

Chapitre II

Equations à coefficients complexes

1) Racine $n^{\text{ième}}$ d'un nombre complexe :

■ $a \in \mathbb{C}$, $n \in \mathbb{N}^*$, on appelle racine $n^{\text{ième}}$ du nombre complexe a tout nombre complexe Z , tel que $Z^n = a$.

■ Si $a = 0$ alors 0 est l'unique racine $n^{\text{ième}}$ de 0.

■ Si $a \neq 0$ on pose $a = [r, \theta] = r e^{i\theta}$.

$$Z^n = a \Leftrightarrow Z = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i(\frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n})} = [\sqrt[n]{r}, \frac{\theta}{n} + \frac{2k\pi}{n}] \text{ où } k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

■ Racine $n^{\text{ième}}$ de l'unité :

$$Z^n = 1 \Leftrightarrow Z = [1, \frac{2k\pi}{n}] = e^{i\frac{2k\pi}{n}} \text{ avec } k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}.$$

■ Cas particulier : les racines carrées d'un nombre complexe :* Méthode trigonométrique :

$$Z^2 = a \Leftrightarrow Z = [\sqrt{r}, \frac{\theta}{2} + k\pi] \text{ avec } k \in \{0, 1\}.$$

* Méthode algébrique :

$Z^2 = a$, on pose $Z = x + iy$.

$$Z^2 = a \Leftrightarrow \begin{cases} |Z|^2 = |a| \\ \operatorname{Im}(Z^2) = \operatorname{Im}(a) \\ \operatorname{Re}(Z^2) = \operatorname{Re}(a) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = |a| \\ x^2 - y^2 = \operatorname{Re}(a) \\ \operatorname{Im}(Z^2) \text{ et } \operatorname{Im}(a) \text{ sont de même signe} \end{cases}$$

2) Equations de second degré dans $\mathbb{C}$:

Soient a , b et c trois nombres complexes avec $a \neq 0$.

L'équation $aZ^2 + bZ + c = 0$ admet dans $\mathbb{C}$ deux solutions :

$$\Delta = b^2 - 4ac = \delta^2, \delta \text{ est une racine carrée de } \Delta.$$

$$\text{Les solutions sont } z' = \frac{-b+\delta}{2a} \text{ et } z'' = \frac{-b-\delta}{2a}$$

Remarque :

$$* z' + z'' = -\frac{b}{a} \quad \text{et} \quad z' \cdot z'' = \frac{c}{a}$$

$$* \text{ Si } a + b + c = 0 \text{ alors } z' = 1 \text{ et } z'' = \frac{c}{a}$$

$$* \text{ Si } a - b + c = 0 \text{ alors } z' = -1 \text{ et } z'' = -\frac{c}{a}$$

* Si $b = 2b'$ on utilise $\Delta' = b'^2 - ac = \delta'^2$ alors les solutions sont :

$$z' = \frac{-b' - \delta'}{a} \text{ et } z'' = \frac{-b' + \delta'}{a}$$

Réflexes :

Situations	Réflexes
Comment déterminer les racines carrées d'un nombre réel x ?	Si $x > 0$ alors les racines carrées sont $\pm\sqrt{x}$ Si $x < 0$ alors les racines carrées sont $\pm i\sqrt{ x }$
Comment déterminer les racines carrées de iy (avec $y \in \mathbb{R}$) ?	On a $(1+i)^2 = 2i$ et $(1-i)^2 = -2i$ Si $y > 0$ alors les racines carrées de iy sont $\pm\sqrt{\frac{y}{2}}(1+i)$ Si $y < 0$ alors les racines carrées de iy sont $\pm\sqrt{\frac{ y }{2}}(1-i)$
Comment déterminer les racines carrées de $z = x + iy$?	1) Méthode algébrique : $z^2 = a + ib$ $\begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{a^2 + b^2} \\ x^2 - y^2 = a \\ x \cdot y \text{ et } b \text{ ont le même signe} \end{cases}$ 2) Méthode géométrique : Si $z^2 = [r, \theta] \Rightarrow z = \pm \sqrt{r} e^{i\frac{\theta}{2}}$
$az^2 + bz + c = 0$ Comment déterminer les solutions ?	* Si $b = 2b'$ on utilise Δ' le discriminant réduit * Si non on calcule une racine carrée de Δ $Z' = \frac{-b - \delta}{2a} \text{ et } Z'' = \frac{-b + \delta}{2a}$