

Les graphes

prof :Maatallah

12 / 02 / 2024

Classe :4Eco

graphes non orientés



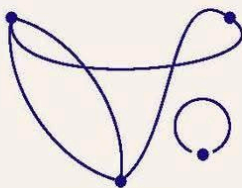
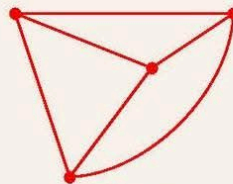
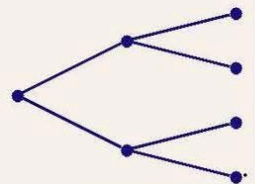
Définition

Un graphe est un ensemble de points et de lignes reliant certains de ces points.

Un sommet du graphe est un point du graphe .

Une arête du graphe est une ligne reliant deux sommets . On appelle **graphe non orienté** un ensemble de points , appelés **sommets** ,reliés par des lignes , appelées **arêtes** .

Exemples

Graphe G_1 Graphe G_2 Graphe G_3

On appelle **ordre d'un graphe le nombre (n) de sommets de ce graphe** .

Par exemple : les graphes G_1 et G_2 sont d'ordre 4 et le graphe G_3 est d'ordre 7.

Définition et Vocabulaire de base



Une boucle est une arête reliant un sommet à lui-même



un sommet est isolé lorsque aucune arête de le relie aux autres sommets



Deux sommets reliés par une arête sont adjacentes .

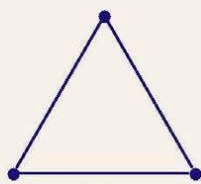
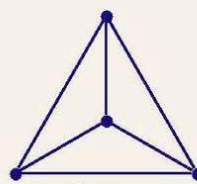
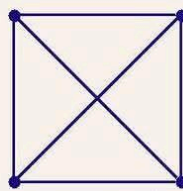
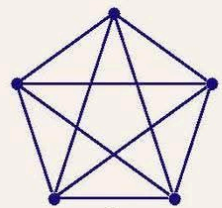


Un graphe est dit *simple* si deux sommets distincts sont joints par au plus une arête et s'il est **sans boucle**.



graphe complet

Un graphe complet G_n est un graphe simple d'ordre $n \geq 1$ dont **tous les sommets sont deux à deux adjacents** .

 G_3 Deux représentations du G_4  G_5

degré d'un sommet

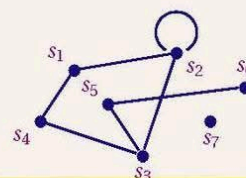
Définition

On appelle degré d'un sommet le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité (les boucles étant comptées deux fois). Ce degré vaut 0 si le sommet est isolé.

Exemple

Dans le graphe ci-dessous, les degrés des sommets sont :

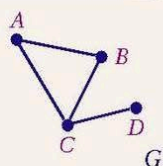
Sommets	s_1	s_2	s_3	s_4	s_5	s_6	s_7
Degrés	2	4	3	2	2	1	0



théorème

La somme des degrés de tous les sommets d'un graphe est égale à deux fois le nombre d'arêtes de ce graphe; c'est donc un nombre pair.

Exemple



Sommets	A	B	C	D
Degrés	2	2	3	1

Dans le graphe G , il y a 4 arêtes. La somme des degrés est $2 + 2 + 3 + 1 = 8 = 2 \times 4$

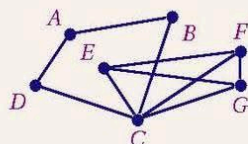
Sous graphe

Il arrive que dans certains problèmes on ait besoin de considérer une partie d'un graphe :

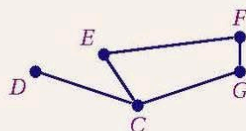
Définition

Un sous-graphe d'un graphe est une partie d'un graphe composé d'un sous-ensemble de sommets et de toutes les arêtes qui les relient.

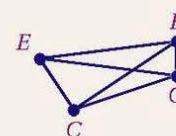
Exemple



Graphe G



G_1 est un sous graphe de G



G_2

est un sous graphe complet de G engendré par $\{C, E, F, G\}$

Châînes

Les graphes sont souvent utilisés pour modéliser des problèmes associés à des parcours ou à des successions d'actions. Pour cela, on introduit la notion de chaîne.

Définition

Dans un graphe non orienté, une chaîne est une succession d'arêtes mises bout à bout.

- 1 La longueur d'une chaîne est égale au nombre d'arêtes qui la composent.
- 2 Une chaîne dont toutes les arêtes sont distinctes est une *chaîne simple*.
- 3 Une chaîne dont tous les sommets (sauf peut-être les extrémités) sont distincts est une *chaîne élémentaire*.
- 4 Une chaîne est fermée si l'origine et l'extrémité finale de la chaîne sont confondues.
- 5 Une chaîne fermée est un *cycle* si elle est composée d'arêtes toutes distinctes.

Exemple

Dans le graphe ci-contre :



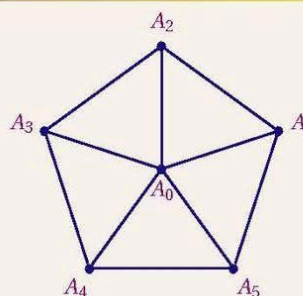
La chaîne $A_0 - A_1 - A_0 - A_2 - A_0 - A_3 - A_0 - A_4 - A_0 - A_5 - A_0$ est une chaîne fermée de longueur 10.



La chaîne $A_1 - A_2 - A_3 - A_0 - A_4 - A_5$ est une chaîne élémentaire de longueur 5.



