

**Notion de matrice :**

n et p étant deux entiers naturels non nuls, une matrice d'ordre $n \times p$ est un tableau de nombres réels formé de n lignes et de p colonnes. Ces nombres sont appelés coefficients ou termes de la matrice

Notation :

Soit A une matrice d'ordre $n \times p$

Le coefficient situé à l'intersection de la $i^{\text{ème}}$ ligne et la $j^{\text{ème}}$ colonne est noté a_{ij}

Matrices Particulières :

Matrice ligne $A = (2 \ 1 \ 0)$

Matrice colonne $B = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$

Matrice carrée $M = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Matrice unité $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Somme De Deux Matrices :

La somme des deux matrices A et B , notée $A + B$, est la matrice $C = (a_{ij} + b_{ij})$ de même ordre $n \times p$

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & - & 0 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 2 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Produit De Deux Matrices :

Soit A une matrice à n lignes et p colonnes et B une matrice à p lignes et q colonnes.

Le produit de la matrice A par la matrice B est la matrice, notée $A \times B = (c_{ij})$ à n lignes et q colonnes, définies par

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} \times b_{kj}$$

Remarque :

La multiplication de deux matrices n'est possible que si le nombre de colonnes de la première est égal au nombre de lignes de la deuxième.

Le produit d'une matrice d'ordre $n \times p$ par une matrice $p \times m$ est une matrice d'ordre $n \times m$.

Exemple :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 11 \\ 10 & 5 & 15 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 3 & 11 \\ 10 & 5 & 15 \end{pmatrix}$$

Propriétés :

Soient A , B et C trois matrices, tels que les produits ci-dessous sont possibles on a :

$$A \times (B \times C) = (A \times B) \times C.$$

Pour toute matrice carrée M d'ordre 2 on a :

$$I_2 \times M = M \times I_2 = M$$

Pour toute matrice carrée N d'ordre 3 on a :

$$I_3 \cdot N = N \cdot I_3 = N$$
Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 2 :

Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2. Le déterminant de M est le réel, noté $\det(M)$, défini par : $\det(M) = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} = ad - bc$

$$\text{Exemple : } \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2 \times 5 - 3 \times 1 = 7$$



Déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 :

Soit $M = \begin{pmatrix} a1 & a2 & a3 \\ b1 & b2 & b3 \\ c1 & c2 & c3 \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 3.

Le déterminant de M est le réel défini par :

$$\det(M) = \begin{vmatrix} a1 & a2 & a3 \\ b1 & b2 & b3 \\ c1 & c2 & c3 \end{vmatrix} \\ = a1 \begin{vmatrix} b2 & b3 \\ c2 & c3 \end{vmatrix} - b1 \begin{vmatrix} a2 & a3 \\ c2 & c3 \end{vmatrix} + c1 \begin{vmatrix} a2 & a3 \\ b2 & b3 \end{vmatrix}$$

Exemple :

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-4 - 1) - 2(-2 - 1) + 0(1 - 2) = -15$$

Ou bien

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 3(-4 - 1) - 1(-4 - 0) + (2 - 0) = -15$$

Inverse d'une Matrice :

Une matrice carrée A est inversible si et seulement s'il existe une matrice B de même ordre tel que : $A \times B = B \times A = I_n$

On note $A^{-1} = B$

Théorème :

Soit A une matrice carrée d'ordre 2 ou 3.

A est inversible si et seulement si, $\det(A) \neq 0$

Inverse d'une Matrice d'ordre 2 :

Soit $M = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée d'ordre 2

telque $\det(M) \neq 0$.

L'inverse de la matrice M est la matrice

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{pmatrix} d & -c \\ -b & a \end{pmatrix}$$

Remarques :

Soient A et B deux matrices tel que $\det(A) \neq 0$.

Si $A \times B = I$ alors $A^{-1} = B$.

Si $A \times B = 5 \times I$ alors $A^{-1} = \frac{1}{5} B$.

Si $A^2 + 3A = I$ signifie $A(A + 3I) = I$ alors $A^{-1} = A + 3I$.

Si $A^2 - 4A = 7I$ signifie $A(A - 4I) = 7I$ alors $A^{-1} = \frac{1}{7}(A - 4I)$.

