

SIMILITUDES

Résultats à retenir :

1°/ a) Une similitude directe du plan est soit une translation, soit la composée d'une homothétie et d'une rotation de même centre.

b) Toute similitude directe S autre qu'une translation admet un unique point invariant appelé centre de la similitude.

c) Soit S une similitude directe admettant un point invariant I et $A \neq I$.

- Soit $A' = S(A)$ alors $\frac{IA'}{IA} = k$ est le rapport de S et $(\vec{IA}, \vec{IA'})$ est une mesure de son angle.

- Soit A et B deux point distincts et $A' = S(A)$; $B' = S(B)$ alors $\frac{A'B'}{AB} = k$ et $(\vec{AB}, \vec{A'B'})$ est une mesure de son angle.

2°/ Soit f une similitude directe de centre I , de rapport k et d'angle α .

soit M d'affixe z et $M' = f(M)$ d'affixe z' alors $z' = ke^{i\alpha}(z - z_I) + z_I$.

3°/ • $S(A, k, \alpha) \circ S(A, k', \alpha') = S(A, kk', \alpha + \alpha')$.

- soit $f = S(A, k, \alpha) \circ S(B, k', \alpha')$.

si $kk' \neq 1$ et $\alpha + \alpha' \not\equiv 0 (2\pi)$ alors $f = S(C_1, kk', \alpha + \alpha')$

si $kk' = 1$ et $\alpha + \alpha' \not\equiv 0 (2\pi)$ alors $f = R(C_2, \alpha + \alpha')$

si $kk' \neq 1$ et $\alpha + \alpha' \equiv 0 (2\pi)$ alors $f = h(C_3, kk')$

si $kk' = 1$ et $\alpha + \alpha' \equiv 0 (2\pi)$ alors f est une translation.

4°/ Soit A, B, C, D quatre points tel que $A \neq B$ et $C \neq D$ alors il existe une unique similitude directe qui transforme A en C et B en D .

son rapport est $k = \frac{CD}{AB}$, une mesure de son angle est

$$\alpha \equiv (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})(2\pi).$$

5°/ a) soit f une similitude indirecte de centre ω de rapport k et d'axe Δ .

$$f = S_{\Delta} \circ h(\omega, k) = h(\omega, k) \circ S_{\Delta} \quad (\omega \in \Delta)$$

$$\Delta = \left\{ M \in \mathcal{P} / \overrightarrow{\omega M'} = k \overrightarrow{\omega M} \right\}$$

b) f : similitude directe

g : similitude indirecte

alors • $f \circ g$ est une similitude indirecte.

• f^{-1} est une similitude directe.

• g^{-1} est une similitude indirecte.

$$c) \quad f = S(\omega, k, \alpha) \Rightarrow f^{-1} = S(\omega, \frac{1}{k}, -\alpha)$$

$$f = S(\omega, k, \Delta) \Rightarrow f^{-1} = S(\omega, \frac{1}{k}, \Delta)$$

6°/ Une similitude indirecte de rapport différent de 1, est parfaitement déterminée par son rapport, son centre et son axe, qui sont appelés éléments caractéristiques de cette similitude.

L'axe D d'une similitude indirecte de centre I et la perpendiculaire à D passant par I sont globalement invariants par f .

Si f est une similitude indirecte de centre I et de rapport k alors $f \circ f$ est une homothétie de centre I et de rapport k^2 .

7°/Soit f une similitude de centre I , de rapport différent de 1 et d'axe D .

Si $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D , alors $(\vec{u}, \widehat{IM}) \equiv -(\vec{u}, \widehat{IM'})[2\pi]$,

pour tout M distinct de I , image M' . La droite D porte donc la bissectrice intérieure de $\widehat{MIM'}$.

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit f une application du plan dans lui-même qui à tout M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' . L'application f est une similitude indirecte de centre I et de rapport $k \neq 1$, si et seulement si, il existe deux nombres complexes a et b tels que $z' = a\bar{z} + b$.

Dans ce cas $k = |a|$ et $z_I = \frac{a\bar{b} + b}{1 - |a|^2}$ est l'affixe du point I .