

Chapitre III

Fonctions continues et strictement Monotone sur un intervalle

Bijection :**■ Théorèmes :**

- Si f est continue et strictement monotone sur I (I intervalle de $\mathbb{R}$)

Alors : 1) f réalise une bijection de I sur $f(I)$.

2) La fonction f^{-1} réciproque de f est continue sur $f(I)$.

3) Dans un repère orthonormé, la courbe de f et de f^{-1} sont

Symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.

■ Dérivabilité de f^{-1} :

Soit f une fonction et strictement monotone sur I .

- Si f est dérivable en x_0 et $f'(x_0) \neq 0$.

Alors f^{-1} est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ et $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

- Si f est dérivable sur I et pour tout $x \in I$, $f'(x) \neq 0$

Alors f^{-1} est dérivable sur $f(I)$ et on a :

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

■ Fonction racine $n^{\text{ième}}$:

- Définition de la racine $n^{\text{ième}}$:

Soit $n \in \mathbb{N}^*$, a et b deux réel positifs :

$$a^n = b \Leftrightarrow a = \sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$$

$b^{\frac{1}{n}}$ ou $\sqrt[n]{b}$ est appelé racine $n^{\text{ième}}$ de b .

- Remarque

Pour $n = 2$, $b^{\frac{1}{2}} = \sqrt{b}$ (racine carrée)

Pour $n = 3$, $b^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{b}$ (racine cubique)

- Théorème

La réciproque de f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x^n$ est la fonction f^{-1}

définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f^{-1}(x) = \sqrt[n]{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$ et $(\sqrt[n]{x})' = \frac{1}{n} x^{\frac{1}{n}-1}$

• Propriétés :

Soient x et y deux réels strictement positifs, p et $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$

on a alors :

$\bullet \sqrt[n]{x^n} = x$ $\sqrt[n]{\sqrt[p]{x}} = \sqrt[np]{x}$ $\sqrt[np]{x^p} = \sqrt[n]{x}$ $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x = y$	$\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x} \times \sqrt[n]{y}$ $\sqrt[n]{x^p} = (\sqrt[n]{x})^p$ $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$ $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Leftrightarrow x < y$
---	---

• Résolution de l'équation $x^n = a$ avec $n \geq 2$; $n \in \mathbb{N}$

1^{er} cas : $a \geq 0$

Si n est pair alors $x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$ ou $x = -\sqrt[n]{a}$

Si n est impair alors $x^n = a \Leftrightarrow x = \sqrt[n]{a}$

2^{ème} cas : $a < 0$

Si n est pair alors $x^n = a$ n'admet pas de solution.

Si n est impair alors $x^n = a \Leftrightarrow x = -\sqrt[n]{-a}$

Réflexes :

Situations	Réflexes
Comment déterminer le domaine de dérivabilité de f^1 ?	* $\begin{cases} f \text{ dérivable sur } I \\ f'(x) \neq 0 \end{cases}$ Alors f^1 est dérivable sur $J = f(I)$ * f dérivable sur I et $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = x_1 \text{ ou } x_2 \text{ ou } \dots x_n$ alors f^1 est dérivable sur $f(I) - \{f(x_1), f(x_2) \dots f(x_n)\}$

Comment déterminer la dérivabilité
de f^{-1} en y_0 ?

On calcule x_0 tel que $f(x_0) = y_0$

$$\text{Puis } \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0}$$

$$= \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

Ainsi si f est dérivable en x_0

$$\text{alors } (f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

Si $f'(x_0) = 0$

Alors f^{-1} n'est pas dérivable en y_0

$$\text{Si } \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \infty$$

Donc $(f^{-1})'(y_0) = 0$

Remarque :

Si f n'est pas dérivable en x_0 on peut pas conclure que f^{-1}
n'est pas dérivable en y_0 .