

Chapitre VIII

Fonction logarithme népérien

■ Définition :

La fonction **Logarithme népérien**, notée « **Log** » ou « **Ln** » est la primitive de fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$ qui s'annule en 1.

■ Conséquences :

Log est définie et dérivable sur $]0, +\infty[$ pour tout $x \in]0, +\infty[$

$$(\text{Log}(x))' = \frac{1}{x} \text{ et } \text{Log}1 = 0$$

■ Propriétés algébriques :

Pour tout réels a et b strictement positifs, on a :

$$\bullet \quad \boxed{\text{Log}(ab) = \text{Log}a + \text{Log}b}$$

$$\bullet \quad \boxed{\text{Log}\left(\frac{a}{b}\right) = \text{Log}a - \text{Log}b}$$

$$\bullet \quad \boxed{\text{Log}\left(\frac{1}{b}\right) = -\text{Log}b}$$

$$\bullet \quad \boxed{\text{Log}(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \text{Log}a}$$

$$\bullet \quad \boxed{n \in \mathbb{Z}, \text{Log}(a^n) = n\text{Log}a}$$

$$\bullet \quad \boxed{\text{Log}(a^r) = r\text{Log}a \quad (r \in \mathbb{Q})}$$

■ Limites :

$$\bullet \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Log}x = +\infty}$$

$$\bullet \quad \boxed{\lim_{0^+} \text{Log}x = -\infty}$$

$$\bullet \quad \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log}x}{x} = 0}$$

$$\bullet \quad \boxed{\lim_{0^+} x\text{Log}x = 0}$$

$$\bullet \quad \boxed{\lim_0 \frac{\text{Log}(1+x)}{x} = 1}$$

■ Sens de variation :

La fonction Log est une bijection, $(\text{Log}x)' = \frac{1}{x} > 0$ donc « Log » est

strictement croissante sur $]0, +\infty[$ dans $\mathbb{R}$

On en déduit : Pour tout réel a et b strictement positifs :

$$* \quad \text{Log}a = \text{Log}b \Leftrightarrow a = b$$

$$* \quad \text{Log}a > \text{Log}b \Leftrightarrow a > b$$

$$* \quad \text{Log}a > 0 \Leftrightarrow a > 1$$

$$* \quad \text{Log}a < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1$$

Tout réel y admet un unique antécédent par la fonction Log ; en particulier on appelle e l'unique antécédent de 1

$$\text{Log}e = 1 \text{ et } 2,718 < e < 2,719$$

■ Dérivée de $\text{Log}^\circ U$:

La fonction $\text{Log}^\circ U$ est définie sur tout intervalle I sur lequel $U(x) > 0$

Si de plus U est dérivable sur I alors la fonction $\text{Log}^\circ U$ est dérivable sur I

$$\text{et } (\text{Log}^\circ U)' = \frac{U'}{U}$$

■ Primitives de $\frac{U'}{U}$:

Si U est une fonction dérivable, ne s'annulant pas sur un intervalle I , alors la

fonction $\frac{U'}{U}$ admet sur I des primitives de la forme $\text{Log}|U| + c$ (c constante)

■ Logarithme décimal :

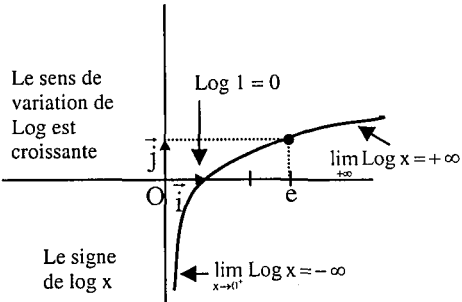
• La fonction Logarithme décimal, notée $\log$ est la fonction définie sur

$$]0, +\infty[\text{ par } \text{Log } x = \frac{\text{Log } x}{\text{Log } 10}$$

• La fonction logarithme décimal a les mêmes propriétés algébriques que la fonction logarithme népérien.

• Remarque : $\text{Log } 10 = 1$

Réflexes :

Situations	Réflexes
Comment retrouver les propriétés de la fonction logarithmes à partir de sa courbe représentative ?	 Le sens de variation de Log est croissante $\text{Log } 1 = 0$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Log } x = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow 0^+} \text{Log } x = -\infty$ Le signe de $\log x$
Comment résoudre une équation ou une inéquation comportant des logarithmes ?	1) On détermine l'ensemble des réels pour les quels les expressions sont définies. 2) On se ramène lorsque c'est possible à la forme $\text{Log}(u(x)) = \text{Log}(v(x))$ (où $\text{Log}(u(x)) \geq \text{Log}(v(x))$) puis on résout $u(x) = v(x)$ (où $u(x) \geq v(x)$) 3) Si on a des x et des $\text{Log } x$ on utilise les variations d'une fonction

Comment étudier la dérivabilité de $\text{Log}(u(x))$ sur un intervalle I ?	1) Vérifier que $u(x) > 0$ sur I. 2) On justifie la dérivabilité de u sur I 3) On utilise le théorème $(\text{Log } u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$
Comment calculer une limite en $+\infty$?	1) On examine si on se trouve dans une situation de forme indéterminée. 2) Si oui, on tente la factorisation pour se ramener à $\frac{\log x}{x^n} = \frac{\text{Log } x}{x} \cdot \frac{1}{x^{n-1}}$ où $\frac{(\text{Log } x)^n}{x} = \left(\frac{\frac{1}{n} \text{Log } x^{1/n}}{x^{1/n}} \right)^n$ si non on factorise à l'intérieur de l'écriture de Log (Exp : $\frac{\log(x^2 + x + 1)}{x} = \frac{\log x^2 (1 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}{x}$) 3) on utilise les règles opérations à l'infinie x^n l'emporte sur $\text{Log } x$