widehat{\overline{AC}}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$  et le rapport de  $f$  est  $\frac{AC}{AB} = \tan\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ .

2) a) Le rapport de  $g$  est  $\frac{AB}{AC} = \frac{\sqrt{3}}{3}$ .

b) L'axe  $\Delta$  de  $g$  est la droite qui porte la bissectrice intérieure de  $\widehat{CAB}$

c) On pose  $g(B) = B'$ . On sait que  $g \circ g = h_{\left(A, \frac{1}{3}\right)}$  et  $g \circ g(C) = B'$  donc  $h_{\left(A, \frac{1}{3}\right)}(C) = B' \Leftrightarrow \overline{AB'} = \frac{1}{3} \overline{AC}$ , or

$\overline{AD} = \frac{1}{3} \overline{AC}$ , on en déduit que  $D = B'$ . Ainsi  $g(B) = D$ .

si  $g$  est une similitude indirecte de centre  $\Omega$  et de rapport  $k$  ; alors :  $g \circ g$  est l'homothétie de centre  $\Omega$  et de rapport  $k^2$

Puisque  $g(B) = D$  donc  $\frac{AD}{AB} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \tan\left(\widehat{ABD}\right)$  d'où  $\widehat{ABD} = \frac{\pi}{6}$ , il en résulte que  $(BD)$  est la bissectrice intérieure de  $\widehat{ABC}$ .

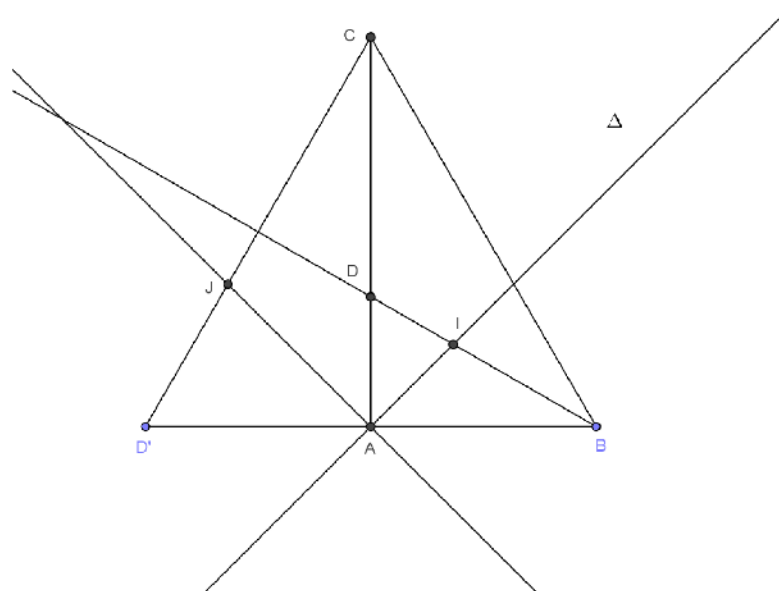
3) a)  $f \circ g$  est la composée d'une similitude directe de rapport  $\sqrt{3}$  et d'une similitude indirecte de rapport  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  donc  $f \circ g$  est un antidéplacement

la composée d'une similitude directe de rapport  $k$  et d'une similitude indirecte de rapport  $\frac{1}{k}$  est soit une symétrie orthogonale, soit une symétrie glissante.

or  $f \circ g(A) = A$  et  $f \circ g(C) = C$  donc  $f \circ g$  est une symétrie orthogonale d'axe  $(AC)$ .

b) On a  $f \circ g(B) = D'$  donc  $S_{(AC)}(B) = D'$  d'où  $(AC) \perp (BD')$  et  $(AC) \perp (BA)$  donc  $B, A$  et  $D'$  sont alignés or  $AB = AD'$  donc  $A$  est le milieu de  $[BD]$  et par suite  $S_A(B) = D'$ .

4)  $\{I\} = (BD) \cap \Delta$  donc  $f(I) \in f((BD)) \cap f(\Delta)$ , or  $f(\Delta) = S_{(AC)} \circ g^{-1}(\Delta) = S_{(AC)}(\Delta) = (AJ)$ . d'où  $f(I) \in (CD') \cap (AJ) = \{J\}$ .



### Exercice 3 ( Thème : arithmétique)

- 1) a)  $47 \times (-9) + 53 \times 8 = 1$  donc  $(-9, 8)$  est solution de (E).  
 b)  $47x + 53y = 47 \times (-9) + 53 \times 8 \Leftrightarrow 47(x + 9) = 53(8 - y)$  donc 47 divise  $53(8 - y)$  et  $47 \wedge 53 = 1$  donc 47 divise  $(8 - y)$  d'où  $y = 8 - 47k, k \in \mathbb{Z}$  par suite  $x = 53k - 9, k \in \mathbb{Z}$ .  
 Ainsi  $S_{\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}} = \{(53k - 9, 8 - 47k), k \in \mathbb{Z}\}$ .  
 c) soit  $x$  un inverse de 47 modulo 53, alors  $47x \equiv 1 \pmod{53} \Leftrightarrow$  il existe un entier  $y$  tel que  $47x = 1 + 53y \Leftrightarrow 47x - 53y = 1 \Leftrightarrow (x, -y)$  solution de (E) donc  $x = 53k - 9, k \in \mathbb{Z}$   
 d)  $0 < x = 53k - 9 < 53 \Leftrightarrow \frac{9}{53} < k < \frac{62}{53}, k \in \mathbb{Z}$  donc  $k = 1$  d'où  $x = 44$ .
- 2) a) D'après Fermat  $45^{52} \equiv 1 \pmod{53}$   
 b)  $45^{106} = (45^{52})^2 \times 45^2 \equiv 45^2 \pmod{53} \equiv 11 \pmod{53}$ .
- 3) a) N est la somme de 106 termes d'une suite géométrique de raison 45  
 donc  $N = \frac{1 - 45^{106}}{1 - 45} \Leftrightarrow 44N = 45^{106} - 1 \equiv 10 \pmod{53}$   
 b)  $44N \equiv 10 \pmod{53}$  donc  $N \equiv 470 \pmod{53} \equiv 46 \pmod{53}$ .

