

NOMBRES COMPLEXES

Résultats à retenir :

1°/ Soit $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ $\bar{z} = x - iy$; $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$;

$$z \cdot \bar{z} = |z|^2$$

2°/ a) $\forall z \in \mathbb{C}^* : z = |z|(\cos \alpha + i \sin \alpha)$; $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\arg z \equiv \alpha(2\pi)$$

b) $|z| = r$; $\arg z \equiv \theta(2\pi) \Leftrightarrow z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$

3°/ $\arg(z_1 z_2) \equiv \arg z_1 + \arg z_2(2\pi)$

$$\arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) \equiv \arg z_1 - \arg z_2(2\pi) \quad \arg(\bar{z}) \equiv -\arg z(2\pi)$$

4°/ $\arg(z) \equiv 0(2\pi) \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}_+^*$

$$\arg(z) \equiv 0(\pi) \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}^*$$

5°/ a) Soit $\mathcal{R}(\mathbf{o}, \vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{j}})$ un repère orthonormé

$$\mathbf{M}(x, y) \Leftrightarrow \mathbf{M} \text{ d'affixe } z = x + iy = z_M$$

b) $\vec{\mathbf{AB}} = \alpha \vec{\mathbf{CD}} + \beta \vec{\mathbf{EF}} \Leftrightarrow z_B - z_A = \alpha(z_D - z_C) + \beta(z_F - z_E)$

c) $AB = \|\vec{\mathbf{AB}}\| = |z_B - z_A| \quad (\vec{\mathbf{i}}, \vec{\mathbf{OM}}) \equiv \arg z_M(2\pi)$

$$(\vec{\mathbf{AB}}, \vec{\mathbf{CD}}) \equiv \arg\left(\frac{z_D - z_C}{z_B - z_A}\right)(2\pi)$$

$$6°/ (E) : z^2 = a + ib \text{ avec } (a, b) \in \mathbb{R}^2 \Leftrightarrow \begin{cases} z = x + iy \\ x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}$$

ce système nous permet de trouver les solutions de (E).

$$7^{\circ} / az^2 + bz + c = 0 \quad (a \neq 0) \quad ; \quad \Delta = b^2 - 4ac = d^2$$

$$z' = \frac{-b-d}{2a} ; \quad z'' = \frac{-b+d}{2a} ; \quad z' + z'' = \frac{-b}{a} ; \quad z' z'' = \frac{c}{a}$$

$$8^{\circ} / z^n = a + ib = [\rho, \theta] \Leftrightarrow z = \left[\sqrt[n]{\rho}, \frac{\theta + 2k\pi}{n} \right] \quad \text{où}$$

$$k \in \{0, 1, 2, \dots, (n-1)\} \quad (n \geq 2)$$

9°/ Les points A, B, C, D non alignés sont cocycliques si :

$$\arg\left(\frac{z_D - z_B}{z_D - z_A}\right) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_B}{z_C - z_A}\right) (\pi)$$