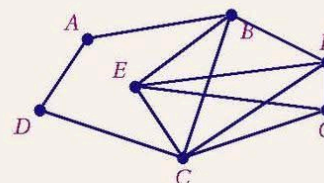
La chaîne $A_1 - A_2 - A_0 - A_3 - A_4 - A_0 - A_5 - A_1$ est un cycle de longueur 7.



Exercice n 1

Dans le graphe ci-contre :

- 1 Donner une chaîne de longueur 4 reliant A à F
- 2 Donner une chaîne de longueur 7 reliant C à B



Réponse

.....

.....

.....

.....

Matrice associée à un graphe non orienté

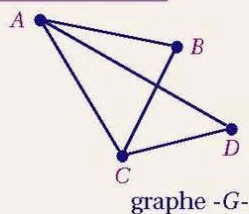
Définition

Soit G un graphe d'ordre n dont les sommets sont numérotés de 1 à n .

La matrice d'adjacence de G est égale à la matrice carrée $M = (m_{ij})$ de dimension $n \times n$ où m_{ij} est égal au nombre d'arêtes d'extrémités les sommets s_i et s_j .



Exemple



La matrice d'adjacence du **graphe simple** G est $M(G) =$

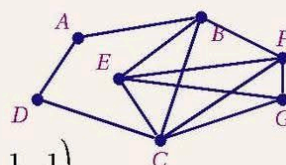
$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Exercice n 2

1 Dans le graphe G ci-contre :Donner la matrice associée à G

2 Représenter un graphe dont la matrice associée est :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



Réponse

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Remarques

- 1 **La matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est symétrique.**
- 2 La diagonale de la matrice d'adjacence d'un graphe simple **ne comporte que des 0**.
- 3 La demi somme de tous les coefficients de la matrice d'adjacence d'un graphe non orienté est égale au nombre d'arêtes de ce graphe.



Distance entre deux sommets - Diamètre d'un graphe

Définition



La distance entre deux sommets est **la plus courte longueur** des chaînes qui les relient.



Le diamètre d'un graphe est **la plus grand distance** entre deux sommets .



Théorème

Soit G un graphe d'ordre p de matrice associée M et I_p la matrice unité



La distance entre deux sommets distincts A_i et A_j est

le plus petit entier naturel $n, (n \geq 1)$ tel que le terme a_{ij} de M^n est non nul.



Le diamètre d'un graphe G est **la plus petit entier naturel $n, (n \geq 1)$ tel que**

la matrice $(M + I_p)^n$ ait tous ses termes strictement positifs.

Exemple

Dans le graphe G ci - contre :



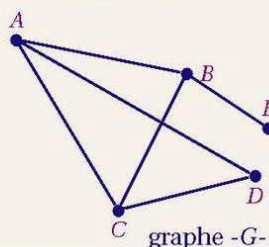
La distance entre C et E vaut 2



La distance entre D et E vaut 3



La distance entre B et D vaut 2



graphe -G-

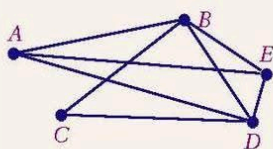
Théorème

Soit G un graphe de matrice associée M

Le terme m_{ij} de la matrice M^n donne le nombre de chaîne de longueur n reliant A_i et A_j

Exemple

Soit G un graphe de matrice associée M



graphe -G-

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

On donne : $M^2 =$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 3 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 3 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

et $M^3 =$

$$\begin{matrix} & \begin{matrix} A & B & C & D & E \end{matrix} \\ \begin{matrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \end{matrix} & \begin{pmatrix} 6 & 9 & 4 & 9 & 7 \\ 9 & 8 & 7 & 9 & 9 \\ 4 & 7 & 2 & 7 & 4 \\ 9 & 9 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 9 & 4 & 9 & 6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

- G admet 2 chaîne de longueur 2 reliant C à E
- G admet 4 chaîne de longueur 3 reliant A à C
- G admet 3 chaîne de longueur 2 reliant B à D
- G admet 9 chaîne de longueur 3 reliant D à E

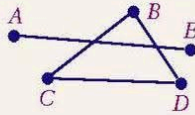


Connexité

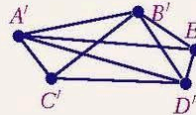
Définition

Un graphe G est connexe s'il existe au moins une chaîne entre deux sommets quelconques G .
Autrement dit : Un graphe est connexe si on peut atteindre n'importe quel sommet à partir d'un sommet quelconque en parcourant différentes arêtes

Exemple



graphe - G_1 -



graphe - G_2 -

Le graphe G_2 est connexe

Le graphe G_1 n'est pas connexe car il n'existe pas de chaîne entre les sommets A et B



Chaîne eulérienne - Cycle eulérien

Définition

- **Une chaîne eulérienne est une chaîne qui contient une fois et une seule chaque arête du graphe**
- **Un cycle eulérien est une chaîne eulérienne fermée.** (une chaîne dont l'origine et l'extrémité sont confondues)

Théorème d'Euler

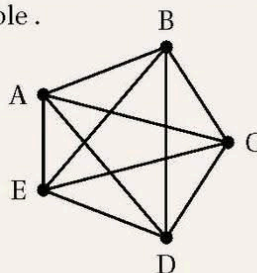
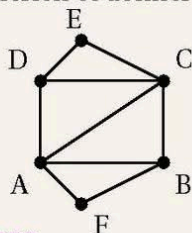
- **Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de sommets de degré impair vaut 0 ou 2**
- **Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous les sommets sont de degré pair**

Remarque

Si un graphe G admet exactement deux sommets de degré impair alors ils sont les extrémités de la chaîne eulérienne

Exercice n 3

Déterminer, en justifiant si chacun des graphes G_1 et G_2 suivants admet une chaîne eulérienne ou cycle eulérien et donner un exemple.