### Exercice 4 ( Thèmes : variation d'une fonction , bijection , calcul intégral , notion d'aire)

#### I.

- 1) a) La fonction  $f$  est dérivable sur  $[0, \pi]$  et  $f'(x) = (\cos x)e^{\sin x}$ .

|       |   |                 |       |
|-------|---|-----------------|-------|
| x     | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ |
| f'(x) | + | ○               | -     |
| f     | 1 | e               | 1     |

- b) Pour tout  $x \in [0, \pi]$ ,  $\pi - x \in [0, \pi]$  et  $f(\pi - x) = e^{\sin(\pi - x)} = e^{\sin x} = f(x)$ .  
 c) (T) :  $y = f'(0)x + f(0) = x + 1$ .
- 2) a) La fonction  $g$  est continue et strictement croissante sur  $\left]0, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right]$  donc  
 $g\left(\left]0, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right]\right) = \left]0, g\left(\frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right)\right]$  par suite  $g(x) > 0$  sur  $\left]0, \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}\right]$ .

La fonction  $g$  est continue et strictement décroissante sur  $\left] \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1 \right[$  donc elle réalise une bijection de  $\left] \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1 \right[$  sur  $g\left(\left] \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1 \right[ \right) = \left] -1, g\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \right[$ ,  $0 \in \left] -1, g\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right) \right[$  donc il existe un unique  $\alpha \in \left] \frac{-1+\sqrt{5}}{2}, 1 \right[$  tel que  $g(\alpha) = 0$ . Ainsi l'équation  $g(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in ]0, 1[$ .

b)

|      |   |          |   |
|------|---|----------|---|
| x    | 0 | $\alpha$ | 1 |
| g(x) | + | ○        | - |

3) a) La fonction  $h$  est dérivable sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  et  $h'(x) = (\cos x)e^{\sin x} - 1 = g(\sin x)$ .

b) La fonction  $x \mapsto \sin x$  est une bijection de  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  sur  $[0, 1]$ ,

or  $\alpha \in [0, 1]$  donc il existe un unique  $\beta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  tel que  $\sin \beta = \alpha$ .

la restriction de la fonction sinus à l'intervalle  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  est une bijection de  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  sur  $[0, 1]$

c) La fonction  $x \mapsto \sin x$  est continue et strictement croissante sur chacun des intervalles  $[0, \beta]$  et  $[0, \alpha]$  donc

$$\sin([0, \beta]) = [\sin 0, \sin \beta] = [0, \alpha] \text{ et } \sin\left(\left[\beta, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [\alpha, 1].$$

d)

|       |   |            |                               |
|-------|---|------------|-------------------------------|
| x     | 0 | $\beta$    | $\frac{\pi}{2}$               |
| h'(x) | + | ○          | -                             |
| h     | 0 | $h(\beta)$ | $h\left(\frac{\pi}{2}\right)$ |

e)  $h([0, \beta]) = [0, h(\beta)]$  et  $h\left(\left[\beta, \frac{\pi}{2}\right]\right) = \left[h\left(\frac{\pi}{2}\right), h(\beta)\right]$  et  $h\left(\frac{\pi}{2}\right) > 0$  donc  $h(x) \geq 0$  sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  par suite

$f(x) \geq x + 1$  sur  $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  donc  $(C_f)$  est en dessus de  $(T)$ .

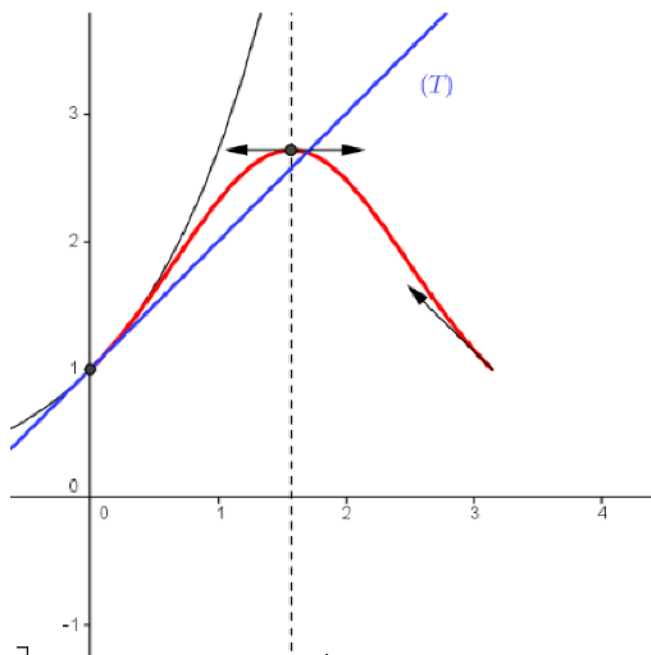
II.

