

CONIQUES

Résultats à retenir :

1°/ Soit D une droite et F un point n'appartenant pas à D .

Pour tout point M du plan, on note H son projeté orthogonal sur la droite D .

On appelle parabole de foyer F et de directrice D , l'ensemble des points M tels que $MF = MH$.

2°/ Toute parabole admet comme axe de symétrie son axe focal.

Toute parabole rencontre son axe focal en un unique point appelé sommet de la parabole.

3°/ Soit P une parabole de sommet S , de foyer F et de paramètre p .

On munit le plan du repère orthonormé $(S, \vec{i}, \vec{j})$, où $\vec{i} = \frac{1}{SF}$.

La parabole P a pour équation $y^2 = 2px$, la directrice D a pour équation $x = -\frac{p}{2}$ et le foyer F a pour coordonnées $(\frac{p}{2}, 0)$.

Réciproquement, dans le plan rapporté à un repère

orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $y^2 = 2px$

($p > 0$) est la parabole de foyer $F(\frac{p}{2}, 0)$ de directrice la droite

d'équation $x = -\frac{p}{2}$, de paramètre p et de sommet O .

4°/ Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit p un réel strictement positif.

Si P est la parabole d'équation $y^2 = 2px$. Alors la tangente à P en un point $M_0(x_0, y_0)$ est la droite d'équation $y_0 y = p(x + x_0)$.

Si P est la parabole d'équation $x^2 = 2py$, alors la tangente à P en un point $M_0(x_0, y_0)$ est la droite d'équation $x_0 x = p(y + y_0)$.

5°/ Soit une parabole d'équation $y^2 = 2px$, dans le repère orthonormé

$(S, \vec{i}, \vec{j})$, où S est le sommet de la parabole et $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont des

vecteurs directeurs unitaires respectifs de l'axe focal et de la

directrice. Alors sa tangente au sommet a pour équation $x = 0$.

6°/ Soit D une droite, F un point n'appartenant pas à D et un réel $e > 1$.

Pour tout point M du plan, on note H son projeté orthogonal sur la droite D.

On appelle hyperbole de foyer F, directrice D et d'excentricité e,

l'ensemble des points M tel que $\frac{MF}{ME} = e$.

7°/ Soit H une hyperbole de foyer F, de directrice D et d'excentricité e.

- L'axe focal de H est un axe de symétrie pour H.

- H rencontre son axe focal en deux points appelés sommets de l'hyperbole et ils sont les barycentres respectifs des points $(F, 1)$, $(K, -e)$ et $(F, 1)$, (K, e) où K est le projeté orthogonal de F sur D.

8°/ Soit H une hyperbole de foyer F, de directrice D et d'excentricité e, de sommet S et S'.

On désigne par O le milieu de $[SS']$, on pose $\vec{i} = \frac{1}{OF} \overrightarrow{OF}$ et on considère

un vecteur unitaire $\vec{j}$, directeur de D.

Si S a pour coordonnées $(a, 0)$ et F a pour coordonnées $(c, 0)$ dans le

repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, alors l'hyperbole H a pour équation

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \text{ avec } b^2 = c^2 - a^2.$$

Réciproquement, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$,

l'ensemble des points M(x,y) tels que $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ ($a > 0$, $b > 0$) est

une hyperbole de centre O, de foyer $F(\sqrt{a^2 + b^2}, 0)$, de directrice

d'équation $x = \frac{a^2}{c}$, d'excentricité $e = \frac{c}{a}$ avec $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ et de

sommets $S(a, 0)$ et $S'(-a, 0)$.

Pour des raisons de symétrie par rapport à la droite $\Delta : y = x$, la courbe

H d'équation $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est une hyperbole de centre O, de foyer

$F(0, \sqrt{a^2 + b^2})$, de directrice la droite d'équation $y = \frac{b^2}{c}$ d'excentricité

$e = \frac{c}{b}$ avec $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ et de sommets $S(0, b)$ et $S'(0, -b)$

9°/

- Toute hyperbole admet un centre de symétrie, qui est le milieu de ses sommets. Ce centre de symétrie est appelé centre de l'hyperbole.

- Toute hyperbole admet deux axes de symétries qui sont l'axe focal et l'axe parallèle à la directrice et passant par le centre de symétrie.