Réponse



- $$\text{On donne } M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 10 & 3 & 12 & 7 & 8 & 3 & 12 \\ 10 & 0 & 11 & 1 & 8 & 1 & 11 & 1 \\ 3 & 11 & 0 & 14 & 3 & 11 & 0 & 14 \\ 12 & 1 & 14 & 2 & 12 & 1 & 14 & 2 \\ 7 & 8 & 3 & 12 & 4 & 10 & 3 & 12 \\ 8 & 1 & 11 & 1 & 10 & 0 & 11 & 1 \\ 3 & 11 & 0 & 14 & 3 & 11 & 0 & 14 \\ 12 & 1 & 14 & 2 & 12 & 1 & 14 & 2 \end{pmatrix}$$

Réponse

This image shows a full page of white paper with horizontal dotted lines. The lines are evenly spaced and run across the width of the page, providing a guide for handwriting practice. There are no margins, text, or other markings on the page.



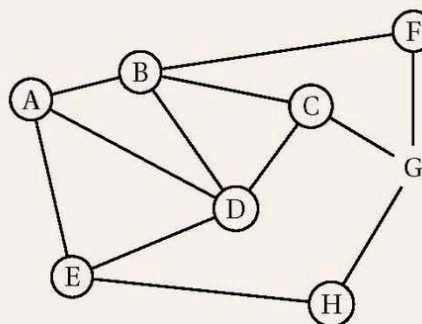
Exercice n 5

Une compagnie aérienne utilise huit aéroports que l'on nomme A, B, C, D, E, F, G et H.

Entre certains de ces aéroports, la compagnie propose des vols dans les deux sens.

Cette situation est représentée par le graphe Γ ci-contre, dans lequel :

- les sommets représentent les aéroports,
- les arêtes représentent les liaisons assurées dans les deux sens par la compagnie.



- Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ est complet.
 - Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ est connexe.
- Déterminer, en justifiant, si le graphe Γ admet une chaîne eulérienne. Si oui, donner une telle chaîne.
- Donner la matrice d'adjacence M du graphe Γ
- Pour la suite de l'exercice, on donne les matrices suivantes :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 2 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^3 = \begin{pmatrix} 4 & 8 & 3 & 7 & 6 & 1 & 4 & 1 \\ 8 & 4 & 8 & 8 & 3 & 6 & 1 & 4 \\ 3 & 8 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 & 1 \\ 7 & 8 & 7 & 6 & 7 & 3 & 3 & 2 \\ 6 & 3 & 4 & 7 & 2 & 3 & 1 & 4 \\ 1 & 6 & 1 & 3 & 3 & 0 & 5 & 0 \\ 4 & 1 & 6 & 3 & 1 & 5 & 0 & 4 \\ 1 & 4 & 1 & 2 & 4 & 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Un voyageur souhaite aller de l'aéroport B à l'aéroport H.

- Déterminer le nombre minimal de vols qu'il doit prendre, Justifier les réponses à l'aide des matrices données ci-dessus.
- Donner tous les trajets possibles empruntant trois vols successifs.

Réponse

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Coloriage d'un graphe

Définition

-  **Colorer un graphe** consiste à affecter une couleur à chacun de sommets de telle sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur .
-  Le nombre minimal de couleurs nécessaires pour le coloriage est appelée nombre chromatique noté $\gamma(G)$

Propriété

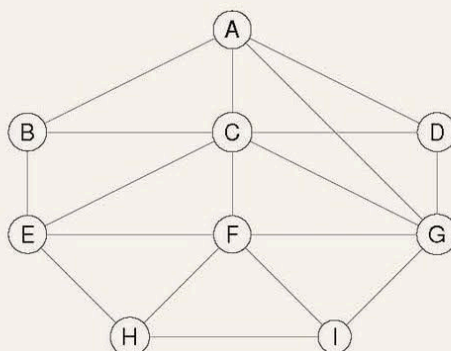
-  Soit G un graphe d'ordre n alors on a : $N \leq \gamma(G) \leq k + 1$ ou N est l'ordre maximal d'un sous groupe complet de G et k le plus grand degré des sommets
-  Le nombre chromatique $\gamma(G)$ d'un graphe complet d'ordre n est n

Algorithme de coloration d'un graphe (Algorithme de Welsh et Powell)

-  **Etape 1** :Clsser les sommets du graphe dans l'ordre décroissant de leur degré , et attribuer à chacun des sommets son numéro d'ordre dans la liste obtenue
-  **Etape 2** :En parcourant la liste dans l'ordre , attribuer une couleur non encore utilisée au premier sommet non encore coloré , et attribuer cette même couleur à chaque sommet non encore coloré et non adjacent à un sommet de cette couleur
-  **Etape 3** :S'il reste des sommets non colorés dans le graphe , revenir à l'étape 2 . Si non , la coloration est terminée .

Exercice n 6

On considère le graphe $\mathcal{G}$ ci-dessous. On note Γ son nombre chromatique.



- 1 Donner un encadrement du nombre chromatique.
- 2 Donner une coloration de ce graphe.
- 3 En déduire la valeur du nombre chromatique de $\mathcal{G}$.

Réponse

.....

.....

.....

.....

