

CONTINUITE ET LIMITES

Résultats à retenir :

- Toute fonction polynôme est continue en tout réel .
- Toute fonction rationnelle est continue en tout réel de son ensemble de définition .
- Les fonctions $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ sont continues en tout réel .
- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I , sauf peut-être en un réel a de I .

S'il existe une fonction g définie sur I , continue en a et telle que $g(x) = f(x)$ pour tout $x \neq a$, alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = g(a)$.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

- Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est continue en un réel a de I , si et seulement si, $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$.
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x}$ est infinie, alors C_f admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{j})$ au voisinage de $+\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, alors C_f admet une branche parabolique de direction $(O, \vec{i})$ au voisinage de $+\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = a$ ($a \in \mathbb{R}^*$) alors deux cas peuvent se présenter selon $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$.
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax) = b$ ($b \in \mathbb{R}$) alors la droite d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.
- Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - ax)$ est infinie alors la droite d'équation $y = ax$ est une direction asymptotique à la courbe C_f au voisinage de $+\infty$.

- Soit u et v deux fonctions . soit a , b et c finis ou infinis .
Si $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = b$ et $\lim_{x \rightarrow b} v(x) = c$ alors $\lim_{x \rightarrow a} v \circ u(x) = c$
- Soit f , u et v trois fonctions définies sur un intervalle I sauf peut-être en un réel a de I .
Soit deux réels ℓ et ℓ' .
 - Si $u(x) \leq v(x)$ pour tout $x \neq a$ et si $\lim_a u = \ell$ et $\lim_a v = \ell'$
alors $\ell \leq \ell'$.
 - Si $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ pour tout $x \neq a$ et si $\lim_a u = \lim_a v = \ell$
alors $\lim_a f = \ell$.

Les résultats énoncés ci-dessous restent valables lorsque l'on considère des limites à l'infini , à droite en a ou à gauche en a .

- Soit f et u deux fonctions définies sur un intervalle I sauf peut être en un réel a de I .
 - Si $f(x) \geq u(x)$ pour tout $x \neq a$ et si $\lim_{x \rightarrow a} u = +\infty$, alors
 $\lim_a f = +\infty$.
 - Si $f(x) \leq u(x)$ pour tout $x \neq a$ et si $\lim_{x \rightarrow a} u = -\infty$, alors
 $\lim_a f = -\infty$.

Ces résultats restent valables lorsque l'on considère des limites à l'infini, à droite en a ou à gauche en a .

- L'image d'un intervalle par une fonction continue est un intervalle.

Théorème des valeurs intermédiaires

Soit f une fonction continue sur un intervalle I .

Soit a et b deux réels de I tels que $a < b$.

Pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ possède au moins une solution dans l'intervalle $[a, b]$.

En particulier , si $f(a) \cdot f(b) < 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ admet au moins une solution dans $]a, b[$.

- Soit f une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I .
Soit a et b deux réels de I tel que $a < b$. Alors pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$ l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $]a, b[$.
- Soit f une fonction continue sur un intervalle I .
Si la fonction f ne s'annule en aucun point de I alors elle garde un signe constant sur I .
- L'image d'un intervalle fermé borné $[a, b]$ par une fonction continue est un intervalle fermé borné $[m, M]$.
 - ♦ Le réel m est le minimum de f sur $[a, b]$.
 - ♦ Le réel M est le maximum de f sur $[a, b]$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $[a, b[$ (b fini ou infini).
 - ♦ Si la fonction f est croissante et majorée alors f possède une limite finie en b .
 - ♦ Si la fonction f est croissante et non majorée alors f possède une limite finie en b .
- Soit f une fonction définie sur un intervalle de type $]a, b]$ (a fini ou infini).
 - ♦ Si la fonction f est décroissante et minorée alors f possède une limite finie en a .
 - ♦ Si la fonction f est décroissante et non minorée alors f tend vers $-\infty$ en a .
- L'image d'un intervalle I par une fonction continue et monotone sur I est un intervalle de même nature.