1) a) pour tout  $x \geq 0$ ,  $\cos t \leq 1$ ,  $t \in [0, x]$  et  $t \mapsto \cos t$  est continue sur  $[0, x]$  donc  $\int_0^x \cos t dt \leq x$  donc  $\sin x \leq x$ .

b) La fonction  $x \mapsto e^x$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et  $\sin x \leq x$  pour tout  $x \geq 0$  donc

$$e^{\sin x} \leq e^x \Leftrightarrow f(x) \leq e^x \text{ pour tout } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

c)



2) a) on sait que  $f(x) \leq e^x$  pour tout  $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$  donc  $\int_0^1 f(x) dx \leq \left[e^x\right]_0^1 = e - 1$

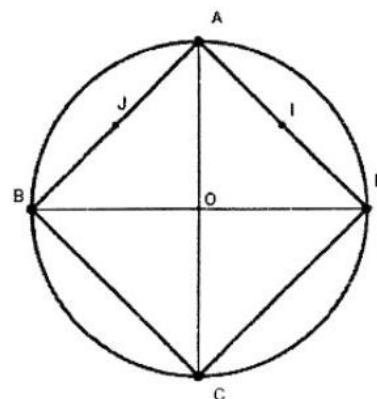
on sait que  $\sin x \leq 1$  donc  $f(x) \leq e$  donc  $\int_1^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq e \left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$ .

b)  $A = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx$

$$\left[ \frac{x^2}{2} + x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \leq \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx \leq e - 1 + e \left( \frac{\pi}{2} - 1 \right) \text{ donc } \frac{\pi^2}{4} + \pi \leq A \leq e\pi - 2$$

### Exercice 1 (4 points)

Le plan est orienté. Dans la figure ci-contre, ABCD est un carré inscrit dans le cercle (C) de centre O,  $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$  et I et J sont les milieux respectifs des segments [AD] et [AB].



1) Soit  $f$  la similitude directe qui envoie A sur B et I sur O.

a) Justifier que  $f$  est d'angle  $\frac{\pi}{4}$  et de rapport  $\sqrt{2}$ .

b) Déterminer le centre de  $f$ .

2) La droite (CJ) recoupe le cercle (C) en E et soit H le projeté orthogonal du point B sur (AE).

a) Justifier que E est le milieu du segment [AH] et en déduire que  $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = -EA^2$ .

b) Montrer d'autre part que  $\overrightarrow{EA} \cdot \overrightarrow{EB} = -\frac{\sqrt{2}}{2} EA \cdot EB$ .

3) On considère la similitude indirecte  $g$  de centre E qui envoie B sur A.

a) Déterminer le rapport de  $g$ .

b) Soit  $O' = g(O)$ . Justifier que le triangle  $O'EA$  est isocèle.

c) Montrer que  $O'A = AI$ .

4) Soit  $S = \text{gof}$ . Montrer que  $S$  est une symétrie orthogonale dont on précisera l'axe.

### Exercice 2 (5 points)

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  un repère orthonormé de l'espace.

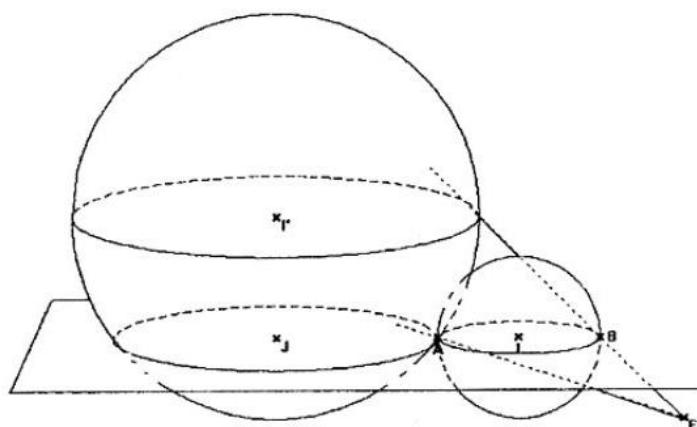
On considère les points  $A(-2, 3, 2)$  et  $B(2, 3, 2)$  et

l'ensemble S des points  $M(x, y, z)$  de l'espace

tels que  $x^2 + y^2 + z^2 - 6y - 4z + 9 = 0$ .

1) a) Montrer que S est une sphère et préciser son rayon et les coordonnées de son centre I.

b) Montrer que [AB] est un diamètre de S.



- 2) Soit  $P$  le plan d'équation  $z = 2$  et soit  $J(-6, 3, 2)$ .
- Vérifier que  $I$  appartient au plan  $P$  et en déduire que la sphère  $S$  coupe  $P$  suivant le cercle  $\Gamma$  de diamètre  $[AB]$ .
  - Dans le plan  $P$ , on considère le cercle  $\Gamma'$  de centre  $J$  et de rayon 4.  
Montrer que les cercles  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont tangents extérieurement en  $A$ .
- 3) Soit  $E$  le point de coordonnées  $(4, 3, 0)$ . On considère l'homothétie  $h$  de centre  $E$ , de rapport  $\frac{5}{2}$  et on désigne par  $S'$  la sphère image de  $S$  par  $h$ .
- Déterminer le rayon de  $S'$  et les coordonnées de son centre  $I'$ .
  - Justifier que le plan  $P$  coupe la sphère  $S'$  suivant le cercle  $\Gamma'$ .
  - La droite  $(EA)$  recoupe  $S'$  en  $A'$ . Soit  $B'$  le point diamétralement opposé à  $A'$  sur la sphère  $S'$ .  
Montrer que les points  $E$ ,  $B$  et  $B'$  sont alignés.

### Exercice 3 (4 points)

On a recensé, dans un pays, les dépenses en dinars des ménages en produits informatiques et téléphoniques de l'année 2004 jusqu'à l'année 2013.

Le tableau ci-dessous donne ces dépenses  $Y$  (en  $10^6$  dinars) suivant le rang de l'année  $X$ .

| Rang de l'année $X$       | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |
|---------------------------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| Dépenses $Y$ ( $10^6 D$ ) | 0.38 | 0.46 | 0.52 | 0.78 | 0.86 | 0.92 | 0.96 | 1.02 | 1.08 | 1.20 |

Dans l'annexe ci-jointe (Figure 1), on a représenté dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  le nuage de points de la série  $(X, Y)$ .

