

SUITES REELLES

Des résultats à retenir :

- Soit (u_n) une suite réelle et a fini ou infini .
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = a$ si et seulement si , $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n} = a$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_{2n+1} = a$.
- Toute suite convergente est bornée .
- Soit une suite (U_n) convergente vers un réel a .
 - ♦ S'il existe un entier N_0 tel que $0 \leq u_n$ pour tout $n \geq N_0$, alors $0 \leq a$.
 - ♦ S'il existe un entier N_0 tel que $u_n \leq 0$ pour tout $n \geq N_0$, alors $a \leq 0$.
- Soit un entier naturel N_0 et une suite (U_n) , $n \geq 0$. on suppose qu'il existe deux réels m et M tel que $m \leq u_n \leq M$, $n \geq 0$.
 si la suite (u_n) est convergente vers un réel a , alors $m \leq a \leq M$.
- Soit (u_n) une suite géométrique définie par $u_n = q^n$, $n \geq 0$, où q est un réel non nul .
 - ♦ Si $q > 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$
 - ♦ Si $|q| < 1$, alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
 - ♦ Si $q \leq -1$, alors la suite (u_n) n'a pas de limite .
 - ♦ Si $q = 1$, alors la suite (u_n) est constante .
- Soit f une fonction continue sur un intervalle I et (u_n) une suite d'éléments de I .
 Si (u_n) tend vers un réel a de I alors $(f(u_n))$ tend vers $f(a)$.
- Soit f une fonction définie sur un intervalle I et (U_n) une suite d'éléments de I .
 Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = \ell$ (fini ou infini) et si $\lim_{x \rightarrow \ell} f(x) = L$ (fini ou infini) ,
 alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(u_n)) = L$.
- Soit deux suites (u_n) et (v_n) convergentes respectivement vers deux réels a et b .
 S'il existe un entier N_0 tel que $u_n \leq v_n$ pour tout $n \geq N_0$ alors $a \leq b$.

- Soit trois suites réelles (u_n) , (v_n) et (w_n) . Soit a un réel.
On suppose qu'il existe un entier N_0 tel que $v_n \leq u_n \leq w_n$, $n \geq N_0$.
Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} v_n = \lim_{x \rightarrow +\infty} w_n = a$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = a$.
- Soit deux suites réelles (u_n) et (v_n) .
On suppose qu'il existe un entier N tel que $0 \leq |u_n| \leq v_n$, $n \geq N$.
Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} v_n = 0$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = 0$.
- Soit deux suites réelles (u_n) et (v_n) .
 - ♦ S'il existe un entier N_0 tel que $u_n \geq v_n$, $n \geq N_0$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} v_n = +\infty$.
 - ♦ S'il existe un entier N_0 tel que $u_n \leq v_n$, $n \geq N_0$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} u_n = -\infty$ alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} v_n = -\infty$.
- Soit (u_n) une suite définie pour $n \geq 0$.
 - ♦ Si la suite (u_n) est croissante et majorée, alors elle converge vers un réel a et pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq a$.
 - ♦ Si la suite (u_n) est décroissante et minorée, alors elle converge vers un réel b et pour tout $n \geq 0$, $u_n \geq b$.
- Toute suite croissante et non majorée tend vers $+\infty$.
- Toute suite décroissante et non minorée tend vers $-\infty$.
- Soit une suite (u_n) vérifiant le relation de récurrence $u_{n+1} = f(u_n)$, $n \geq 0$ où f est une fonction.
Si la suite (u_n) est convergente vers un réel a et si la fonction f est continue en a alors $a = f(a)$.
- Deux suites $(u_n)_{n \geq 0}$ et $(v_n)_{n \geq 0}$ sont adjacentes lorsqu'elles vérifient les conditions.
 - ♦ Pour tout $n \geq 0$, $u_n \leq v_n$,
 - ♦ La suite (u_n) est croissante et la suite (v_n) est décroissante.
 - ♦ La suite $(v_n - u_n)$ converge vers 0.
 Dans ce cas les suites (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite.