

Chapitre III

Equations de droites et de plans

■ Equations paramétriques et équations cartésiennes d'une droite:

* Soit $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère, $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $A(x_0, y_0, z_0)$

$$M(x, y, z) \in \Delta \left(A, \vec{u} \right) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u}$$

$$\Delta : \begin{cases} x = \alpha a + x_0 \\ y = \alpha b + y_0 \\ z = \alpha c + z_0 \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} ; c' \text{ est une représentation paramétrique de la droite } \Delta,$$

$$\Delta : \begin{cases} ax + by + cz + d = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d' = 0 \end{cases} \text{ est une \textbf{représentation cartésienne} de la droite}$$

Δ si seulement si $ab' - a'b \neq 0$ ou $ac' - a'c \neq 0$ ou $bc' - b'c \neq 0$.

■ Equations paramétriques d'un plan

* P est le plan passant par $A(x_0, y_0, z_0)$ et deux vecteurs non colinéaires

$$\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}.$$

$$M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v} \text{ d'ou } P : \begin{cases} x = \alpha a + \beta a' + x_0 \\ y = \alpha b + \beta b' + y_0 \\ z = \alpha c + \beta c' + z_0 \end{cases} (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

C'est une représentation paramétrique du plan P.

■ Equation cartésienne du plan P :

$P : ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

■ Vecteur d'un plan:

$$\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \text{ est un vecteur du plan } P : ax + by + cz + d = 0$$

Si et seulement si $a \times \alpha + b \times \beta + c \times \gamma = 0$.

■ Vecteurs colinéaires

$$\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \text{ sont colinéaires si et seulement si } \begin{vmatrix} a & a' \\ b & b' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & a' \\ c & c' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b & b' \\ c & c' \end{vmatrix} = 0$$

■ Vecteurs coplanaires :

$$\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \text{ et } \vec{w} \begin{pmatrix} a'' \\ b'' \\ c'' \end{pmatrix} \text{ sont coplanaires } \Leftrightarrow \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{vmatrix} = 0$$

■ Positions de deux droites :

Soit les droites $D \left(A, \vec{u} \right)$ et $D' \left(B, \vec{v} \right)$.

D est parallèle à $D' \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires.

D est sécante à $D' \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et $D \cap D'$ égale à un singleton

D est non coplanaire à $D' \Leftrightarrow \vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires et $D \cap D' = \emptyset$

■ Positions de deux plans:

Soit les plans $P \left(A, \vec{u}, \vec{v} \right)$ et $P' \left(B, \vec{u}', \vec{v}' \right)$

* $P // P'$ si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs de P'

Si de plus $A \in P'$ alors $P = P'$

Où $P // P'$ si et seulement si $\vec{u}, \vec{v}, \vec{u}', \vec{v}'$ sont coplanaires.

* Si l'un des vecteurs $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ n'est pas un vecteurs de P' alors P est sécant à P' .

■ Positions droites et plans:

Soit la droite $D \left(A, \vec{u} \right)$ et le plan $P \left(B, \vec{v}, \vec{w} \right)$

* $D // P$ si et seulement si $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires

si de plus $A \in P$ alors $D \subset P$.

Où $D // P$ si et seulement si $\vec{u}$ est un vecteur de P

* D et P sont sécants si et seulement si $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ ne sont pas coplanaires

Où D et P sont sécants si et seulement si $\vec{u}$ n'est pas un vecteur de P