- On se propose d'ajuster la série double  $(X, Y)$  par la droite de Mayer. (Les valeurs seront arrondies au centième près).
  - Déterminer les coordonnées du point moyen  $G$  de ce nuage.
  - Soit  $G_1$  le point moyen des cinq premiers points du nuage. Calculer les coordonnées de  $G_1$ .
  - Tracer la droite  $(GG_1)$  dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .
  - Déterminer une équation de la droite  $(GG_1)$  sous la forme  $y = ax + b$ .
  - En utilisant l'ajustement de cette série par la droite de Mayer, donner une prévision des dépenses des ménages pour l'année 2019.
- On pose  $Z = e^Y$  et on obtient le tableau suivant :

| $X$ | 1    | 2    | 3    | 4    | 5    | 6    | 7    | 8    | 9    | 10   |
|-----|------|------|------|------|------|------|------|------|------|------|
| $Z$ | 1.46 | 1.58 | 1.68 | 2.18 | 2.36 | 2.51 | 2.61 | 2.77 | 2.95 | 3.32 |

- Déterminer le coefficient de corrélation  $r$  de la série  $(X, Z)$ .
- Ecrire une équation de la droite affine de  $Z$  en  $X$  par la méthode des moindres carrés. (les coefficients de la droite seront arrondis au centième).
- En utilisant cet ajustement, donner une prévision des dépenses de l'année 2019.

### Exercice 4 (7 points)

I- 1) Soit la fonction  $u$  définie sur  $]0, +\infty[$  par  $u(t) = 3 \ln(1+t) - \frac{t}{1+t}$ .

- Dresser le tableau de variation de la fonction  $u$ .
- En déduire le signe de  $u$ .

2) Soit la fonction  $f$  définie sur  $[0, 1]$  par : 
$$\begin{cases} f(x) = x^3 [\ln(1+x) - \ln x] & \text{si } x \in ]0, 1] \\ f(0) = 0 \end{cases}$$

- Montrer que  $f$  est continue et dérivable à droite en 0 et calculer  $f'_d(0)$ .
- Vérifier que pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,  $f'(x) = x^2 u\left(\frac{1}{x}\right)$ .
- Dresser le tableau de variation de la fonction  $f$ .

II- On considère les fonctions  $g$  et  $h$  définies sur  $[0, 1]$  par

$$g(x) = x^3 \ln(x+1) \quad \text{et} \quad \begin{cases} h(x) = x^3 \ln x & \text{si } x \in ]0, 1] \\ h(0) = 0 \end{cases}$$

On désigne respectivement par  $(C_f)$ ,  $(C_g)$  et  $(C_h)$  les courbes des fonctions  $f$ ,  $g$  et  $h$  dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

1) Montrer que la courbe  $(C_h)$  admet une tangente horizontale au point d'abscisse  $e^{-\frac{1}{3}}$ .

2) a) Vérifier que pour tout réel  $x$  de  $[0, 1]$  ;  $f(x) = g(x) - h(x)$ .

b) Donner la position relative des courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$ .

c) Soit  $T$  et  $T'$  les tangentes respectives à  $(C_f)$  et  $(C_g)$  aux points d'abscisse  $e^{-\frac{1}{3}}$ .

Montrer que  $T$  et  $T'$  sont parallèles.

3) Dans l'annexe ci-jointe (Figure2), on a tracé dans le repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  les courbes  $(C_g)$  et  $(C_h)$  et leurs tangentes aux points d'abscisse  $e^{-\frac{1}{3}}$ .

a) Construire le point de  $(C_f)$  d'abscisse  $e^{-\frac{1}{3}}$  et la tangente  $(T)$ .

b) Tracer la courbe  $(C_f)$ .

4) a) Justifier que  $h$  admet une unique primitive  $H$  sur l'intervalle  $[0, 1]$  qui s'annule en 1.

b) Soit  $\alpha \in ]0, 1]$  et  $A_\alpha = \int_\alpha^1 x^3 \ln x dx$ . Exprimer  $A_\alpha$  en fonction de  $H$ .

c) Calculer  $A_\alpha$  à l'aide d'une intégration par parties.

d) En déduire  $H(0)$ .

e) Déterminer alors l'aire de la partie du plan limitée par les deux courbes  $(C_f)$  et  $(C_g)$  et les droites d'équations  $x = 0$  et  $x = 1$ .

**Section : Mathématiques**  
**Session de contrôle : juin 2015**

**Exercice 1** (Thèmes : similitude directe ; similitude indirecte ; antidéplacement)

1) a) Une mesure de l'angle de  $f$  est  $(\overline{AI}, \widehat{\overline{BO}}) \equiv (\overline{AD}, \widehat{\overline{BD}})[2\pi] \equiv (\overline{DA}, \widehat{\overline{DB}})[2\pi] \equiv \frac{\pi}{4}[2\pi]$ .

Le rapport de f est  $\frac{OB}{AI} = \frac{\frac{1}{2}DB}{\frac{1}{2}AD} = \frac{DB}{AD} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{4}} = \sqrt{2}$ .

b)  $\frac{DB}{AD} = \sqrt{2}$  et  $(\overrightarrow{DA}, \overrightarrow{DB}) \equiv \frac{\pi}{4} [2\pi]$ , il en résulte que D est le centre de f.