.....

graphes orientés



Définition

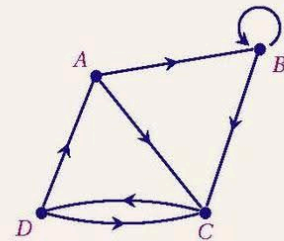
- ★ Un graphe est orienté si ses arêtes, appelées arcs dans ce cas, ont un sens de parcours. On parle alors de l'origine et de l'extrémité d'une arête.
- ★ Une boucle est un arc reliant un sommet à lui-même
- ★ Un chemin est une chaîne orientée
- ★ Un circuit est un chemin fermé dont les arcs sont tous distincts
- ★ Une chaîne orientée est dite eulérienne si elle passe une fois et une seule par chaque arête du graphe
- ★ Un cycle orienté eulérien est une chaîne orientée eulérienne fermée.
- ★ Un graphe orienté est dit eulérien s'il admet un cycle orienté eulérien

Exemple

Le graphe ci-contre est orienté. Il possède une boucle sur le sommet B

$A - B - C$ est une chaîne orientée de longueur 2

$A - B - C - D - A$ est un cycle orienté de longueur 4



Théorème

Soit (G) un graphe connexe orienté. Pour tout sommet X de (G) , on note :



$d^+(X)$ le nombre d'arête orientés sortant de X



$d^-(X)$ le nombre d'arête orientés rentrant à X



(G) un cycle orienté eulérien si et seulement si pour tout sommet X de (G) on a :

$$d^+(X) = d^-(X)$$

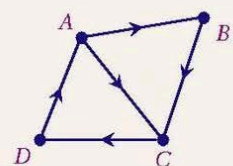


(G) admet une chaîne orientée eulérienne qui n'est pas un cycle orienté si et seulement si pour tout sommet X de (G) on a : $d^+(X) = d^-(X)$ sauf pour deux sommets exactement (A et B) On a : $d^+(A) = d^-(A) + 1$ et $d^+(B) = d^-(B) - 1$

Exemple

Le graphe ci-contre est orienté.

- 1 Le graphe admet-il des chaînes orientées eulériennes? Si oui, en préciser une.
- 2 Le graphe admet-il des cycles orientés eulériens?



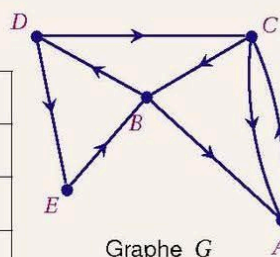


Exercice n 7

Le graphe ci-contre est orienté.

1 Compléter le tableau suivant :

Sommets	A	B	C	D	E
d^+					
d^-					
$d^+ - d^-$					



2 Le graphe admet-il des chaînes orienté eulériennes? Si oui, en préciser une.

3 Le graphe admet-il des cycles orienté eulériens?

Réponse



Matrice associée à un graphe orienté

Définition

La **matrice associée à un graphe orienté** (G) d'ordre n est la matrice carrée $M = a_{ij}$ d'ordre n telle que **$a_{ij} = 1$ s'il existe un arc d'origine A_i et d'extrémité A_j et $a_{ij} = 0$ si non**



$d^+(A_i)$ est égal à la somme des termes de la i^{me} **ligne** de la matrice associée à ce graphe



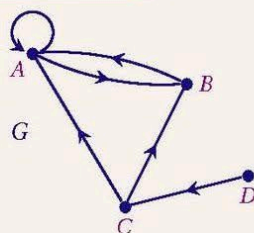
$d^-(A_i)$ est égal à la somme des termes de la i^{me} **colonne** de la matrice associée à ce graphe .



Pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ **les coefficient m_{ij} de M^p indiquent**

ainsi le nombre de chemins de longueur p partant de A_i vers A_j

Exemple



La matrice d'adjacence du graphe orienté G est $M(G) =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Graphe Pondéré

Définition

- Un graphe pondéré est un graphe dont les arêtes sont affectées de coefficients positifs appelés poids
- le poids d'une chaîne est la somme des poids des arêtes
- Si (G) est orienté, le poids d'un arc est appelé cout
- Le cout d'un chemin est la somme des couts des arcs qui le composent
- Entre deux sommets, le chemin le plus court est un chemin de cout minimum

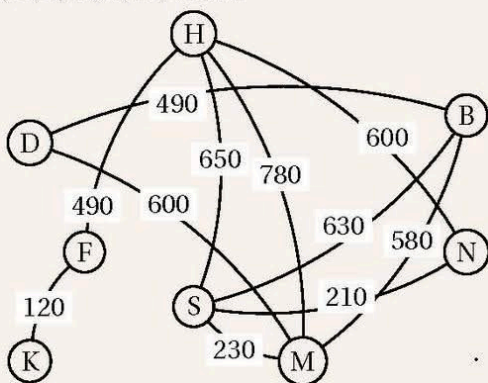
Algorithme de Dijkstra

Trouver le plus court chemin dans un graphe pondéré entre un sommet A_i et un sommet A_j en utilisant l'algorithme de Dijkstra :

- 1. Etape d'initialisation** . On fixe le poids du sommet A_i à 0 . On marque provisoirement chaque sommet adjacent à A_i du poids de l'arête reliant A_i à ce sommet . Ces sommets sont des successeurs de A_i . On marque provisoirement les autres sommets du poids $+\infty$
- 2. Etape d'itérations** On note S l'ensemble des sommets fixés, et $\bar{S}$ l'ensemble des sommets marqués provisoirement . Tant que l'ensemble $\bar{S}$ n'est pas vide, on choisit dans $\bar{S}$ le sommet X dont le poids marqué provisoirement p_X **est le plus petit**. On marque définitivement ce sommet X du poids p_X . On enlève X de $\bar{S}$ et on le place dans S . On marque provisoirement chaque sommet Y successeur du sommet X par le poids $p_Y = p_X + p_{X,Y}$ ou $p_{X,Y}$ est le poids de l'arête reliant X à Y . Si le poids obtenu p_Y est le plus petit que le poids marqué provisoirement au sommet Y , alors on barre ce poids marqué et on marque Y du poids p_Y .
On réitère le procédé tant que l'ensemble des sommets non fixés n'est pas vide .
- 3. Conclusion** . On obtient un graphe dont tous les sommets sont fixés . Le poids fixé du sommet A_j est le poids de la plus courte chaîne du sommet A_i vers le sommet A_j dans le graphe .

