

DERIVABILITE

résultats à retenir :

- Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est dérivable en un réel a de I s'il existe un réel, noté L tel que $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = L$, L est noté $f'(a)$.
- Soit $f : x \mapsto a_n x^n + \dots + a_1 x + a_0$
Une fonction polynôme.
La fonction f est dérivable en tout réel x et $f'(x) = n a_n x^{n-1} + \dots + a_1$.
- Si f est dérivable en a , alors le réel $f(a) + f'(a)h$ est une approximation affine de $f(a+h)$.
- Une fonction f définie sur un intervalle ouvert I est dérivable en un réel a de I , si et seulement si, elle est dérivable à gauche et à droite en a et $f'_g(a) = f'_d(a)$.
- Dérivées des fonctions usuelles

Fonction f	Intervalle	f'
$x \mapsto x^n, n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto n x^{n-1}$
$x \mapsto \frac{1}{x^n}, n \in \mathbb{N}^*$	Tout intervalle inclus dans $\mathbb{R}^*$	$x \mapsto -n x^{-n-1}$
$x \mapsto \sin(ax + b)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto a \cos(ax + b)$
$x \mapsto \cos(ax + b)$	$\mathbb{R}$	$x \mapsto -a \sin(ax + b)$
$x \mapsto \tan(ax + b)$	Tout intervalle inclus dans l'ensemble de définition	$x \mapsto a (1 + \tan^2(ax + b))$

- Opérations sur les fonctions dérivables

Soit f et g deux fonctions dérivables sur un intervalle I .

<i>Fonction</i>	<i>Intervalle</i>	<i>Fonction dérivée</i>
$f + g$	I	$f' + g'$
$af \ (a \in \mathbb{R})$	I	af'
$f \times g$	I	$f' \times g + g' \times f$
$\frac{1}{f}$	Tout intervalle inclus dans $\{x \in I ; f(x) \neq 0\}$	$-\frac{f'}{f^2}$
$\frac{f}{g}$	Tout intervalle inclus dans $\{x \in I ; g(x) \neq 0\}$	$\frac{f'g - g'f}{g^2}$
$f^n, n \in \mathbb{N}^*$	I	$n f' f^{n-1}$
$\frac{1}{f^n}, n \in \mathbb{N}^*$	Tout intervalle inclus dans $\{x \in I ; f(x) \neq 0\}$	$-n f' f^{-n-1}$

- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I contenant un réel a et g une fonction définie sur un intervalle ouvert J contenant $f(a)$.

- Si f est dérivable en a et g est dérivable en $f(a)$, alors $g \circ f$ est dérivable en a et $(g \circ f)'(a) = f'(a) \times g'(f(a))$.
- Si f est dérivable sur un intervalle I et g est dérivable sur un intervalle J contenant $f(I)$, alors $g \circ f$ est dérivable sur I et $(g \circ f)'(x) = f'(x) \times g'[f(x)]$, pour tout x de I .

• **Théorème de Rolle:**

Soit a et b deux réels tels que $a < b$.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ dérivable sur $]a, b[$ et telle que $f(a) = f(b)$.

Alors il existe un réel c de $]a, b[$ tel que $f'(c) = 0$.

Si C_f est la représentation graphique de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$, alors il existe au moins une tangente à C_f parallèle à la droite des abscisses.

• **Théorème des accroissements finis**

Soit a et b deux réels tels que $a < b$ et f une fonction définie sur $[a, b]$.

Si f est continue sur $]a, b[$ et dérivable sur $]a, b[$ alors il existe un réel c de $]a, b[$ tel que $f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$.

Si C_f est la représentation graphique de f dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

alors il existe au moins une tangente à C_f parallèle à la droite (AB) où

A et B sont les points de C_f d'abscisses respectives a et b .

- Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ ($a < b$) et dérivable sur $]a, b[$. soit deux réels m et M .

Si $m \leq f'(x) \leq M$ pour tout x de $]a, b[$,

alors $m(b - a) \leq f(b) - f(a) \leq M(b - a)$

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I et $M > 0$.

Si $|f'(x)| \leq M$ pour tout x de I , alors $|f(b) - f(a)| \leq M|b - a|$,

pour tout réels a et b de I .

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I :

- Si la dérivée de f est strictement positive sur I , alors la fonction f est strictement croissante sur I .

- Si la dérivée de f est strictement négative sur I , alors la fonction f est strictement décroissante sur I .

- Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I .

- Si f' est positive et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert contenu dans I , alors f est strictement croissante.

- Si f' est négative et ne s'annule sur aucun intervalle ouvert contenu dans I , alors f est strictement décroissante sur I .

- Soit f une fonction définie sur un intervalle ouvert I et dérivable en un réel a de I et C_f sa courbe dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On dit que le point $A(a, f(a))$ est un point d'inflexion de C_f si C_f traverse sa tangente en ce point.

- Soit f une fonction deux fois dérivable sur $]a - h, a + h[$, ($h > 0$) et C_f sa représentation graphique dans un repère orthonormé.

Si la fonction dérivée seconde f'' de f s'annule en a en changeant de signe, alors le point $I(a, f(a))$ est un point d'inflexion de la courbe C_f .