2) a)  $[AC]$  est un diamètre de  $(\zeta)$  et  $E \in (\zeta) \setminus \{A, C\}$  donc  $(CE) \perp (AE)$  et  $(BH) \perp (AE)$  donc  $(BH) \parallel (CE)$ ,  
or  $(CE)$  passe par  $J$  le milieu de  $[AB]$  et coupe  $[AH]$  en  $E$ , il en résulte que  $E$  est le milieu de  $[AH]$ .

$$\overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EB} = \overrightarrow{EA}, \overrightarrow{EH} = -EA \times EH = -EA^2.$$

$$\text{b) } \vec{EA} \cdot \vec{EB} = EA \cdot EB \cdot \cos(\angle AEB) = EA \cdot EB \cdot \cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} EA \cdot EB.$$

$$\text{car}(\overrightarrow{\text{EB}}, \overrightarrow{\text{EA}}) \equiv \pi + (\overrightarrow{\text{CB}}, \overrightarrow{\text{CA}}) \equiv \frac{3\pi}{4} [2\pi].$$

3) a) Le rapport de g est  $\frac{EA}{EB} = \frac{EH}{\sqrt{2}EH} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ .

b) Le triangle OEB est isocèle donc son image par  $g$  est un triangle isocèle, on en déduit que le triangle O'EA est isocèle.

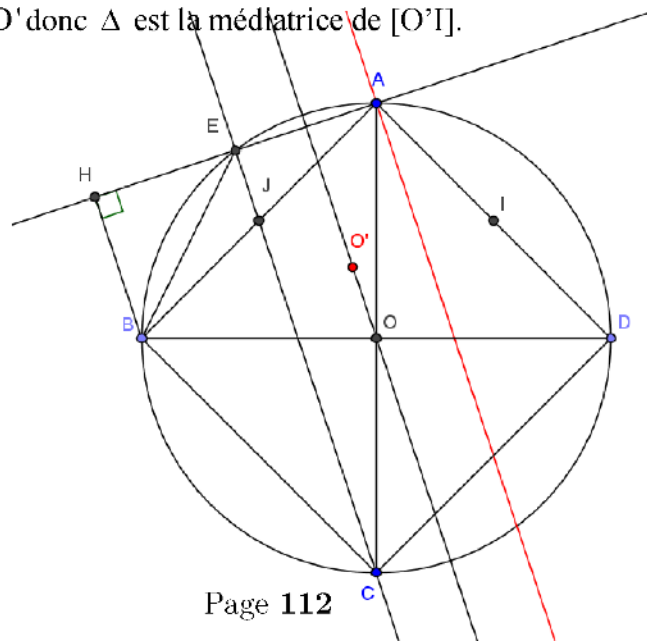
c) On sait que  $f(A) = B$  et  $f(I) = O$  donc  $AI = \frac{1}{\sqrt{2}}OB$  de plus

$g(B) = A$  et  $g(O) = O'$  donc  $AO' = \frac{1}{\sqrt{2}}OB$ , il en résulte que  $O'A = AI$ .

4) S est la composée d'une similitude directe de rapport  $\sqrt{2}$  est d'une similitude indirecte de rapport  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  donc

S est une similitude indirecte de rapport 1 donc S est un antidéplacement.

$S(A) = g(f(A)) = g(B) = A$ , il en résulte que  $S$  est une symétrie orthogonale d'axe  $\Delta$  qui passe par  $O$  de plus  $S(I) = g(f(I)) = g(O) = O'$  donc  $\Delta$  est la médiatrice de  $[O'I]$ .



## Exercice 2 (Thèmes : sphère ; homothétie dans l'espace)

- 1) a)  $M(x, y, z) \in S \Leftrightarrow x^2 + (y-3)^2 + (z-2)^2 = 4$ , on en déduit que  $S$  est la sphère de centre  $I(0, 3, 2)$  et de rayon 2.  
 b) Il suffit de vérifier que  $A \in S$ ,  $B \in S$  et  $I$  est le milieu de  $[AB]$ .
- 2) a) La cote du point  $I$  est 2 donc  $I \in P$  par suite  $S$  coupe  $P$  suivant le cercle  $\Gamma$  de centre  $I$  et de rayon 2, or  $A$  et  $B$  appartiennent à  $P$  et  $I$  est le milieu de  $[AB]$ , donc  $[AB]$  est un diamètre de  $\Gamma$ .  
 b)  $IA = 2$ ,  $JA = 4$  et  $IJ = 6$  donc  $IA + JA = IJ$  par suite  $\Gamma$  et  $\Gamma'$  sont tangents extérieurement en  $A$ .
- 3) a) Le rayon de  $S'$  est égal à  $\frac{5}{2} \times 2 = 5$ . On pose  $I'(x, y, z)$ ,  

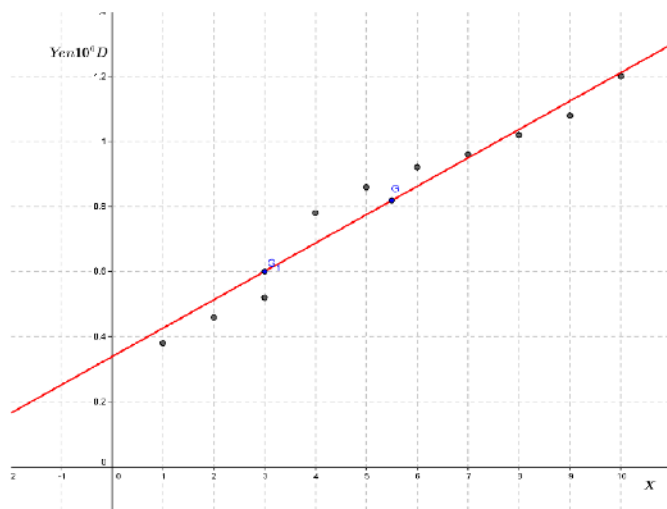
$$h(I) = I' \Leftrightarrow \overrightarrow{EI'} = \frac{5}{2} \overrightarrow{EI} \Leftrightarrow \begin{cases} x - 4 = -10 \\ y - 3 = 0 \\ z = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -6 \\ y = 3 \\ z = 5 \end{cases}, \text{ il en résulte que } I'(-6, 3, 5).$$
  
 b)  $d(I', P) = 3 < 5$  donc  $S'$  coupe  $P$  suivant un cercle de rayon  $\sqrt{25 - 9} = 4$  et de centre le projeté orthogonal de  $I'$  sur  $P$ , or  $J$  est un point de  $P$  et  $\overrightarrow{I'J} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$  est normal à  $P$  donc  $J$  est le projeté orthogonal de  $I'$  sur  $P$ , il en résulte que  $P$  coupe  $S'$  suivant le cercle  $\Gamma'$ .  
 c)  $A \in S \cap (EA)$  donc  $h(A) \in S' \cap (EA) = \{A, A'\}$  or  $h(A) \neq A$  donc  $h(A) = A'$ .  
 $B$  est le point diamétralement opposé à  $A$  sur  $S$  donc  $h(B)$  est le point diamétralement opposé à  $A'$  sur  $S'$ , on en déduit que  $h(B) = B'$  par suite  $E, B$  et  $B'$  sont alignés.