Exemple n 1

A l'occasion de la coupe du monde de football, une agence touristique organise des voyages en car à travers les différentes villes où se joueront les matchs d'une équipe nationale. Les routes empruntées par les cars sont représentées par le graphe ci-dessous. Le long de chaque arête figure la distance en kilomètres séparant les villes : B, D, F, H, K, M, N et S



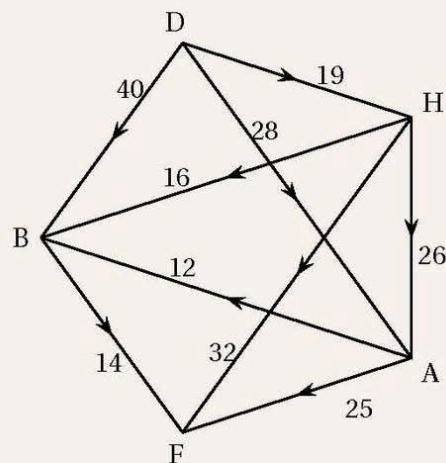
En précisant la méthode utilisée, déterminer le plus court chemin possible pour aller de K à B en utilisant les cars de cette agence.

K	F	H	S	M	N	D	B	sommet choisi
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	K
	120 (K)	∞	∞	∞	∞	∞	∞	F
		610 (F)	∞	∞	∞	∞	∞	H
			1260 (H)	1390 (H)	1210 (H)	∞	∞	N
			260 (H)	1390 (H)		∞	∞	S
				1390 (H)		∞	1890 (S)	M
						1990 (M)	1890 (S)	B
						1990 (M)		D

Le chemin le plus court obtenu en remontant est K-F-H-S-B, la distance parcourue étant de 1 890 km.

Exemple n 2

Lors d'un entraînement, Assia souhaite courir le moins longtemps possible en allant de D à F. Déterminer le trajet pour lequel le temps de course est minimal et préciser la durée de sa course.



En utilisant l'algorithme de Dijkstra :

A	B	D	F	H	Sommet Choisi
28 (D)	40 (D)	0	$+\infty$	19 (D)	H (19)
45 (H) 28 (D)	35 (H) 40 (D)		51 (H)		A (28)
	68 (D) 35 (H)		51 (H)		B (35)
			49 (B) 51 (H)		F (49)

Le chemin le plus court sera : $D \xrightarrow{19} H \xrightarrow{16} B \xrightarrow{14} F$ et aura pour longueur 49.

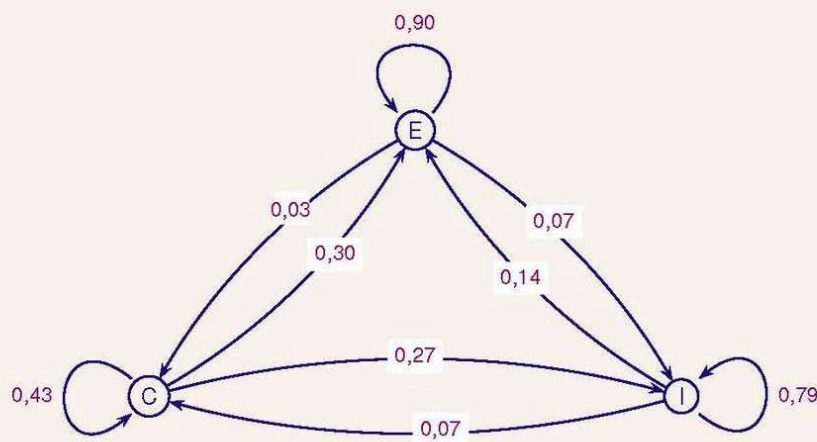
Graphes probabilistes

Définition

- ★ Un graphe probabiliste est **un graphe orienté pondéré** (sans arêtes parallèles) dans lequel **la somme des poids des arêtes issues de chaque sommet est égale à 1.**
- ★ Les graphes probabilistes sont utilisés pour modéliser l'évolution d'un système pouvant changer aléatoirement d'état :
 - ☛ les sommets du graphe sont les états possibles du système
 - ☛ le poids d'une arête orientée issue du sommet i et d'extrémité j est la probabilité conditionnelle de la réalisation de l'événement j à l'étape $n + 1$ sachant que l'événement i est réalisé à l'étape n .
- ★ La **matrice de transition** associée à un graphe probabiliste d'ordre k est la matrice carrée $M = (m_{i,j})$ d'ordre k telle que, pour tous entiers i et j vérifiant $1 \leq i \leq k$ et $1 \leq j \leq k$, $m_{i,j}$ est égal au poids de l'arête orientée d'origine le sommet i et d'extrémité le sommet j si cette arête existe, et est égal 0 sinon.
- ★ **Tous les coefficients sont positifs ou nuls,**
et pour chaque : **ligne la somme des coefficients est égale 1.**
- ★ Cette matrice décrit le passage d'un état au suivant. Le coefficient $m_{i,j}$ est la probabilité conditionnelle d'être dans l'état j l'instant $n + 1$ sachant que l'on est dans l'état i l'instant n .