Ecriture Matricielle d'un système :

Le système $S: \begin{cases} -5x + 3y = 2 \\ -x + y = 5 \end{cases}$ peut être représenté

sous la forme $A \times X = B$ avec

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}; X = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

A est dite la matrice du système.

L'égalité $A \times X = B$ est dite l'écriture matricielle du système.

La matrice colonne B est dite la matrice des constantes.

Résolution d'un système :

Soit A une matrice carrée d'ordre 2 ou 3 telle que $\det(A) \neq 0$.

Tout système, d'écriture matricielle : $A \times X = B$

a une solution et une seule et l'on a $X = A^{-1} \times B$, où A^{-1} est l'inverse de A

Remarque :

Si A est une matrice carrée non inversible ($\det(A)=0$), alors le système $A \times X = B$ n'a pas de solution ou a une infinité de solutions

Utilisation de la calculatrice :

Modèle Casio Fx 991 ES PLUS :

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ et } C = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Saisie et mémorisation de matrices

Avant de procéder aux calculs de matrice, il est nécessaire de créer une matrice. Suivez les étapes ci-dessous pour saisir et mémoriser les matrices.

Appuyez sur **Mode** **6** (MATRIX) pour saisir le Mode MATRIX.



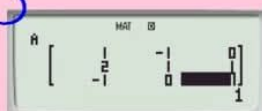
Appuyez sur **1** (MatA) **1** (3×3).
Ceci affiche l'éditeur de matrice pour l'entrée des éléments de la matrice 3×3 que vous avez spécifiée pour MatA.



Entrez les éléments de MatA en tapant :

$$\begin{matrix} 1 & = & -1 & = & 0 & = & 2 & = & 1 & = \\ 1 & = & -1 & = & 0 & = & 1 & = \end{matrix}$$

puis taper **AC**



Effectuez l'opération de touches suivante

$$\text{shift} \text{ 4 } (\text{MATRIX}) \text{ 2 } (\text{Data}) \text{ 2 } (\text{MatB}) \text{ 1 } (3 \times 3)$$

Ceci affiche l'éditeur de matrice pour l'entrée des éléments de la matrice 3×3 que vous avez spécifiée pour MatB.



Entrez les éléments de MatB en tapant :

$$\begin{matrix} 2 & = & -2 & = & 1 & = & 1 & = & 3 & = \\ 1 & = & 2 & = & 1 & = & 2 & = \end{matrix}$$

puis taper **AC**



Effectuez l'opération de touches suivante

$$\text{shift} \text{ 4 } (\text{MATRIX}) \text{ 2 } (\text{Data}) \text{ 3 } (\text{MatC}) \text{ 3 } (3 \times 1)$$

Ceci affiche l'éditeur de matrice pour l'entrée des éléments de la matrice 3×1 que vous avez spécifiée pour MatC.



Entrez les éléments de MatC en tapant :

$$2 & = & 1 & = & 3 & =$$

puis taper **AC**



Calcul matriciel

Pour calculer $A + B$ taper :

shift 4 (MATRIX) 3 (MatA) $+$ shift 4
(MATRIX) 4 (MatB) $=$

L'écran affiche



Pour calculer $3A$ taper :

3 $\times$ shift 4 (MATRIX) 3 (MatA) $=$

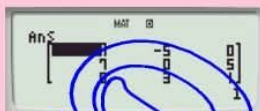
L'écran affiche



Pour calculer $A \times B$ taper :

shift 4 (MATRIX) 3 (MatA) $\times$ shift 4
(MATRIX) 4 (MatB) $=$

L'écran affiche



Pour calculer $A \times C$ taper :

shift 4 (MATRIX) 3 (MatA) $\times$ shift 4
(MATRIX) 5 (MatC) $=$

L'écran affiche



Pour calculer le déterminant de A taper :

shift 4 (MATRIX) 7 (det) shift 4
(MATRIX) 3 (MatA) $)$ $=$

L'écran affiche



Pour calculer l'inverse de A taper :

shift 4 (MATRIX) 3 (MatA) x^{-1} $=$

L'écran affiche



Pour calculer A^2 taper :

shift 4 (MATRIX) 3 (MatA) x^2 $=$

L'écran affiche



Pour calculer A^3 taper :

shift 4 (MATRIX) 3 (MatA) x^3 $=$

L'écran affiche