## Exercice 3 (Thème : statistique à deux variables)

- 1) a)  $G(\overline{X}, \overline{Y})$  donc  $G(5.5, 0.818)$ .

b)  $G_1(3, 0.6)$ .

c)



d)  $a = \frac{0.6 - 0.818}{3 - 5.5} = 0.09$  donc  $(GG_1): y = 0.0872x + b$  or  $G_1 \in (GG_1)$

donc  $0.6 = 0.09 \times 3 + b \Leftrightarrow b = 0.33$ , il en résulte que  $(GG_1): y = 0.09x + 0.33$ .

e) Pour  $x = 16$ , on obtient  $y = 1.77$ .

2) a)  $r = \frac{\text{cov}(X, Z)}{\sigma_X \sigma_Z} = 0.987$ .

b)  $Z = bX + a$  avec  $b = \frac{\text{cov}(X, Z)}{\sigma_X^2} = 0.2$  et  $a = \bar{Z} - b\bar{X} = 1.23$ . Ainsi  $Z = 0.2X + 1.23$

c)  $Z = 0.2X + 1.23 \Leftrightarrow e^Y = 0.2X + 1.23 \Leftrightarrow Y = \ln(0.2X + 1.23)$ . Pour  $x = 16$ , on obtient  $y = 1.488399584$ .

#### **Exercice 4 (Thèmes : variation d'une fonction ; notion de primitive ; notion d'aire)**

I. 1) a) Pour tout  $t > 0$ ,  $u'(t) = \frac{3}{1+t} - \frac{1}{(1+t)^2} = \frac{2+3t}{(1+t)^2} > 0$ .

|         |   |                    |
|---------|---|--------------------|
| x       | 0 | $+\infty$          |
| $u'(t)$ |   | +                  |
| u       | 0 | $\nearrow +\infty$ |

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} u(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} 3 \ln(1+t) - \frac{1}{\frac{1}{t} + 1} = +\infty.$$

b)  $u(]0, +\infty[) = ]0, +\infty[$  donc  $u(t) > 0$  pour tout  $t > 0$ .

2) a)  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = x^3 \ln(1+x) - x^3 \ln x = 0 = f(0)$  donc  $f$  est continue à droite en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x)}{x} = x^2 \ln(1+x) - x^2 \ln x = 0 = f'_d(0) \text{ donc } f \text{ est dérivable à droite en 0.}$$

b) Pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,  $f'(x) = 3x^2 [\ln(1+x) - \ln x] + x^3 \left[ \frac{1}{1+x} - \frac{1}{x} \right]$

$$= x^2 \left[ 3 \ln \left( 1 + \frac{1}{x} \right) - \frac{\frac{1}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \right] = x^2 u \left( \frac{1}{x} \right).$$

c) On a  $u(x) > 0$  pour tout  $x > 0$  donc  $u\left(\frac{1}{x}\right) > 0$  pour tout  $x \in ]0, 1]$  d'où  $f'(x) > 0$  pour tout  $x \in ]0, 1]$

|         |   |                  |
|---------|---|------------------|
| x       | 0 | 1                |
| $f'(x)$ | 0 | +                |
| f       | 0 | $\nearrow \ln 2$ |

II. 1) Pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,  $h'(x) = 3x^2 \ln x + x^2 = x^2 (3 \ln x + 1)$ .

Pour tout  $x \in ]0, 1]$ ,  $h'(x) = 0 \Leftrightarrow \ln x = -\frac{1}{3} \Leftrightarrow x = e^{-\frac{1}{3}}$ . On en déduit que  $(C_h)$  admet une tangente

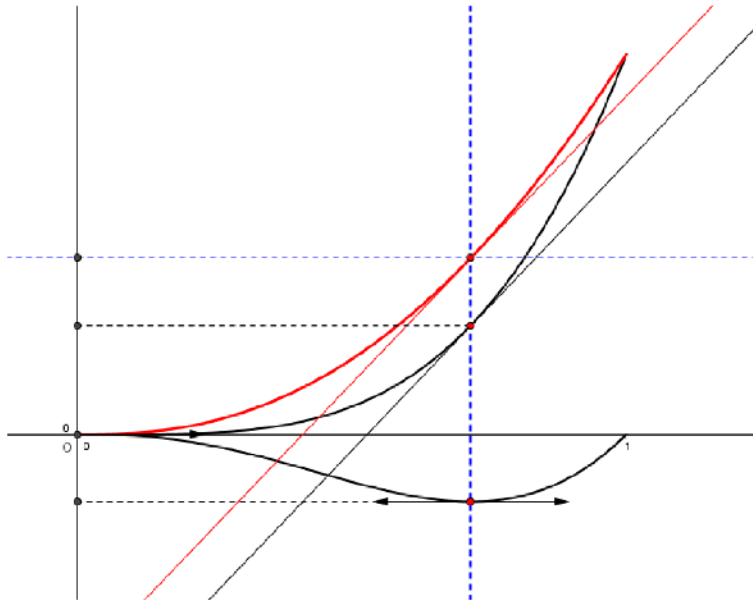
horizontale au point d'abscisse  $e^{-\frac{1}{3}}$ .