Exemple

Notons respectivement E, C et I les trois sommets. Le graphe probabiliste associé est :



La matrice de transition M du graphe est :

$$M = \begin{pmatrix} 0,90 & 0,03 & 0,07 \\ 0,30 & 0,43 & 0,27 \\ 0,14 & 0,07 & 0,79 \end{pmatrix}$$

état probabiliste

Un état probabiliste est une loi de probabilité sur l'ensemble des états possibles.

Cette loi est représentée par une matrice ligne telle que **la somme des termes est égale à 1.**

Évolution d'un état au cours du temps

On considère un système qui peut se trouver dans k états $1, 2, \dots, k$ avec une certaine probabilité et on étudie l'évolution de ce système au cours du temps.

Soit $P_n = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_k \end{pmatrix}$ l'état probabiliste du système à l'instant n , M la matrice de transition et P_{n+1} l'état probabiliste du système à l'instant $n+1$. Alors, pour tout entier n , on a

$$P_{n+1} = P_n M$$

Si M est la matrice de transition d'un graphe probabiliste d'ordre p , si P_0 est la matrice ligne décrivant l'état initial et P_n l'état probabiliste l'étape n , on a $P_n = P_0 \times M^n$

Remarque :

Si l'état initial est p_1 alors $P_n = P_1 \times M^{n-1}$

État stable :

Un état stable d'un graphe probabiliste de matrice de transition M est un état P tel que $P = PM$

Pour tout graphe probabiliste d'ordre 2 dont la matrice de transition ne comporte pas de zéro, l'état p_n l'étape n converge vers un état p , dit stable, indépendante de l'état initial p_0 . De plus p est l'unique solution de l'équation : $P \times M = P$ ou $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ avec $x + y = 1$

Exemple :

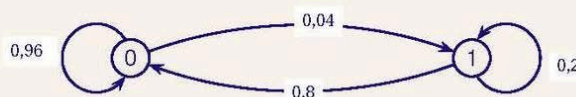
Dans un lycée, il y a deux photocopieuses qui fonctionnent indépendamment l'une de l'autre.

Chaque photocopieuse en état de marche a une probabilité égale à 0,2 de tomber en panne pendant la journée. Dans le cas où une photocopieuse tombe en panne pendant la journée, elle est réparée en fin de journée et se retrouve donc en état de marche le lendemain.

Supposons que l'on ne puisse pas réparer plus d'une photocopieuse chaque jour.

On s'intéresse au nombre de photocopieuses en panne en début de journée.

Le graphe probabiliste est un graphe à deux états 0 ou 1 :



dont la matrice de transition est

$$M = \begin{pmatrix} 0,96 & 0,04 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix}$$

Soit $P = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix}$ l'état stable du système. Nous avons :

$$\begin{aligned} P = PM &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,96 & 0,04 \\ 0,8 & 0,2 \end{pmatrix} \\ &\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,96a + 0,8b & 0,04a + 0,2b \end{pmatrix} \end{aligned}$$



Or P est un état probabiliste d'où $a + b = 1$. Par conséquent a et b sont solutions du système :

$$\begin{cases} 0,96a + 0,8b = a \\ 0,04a + 0,2b = b \\ a + b = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,04a - 0,8b = 0 \\ 0,04a - 0,8b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} 0,04a - 0,8b = 0 \\ a + b = 1 \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} a = \frac{20}{21} \\ b = \frac{1}{21} \end{cases}$$

L'état stable du système est $P = \begin{pmatrix} \frac{20}{21} & \frac{1}{21} \end{pmatrix}$. Quel que soit l'état initial, au bout d'un certain nombre jours, la probabilité que chaque jour aucune photocopieuse ne soit en panne est égale à $\frac{20}{21}$.



Exercice n 8 :

En 2020, les clients d'une banque tunisienne se répartissent en deux catégories distinctes :

- Catégorie A, composée des clients d'agence
- Catégorie I, composée des clients internet

En 2020, 92 % des clients sont des clients d'agence et 8 % des clients sont des clients internet.

On admet que chaque année, 5 % des clients d'agence deviennent clients internet et inversement 1 % des clients internet deviennent clients d'agence.

On suppose que le nombre de clients de la banque reste constant au cours du temps et qu'un client ne peut faire partie des deux catégories.

On s'intéresse l'évolution de la répartition des clients de cette banque dans les années à venir.

On note pour tout entier naturel n :

- a_n la probabilité qu'un client de la banque, pris au hasard, soit un client d'agence à l'année 2020 + n ,
- i_n la probabilité qu'un client de la banque, pris au hasard, soit un client internet à l'année 2020 + n ,
- $P_n = (a_n \ i_n)$ la matrice correspondant à l'état probabiliste de l'année 2020 + n .

On note M la matrice de transition, telle que pour tout entier naturel n , $P_{n+1} = P_n \times M$.

Partie A État stable d'un graphe probabiliste

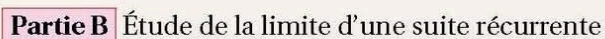
Dans cette partie, on donnera des valeurs approchées arrondies au centième.

- 1 Déterminer le graphe probabiliste correspondant à cette situation.
- 2 Donner P_0 la matrice traduisant l'état probabiliste initial.