2) a) Pour tout  $x \in ]0,1]$ ,  $f(x) = x^3 \ln(1+x) - x^3 \ln x = g(x) - h(x)$  et  $f(0) = g(0) - h(0)$  donc pour tout  $x \in [0,1]$ ,  $f(x) = g(x) - h(x)$ .

b) Pour tout  $x \in [0,1]$ ,  $f(x) - g(x) = -h(x) \geq 0$  donc  $(C_f)$  est au-dessus de  $(C_g)$  et les points  $(0,0)$  et  $(1, \ln 2)$  sont des points d'intersection.

c)  $f'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) - g'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = -h'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = 0 \Leftrightarrow f'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right) = g'\left(e^{-\frac{1}{3}}\right)$  donc  $T \perp T'$ .

3)



4) a) La fonction  $h$  est continue sur  $[0,1]$  donc elle admet une unique primitive  $H$  qui s'annule en 1.

b)  $A(\alpha) = H(1) - H(\alpha) = -H(\alpha)$ .

c) On pose  $\begin{cases} u(x) = \ln x \\ v'(x) = x^3 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ v(x) = \frac{x^4}{4} \end{cases}$

$$A(\alpha) = \left[ \frac{x^4}{4} \ln x \right]_{\alpha}^1 - \frac{1}{4} \int_{\alpha}^1 x^3 dx = -\frac{\alpha^4}{4} \ln \alpha - \frac{1}{16} [x^4]_{\alpha}^1 = -\frac{\alpha^4}{4} \ln \alpha - \frac{1}{16} + \frac{1}{16} \alpha^4.$$

d)  $H(0) = \lim_{\alpha \rightarrow 0^+} -A(\alpha) = \frac{1}{16}$ .

e)  $A = \int_0^1 (f(x) - g(x)) dx = -\int_0^1 h(x) dx = H(0) = \frac{1}{16}$ .

# Index alphabétique

## A

affiche:2,7,12,30,40,48,67,68,79,100,  
aléatoire:17,18,46,66,  
antidéplacement:2,6,11,25,45,58,105,112,  
arbre:18,31,66,72,  
asymptote:75,86,

## B

bijection:13,32,37,47,54,63,68,75,80,86,91,97,106,107,  
binôme:85,  
binomiale:35,  
bissectrice:23,25,26,34,59,67,74,101,105,  
boule:17,18,  
branche:8,62,75,86,

## C

carré:11,109,110,  
centre:2,6,11,12,16,21,22,25,26,27,30,39,40,45,48,52,53,58,59,60,66,67,68,72,73,74,78,84,88,89,  
94,100,101,105,109,110,112,113,  
cercle:12,16,21,22,25,26,39,40,45,48,53,60,68,73,74,78,79,83,89,100,109,110,113,  
chiffre:3,12,90,  
circonscrit:16,45,60,68,  
coefficient:110  
colinéaires:7,  
comparaison:77,  
complexe:12,48,79,100,104,  
conjuguées:67,  
continue:28,32,36,37,38,40,47,63,64,80,81,86,87,97,106,107,111,114,115,  
convergente:3,23,30,80,  
cos:2,89,95,97,98,100,104,106,107,112,  
cotan:84,  
coupe:2,6,7,16,21,22,31,39,45,46,52,53,60,68,75,78,89,101,109,110,112,113,  
courbe:3,4,7,8,13,18,23,32,36,38,40,41,46,47,54,55,62,68,69,75,80,90,91,97,101,102,111,  
croissante:13,28,32,37,38,62,63,75,76,86,97,106,107,108,  
cube:53,79,85,

## D

dérivable:4,13,18,19,23,28,32,36,37,54,62,63,64,81,86,87,90,91,95,96,97,98,106,107,111,114,

## E

ellipse:48,89,  
équation:3,4,7,8,13,17,22,23,26,29,31,32,40,46,47,48,53,54,55,60,61,67,68,69,74,75,79,80,81,86,8  
9,90,91,100,101,102,107,110,111,  
équilatéral:16,45,52,66,72,94,104,  
exponentielle:7,91,100,  
 $e^x$ : 7,23,32,37,54,55,62,63,64,81,87,102,108,

## F

fonction:3,4,7,8,13,18,19,23,28,32,40,46,47,54,55,61,62,63,64,68,69,75,77,80,81,86,87,89,90,91,95  
,96,97,98,  
101,102,106,107,108,111,114,115,

## G

Gauss:27,36,61,

géométrique:29,106,  
 glissante:2,6,11,30,45,94,105,  
 H  
 homothétie:22,26,27,30,35,39,45,52,53,58,59,72,88,105,110,113,  
 horizontale:36,111,114,  
 I  
 image:2,3,11,12,21,30,39,53,60,66,68,72,78,79,83,84,88,94,95,102,110,112,  
 impair:12,41,  
 inéquations:7,  
 inflexion:32,37,54,62,90,97,  
 intégration:4,41,111,  
 intervalle:3,13,41,68,80,102,107,111,  
 isocèle:6,11,21,26,34,45,58,67,72,109,112,  
 isométrie:30,34,  
 L  
 lim:3,4,8,13,18,19,23,28,29,30,32,35,36,37,38,41,47,54,55,62,63,64,65,68,69,75,77,80,81,86,87,90,  
 91,96,97,102,111,114,115,  
 ln (log népérien):3,37,40,47,90,91,96,98,111,114,115  
 losange:6,21,25,88,94,  
 M  
 mayer:110,  
 médiatrice:26,30,45,66,68,74,78,83,112,  
 mod:3,6,12,17,27,28,41,42,53,54,60,61,62,75,79,85,89,96,101,106,  
 modulo:6,12,17,53,60,79,85,96,101,106,  
 O  
 orienté:2,6,11,16,39,45,52,53,66,78,83,88,100,109,  
 orthogonal:6,11,12,16,26,39,58,83,94,105,109,112,113,  
 orthonormé:2,3,4,7,12,13,18,21,22,23,30,31,32,40,46,47,48,53,54,55,67,68,79,80,89,90,91,100,101  
 ,109,111,  
 P  
 paire:36,37,  
 pairs:42,  
 parallèle:21,53,59,60,111,  
 paramètre:  
 paramétrique:31,  
 parité:32,  
 perpendiculaire:2,67,72,74,  
 plan:2,3,4,6,7,8,11,12,13,16,21,22,23,26,29,30,31,32,39,41,45,46,48,52,53,55,59,60,66,67,68,75,78  
 ,80,81,88,89,91,100,102,109,110,111,  
 pondéré:31,  
 positif:58,79,84,101,  
 positive:32,38,68,  
 position:40,47,54,102,111,  
 premier:27,29,53,60,61,89,90,96,110,  
 première:18,23,  
 prévision:110,  
 primitive:13,63,81,87,111,114,115,  
 projeté:12,26,39,52,109,113,  
 Pythagore:25,  
 Q  
 quadrilatère:11,78,83,  
 R

raison:29,36,77,106,  
 rapport:2,7,11,16,21,22,25,26,27,30,34,39,45,48,52,53,54,58,59,66,67,72,84,88,94,100,101,105,109,  
 110,112,  
 rayon:12,22,25,26,40,48,53,60,89,100,109,110,113,  
 réciproque:16,23,27,28,32,36,54,62,91,  
 rectangle:2,6,11,25,30,34,39,45,58,60,67,72,78,83,84,88,95,  
 récurrence:3,6,79,  
 réel:7,13,23,38,40,41,48,68,69,79,80,84,87,89,102,111,  
 repère:2,3,4,7,8,12,13,18,21,22,23,30,31,32,40,46,47,48,53,54,55,67,68,69,79,80,89,90,91,100,101,  
 109,110,111,  
 restriction:80,107,  
 résultat:3,8,13,17,18,32,85,90,  
 S  
 sécants:26,36,58,  
 segment:2,6,16,21,30,34,35,39,45,48,53,60,66,67,68,74,78,88,100,109,  
 sens:2,6,29,  
 similitude:12,16,21,25,30,34,45,52,58,59,66,67,72,73,78,83,84,88,94,100,101,105,109,112,  
 sin:8,46,58,62,75,89,91,95,98,101,102,104,106,107,108,  
 sinus:102,107,  
 sommet:21,66,  
 solutions:7,17,22,28,48,54,61,62,67,68,79,80,86,90,100,  
 successifs:31,46,  
 suite:2,3,12,18,23,25,26,27,28,29,30,31,36,41,48,58,60,61,63,72,76,77,79,80,87,94,97,105,106,107,  
 113,  
 symétrie:2,6,11,16,29,30,36,45,83,94,101,105,109,112,  
 symétrique:2,11,94,101,  
 système:6,22,31,54,62,  
 T  
 tan:2,6,11,17,18,21,25,30,34,36,39,45,54,58,60,62,63,67,68,69,72,78,83,84,86,88,89,94,95,97,101,  
 102,105,110,111,113,114,  
 tangente:21,25,36,62,68,69,89,97,101,102,111,114,  
 tétraèdre:53,59,60,  
 terme:29,106,  
 Thales:25,  
 théorème:25,27,77  
 transformant:22,  
 transforme:27,30,34,  
 translation:3,  
 triangle:6,11,16,21,25,30,34,39,45,52,53,58,59,60,66,67,68,72,78,84,94,100,101,104,109,112,  
 triplet:41,42,  
 truquées:46,  
 U  
 unique:2,3,13,30,31,86,102,107,111,115,  
 urne:17,46,  
 V  
 variable:18,46,113,  
 variation:3,8,13,18,32,40,47,54,68,75,80,90,96,101,102,106,111,114,  
 varie:12,48,  
 vecteur:7,11,26,60,94,  
 verticale:75,97,  
 voisinage:8,62,75,  
 volume:38,53,59

## **Index des verbes concernant les Questions :**

calculer:3,4,8,31,32,39,47,52,53,54,68,80,110,111,

Comparer:2,3,

construire:2,6,7,12,16,30,32,40,45,47,48,52,67,68,69,78,79,89,91,100,111,

déduire:2,3,4,6,8,11,12,13,14,16,18,19,21,22,23,31,32,39,41,42,47,48,52,53,54,55,66,67,68,79,89,  
90,91,100,101,102,109,110,111,

déterminer:2,3,6,7,8,11,12,13,16,17,18,19,21,22,23,30,31,32,39,40,41,42,46,47,48,52,53,54,55,67,6  
9,78,80,88,89,100,101,102,109,110,111,

interpréter:3,8,13,18,32,40,47,54,68,80,90,

Justifier:2,3,4,8,11,12,16,22,32,39,45,48,52,67,68,81,89,90,100,101,102,109,110,111,

montrer:2,3,4,6,7,8,11,12,13,14,16,17,18,19,21,22,23,30,31,32,39,40,41,42,45,46,47,48,52,53,54,55  
66,67,68,69,78,79,80,81,88,89,90,91,100,101,102,109,110,111,

préciser:3,11,12,13,21,22,45,52,53,68,101,109,

prouver:11,16,68,

résoudre:6,7,22,31,48,54,68,79,90,100,101,

Tracer:3,8,13,18,23,40,47,54,80,91,102,110,111,

Traduire:31,

vérifier:3,6,7,12,13,19,21,22,30,31,40,41,47,48,52,54,55,67,68,74,77,79,88,89,90,91,100,101,102  
,110,111,113,