On admettra que $M = \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,01 & 0,99 \end{pmatrix}$.

- 3
 - a Calculer la matrice P_1 .
 - b Déterminer, la répartition des clients de la banque en 2025.
- 4 Déterminer, par le calcul, l'état stable de la répartition des clients.

Interpréter le résultat.



- 1
 - a A l'aide de la relation $P_{n+1} = P_n \times M$, exprimer a_{n+1} en fonction de a_n et i_n .
 - b En déduire que pour tout entier naturel n , $a_{n+1} = 0,94a_n + 0,01$.
- 2 On définit la suite (u_n) par $u_n = a_n - \frac{1}{6}$ pour tout entier naturel n .
 - a Montrer que la suite (u_n) est une suite, géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
 - b En déduire l'expression de u_n en fonction de n .
 - c En déduire que pour tout entier naturel n , $a_n = \frac{113}{150} \times 0,94^n + \frac{1}{6}$.
 - d Déterminer la limite de la suite a_n lorsque n tend vers $+\infty$. Interpréter le résultat.

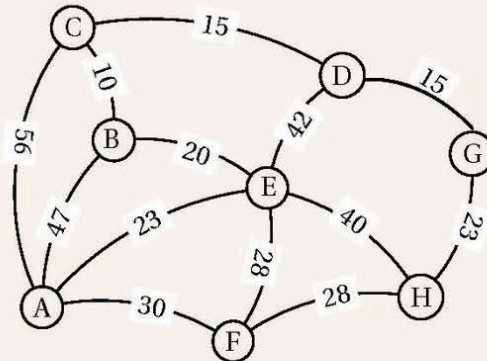
[illegible]



Exercice n 9 :

Partie A

Le graphe pondéré ci-dessous représente les différents lieux A, B, C, D, E, F, G et H dans lesquels Med est susceptible de se rendre chaque jour. Le lieu A désigne son domicile et G le lieu de son site de travail. Le poids de chaque arête représente la distance, en kilomètres, entre les deux lieux reliés par l'arête.



Déterminer le chemin le plus court qui permet à Med de relier son domicile à son travail. On pourra utiliser un algorithme. Préciser la distance, en kilomètres, de ce chemin.

Partie B

Afin de réduire son empreinte énergétique, Med décide d'utiliser lors de ses trajets quotidiens soit les transports en commun, soit le covoiturage.

- s'il a utilisé les transports en commun lors d'un trajet, il utilisera le covoiturage lors de son prochain déplacement avec une probabilité de 0,53;
- s'il a utilisé le covoiturage lors d'un trajet, il effectuera le prochain déplacement en transport en commun avec une probabilité de 0,78.

Med décide de mettre en place ces résolutions au 1^{er} janvier 2018.

Pour tout entier naturel n , on note :

- c_n la probabilité que Med utilise le covoiturage n jour(s) après le 1^{er} janvier 2018;
- t_n la probabilité que Med utilise les transports en commun n jour(s) après le 1^{er} janvier 2018;

La matrice ligne $P_n = (c_n \quad t_n)$ traduit l'état probabiliste n jour(s) après le 1^{er} janvier 2018.

Le 1^{er} janvier 2018, Med décide d'utiliser le covoiturage.

- Préciser l'état probabiliste initial P_0 .
 - Traduire les données de l'énoncé par un graphe probabiliste. On notera « C » et « T » ses deux sommets :
 - « C » pour indiquer que Med utilise le covoiturage;
 - « T » pour indiquer que Med utilise les transports en commun.
- Déterminer la matrice de transition du graphe probabiliste en considérant ses sommets dans l'ordre alphabétique.
- Calculer l'état probabiliste P_2 et interpréter ce résultat dans le cadre de l'exercice.
- Soit la matrice ligne $P = (x \quad y)$ associée l'état stable du graphe probabiliste.
 - Calculer les valeurs exactes de x et de y puis en donner une valeur approchée à 0,01 près.
 - Selon ce modèle, peut-on dire qu'à long terme, Med utilisera aussi souvent le covoiturage que les transports en commun ? Justifier la réponse.

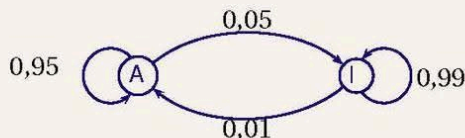
Réponse



Correction exercice n 8 :

Réponse Partie A

1



2 Au dpart 92 % des des clients sont des clients d'agence et 8 % des clients internet, $P_0 = \begin{pmatrix} 0,92 & 0,08 \end{pmatrix}$.

3 a On a $P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix} 0,92 & 0,08 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,01 & 0,99 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,8748 & 0,1252 \end{pmatrix}$. Soit en arrondissant au centime $P_1 = \begin{pmatrix} 0,87 & 0,13 \end{pmatrix}$.

b En 2025 l'tat probabiliste sera : $P_5 = P_0 \times M^5 = \begin{pmatrix} 0,92 & 0,08 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,01 & 0,99 \end{pmatrix}^5 \approx \begin{pmatrix} 0,72 & 0,28 \end{pmatrix}$.

Il y aura environ 72 % clients d'agence et 28 % clients internet.

4 Les termes de la matrice de transition sont non nuls, donc l'tat P_n converge vers un tat stable P tel que $P = P \times M$. Avec a clients d'agence et i clients internet on aura $P = \begin{pmatrix} a & i \end{pmatrix}$.

On aura donc : $\begin{pmatrix} a & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & i \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,01 & 0,99 \end{pmatrix}$ et $a + i = 1$, donc a et i vrifient le systme :

$$\begin{cases} a &= 0,95a + 0,01i \\ i &= 0,05a + 0,99i \\ a + i &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0,05a - 0,01i &= 0 \\ -0,05a + 0,01i &= 0 \\ a + i &= 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5a - i &= 0 \\ a + i &= 1 \end{cases} \Rightarrow$$

(par somme) $6a = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{6}$ et par suite $i = \frac{5}{6}$. Conclusion $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{5}{6} \end{pmatrix}$.

Partie B

1 a $P_{n+1} = P_n \times M \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{n+1} & i_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_n & i_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,95 & 0,05 \\ 0,01 & 0,99 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} a_{n+1} &= 0,95a_n + 0,01i_n \\ i_{n+1} &= 0,05a_n + 0,99i_n \end{cases}$

En particulier : $a_{n+1} = 0,95a_n + 0,01i_n$.

b On a donc $a_{n+1} = 0,95a_n + 0,01i_n$ et compte tenu de $a_n + i_n = 1 \Leftrightarrow i_n = 1 - a_n$, on obtient : $a_{n+1} = 0,95a_n + 0,01(1 - a_n) = 0,95a_n + 0,01 - 0,01a_n = 0,94a_n + 0,01$.

2 a $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = a_{n+1} - \frac{1}{6} = 0,94a_n + 0,01 - \frac{1}{6} = 0,94a_n - \frac{0,94}{6} = 0,94 \left(a_n - \frac{1}{6} \right) = 0,94u_n$. $u_{n+1} = 0,94u_n$

signifie que (u_n) est une suite, gomtrique de raison 0,94 et de 1er terme $u_0 = \frac{113}{150}$.

b On sait qu'alors pour tout naturel n , $u_n = \frac{113}{150} \times 0,94^n$.

c Or $u_n = a_n - \frac{1}{6} \Leftrightarrow a_n = u_n + \frac{1}{6} = \frac{113}{150} \times 0,94^n + \frac{1}{6}$.

d Comme $0 < 0,94 < 1$, on sait que $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0,94^n = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \frac{1}{6}$. Dans un certain temps il y aura un client d'agence pour cinq clients internet.



Correction exercice n 9 :

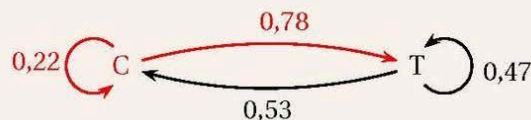
Partie A

A	B	C	D	E	F	G	H	On garde
0	∞	∞	∞	∞	∞	∞	∞	A
	47 A	56 A	∞	23 A	30 A	∞	∞	E
	47 A 43 E	56 A	65 E		30 A 51 E	∞	63 E	F
	43 E	56 A	65 E			∞	63 E 58 F	B
		56 A 53 B	65 E			∞	58 F	C
			65 E 68 C			∞	58 F	H
			65 E			81 H		D
						81 H 80 D		G

Le chemin le plus court pour aller de A G est : $A \xrightarrow{23} E \xrightarrow{42} D \xrightarrow{15} G$; sa longueur est de 80 km .

Partie B

- 1 a Le 1^{er} janvier 2018, Med décide d'utiliser le covoiturage, donc $c_0 = 1$, $t_0 = 0$ et $P_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}$.
 b On traduit les données de l'énoncé par un graphe probabiliste de sommets C et T :



- 2 Le graphe précédent est équivalent au système :
$$\begin{cases} c_{n+1} = 0,22 c_n + 0,53 t_n \\ t_{n+1} = 0,78 c_n + 0,47 t_n \end{cases}$$

qui s'écrit sous forme matricielle :
$$\begin{pmatrix} c_{n+1} & t_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_n & t_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \\ 0,53 & 0,47 \end{pmatrix}$$

La matrice de transition du graphe probabiliste est donc
$$M = \begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \\ 0,53 & 0,47 \end{pmatrix}$$
.

- 3
$$P_1 = P_0 \times M = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \\ 0,53 & 0,47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \end{pmatrix}$$

$$P_2 = P_1 \times M = \begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \\ 0,53 & 0,47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,4618 & 0,5387 \end{pmatrix}$$

On peut donc dire qu'au bout de 2 jours, la probabilité que Med a d'utiliser le covoiturage est de 0,4618 soit 46,18 %, et celle d'utiliser les transports en commun de 0,5387 soit 53,87 %.

- 4 Soit la matrice ligne $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ associée l'état stable du graphe probabiliste.



- a L'état stable $P = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix}$ vérifie d'une part $P \times M = P$, et d'autre part $x + y = 1$.

$$P \times M = P \iff \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,22 & 0,78 \\ 0,53 & 0,47 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y \end{pmatrix} \iff \begin{cases} 0,22x + 0,53y = x \\ 0,78x + 0,47y = y \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} -0,78x + 0,53y = 0 \\ 0,78x - 0,53y = 0 \end{cases} \iff 0,78x - 0,53y = 0 \iff 78x - 53y = 0$$

On résout le système :

$$\begin{cases} 78x - 53y = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 78x - 53(1 - x) = 0 \\ x + y = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 131x = 53 \\ y = 1 - x \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{53}{131} \\ y = \frac{78}{131} \end{cases}$$

L'état stable est donc $P = \begin{pmatrix} \frac{53}{131} & \frac{78}{131} \end{pmatrix}$.

- b Selon ce modèle, long terme, Med utilisera le covoiturage avec une probabilité de $\frac{53}{131}$ soit environ 40 % du temps, donc moins souvent que les transports en commun.