10°/ Soit H une hyperbole de foyer F et de directrice D.

Le fait que l'hyperbole H admette un centre de symétrie implique l'existence d'une autre directrice D' et d'un autre foyer F' symétriques respectifs de D et F.

On dit alors que F est le foyer associé à la directrice D et F' est le foyer associé à la directrice D'.

11°/ Soit H l'hyperbole d'équation $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Alors H admet deux asymptotes d'équations $y = \frac{b}{a}x$ et $y = -\frac{b}{a}x$.

La tangente à H en un point $M_0(x_0, y_0)$ a pour équation $\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$

12°/ La tangente à une hyperbole H en son sommet S (a,0) a pour équation $x = a$.

13°/ Toute hyperbole rapportée à ses asymptotes a une équation de la forme $XY = k$ où k est un réel non nul.

14°/ Soit D une droite, F un point n'appartenant pas à D et un réel e tel que $0 < e < 1$.

Pour tout point M du plan, on note H son projeté orthogonal sur la droite D.

On appelle ellipse de foyer F, de directrice D et d'excentricité e,

l'ensemble des points M tels que $\frac{MF}{MH} = e$.

15°/ Soit E une ellipse de foyer F, de directrice D et d'excentricité e.

L'axe focal (E) de e est un axe de symétrie pour E.

E rencontre son axe focal en deux points appelés sommets principaux de

l'ellipse et ils sont les barycentres respectifs des points (F, 1), (K, -e)

et (F', 1), (K', e) où K est le projeté orthogonal de F sur D.

16°/ Soit E une ellipse de foyer F, de directrice D et d'excentricité e.

On désigne par O le milieu des sommets principaux S et S'.

On pose $\vec{i} = \frac{1}{OF} \overrightarrow{OF}$ et $\vec{j}$ un vecteur unitaire de sorte que le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$ soit orthonormé.

Si S a pour coordonnées $(a, 0)$ et F a pour coordonnées $(c, 0)$ alors l'ellipse E a pour équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, avec $b^2 = a^2 - c^2$ ($a < c$).

Cette équation est appelée équation réduite de E.

17°/ Toute ellipse admet un centre de symétrie, qui est le milieu du segment formé par ses sommets principaux.

Ce centre de symétrie est appelé centre de l'ellipse.

Toute ellipse admet deux axes de symétrie qui sont l'axe focal et la droite perpendiculaire à l'axe focal en son centre.

18°/ Soit E une ellipse de foyer F et directrice D.

Le fait que l'ellipse E admette un centre de symétrie implique l'existence d'une autre directrice D' et d'un autre foyer F' symétriques respectifs de D et F par rapport au centre de l'ellipse.

On dit que F est le foyer à la directrice D et que F' est le foyer associé à la directrice D'.

19°/ Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- Soit $a > b$ deux réels strictement positifs.

L'ensemble des points M (x, y) tels que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est une ellipse de

L'ensemble des points M (x, y) tels que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est une ellipse de centre O, de foyer F $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$, L'ensemble des points M (x, y) tels

que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est une ellipse de centre O, de foyer F $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$,

de directrice associée la droite d'équation $x = \frac{a^2}{c}$ et d'excentricité $e = \frac{c}{a}$, où $a^2 = c^2 + b^2$.

• Soit $a < b$ deux réels strictement positifs.

L'ensemble des points $M(x, y)$ tels que $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ est une ellipse de

centre O , de foyer $F(0, \sqrt{a^2 - b^2})$, de directrice associée la droite

d'équation $y = \frac{b^2}{c}$ et d'excentricité $e = \frac{c}{b}$, où $b^2 = a^2 + c^2$.

20°/ Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit E l'ellipse d'équation $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > 0$, $b > 0$.

Alors la tangente à E en un point $M_0(x_0, y_0)$ a pour équation

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

21°/ La tangente à une ellipse E en son sommet $S(a, 0)$ a pour équation $x = a$.

La tangente à une ellipse E en son sommet $L(0, b)$ a pour équation $y = b$.

22°/ Soit D une droite, F un point n'appartenant pas à D et un réel $e > 0$.

Pour tout point M du plan, on note H son projeté orthogonal sur D .

On appelle conique C d'excentricité e , de foyer F et de directrice D l'ensemble des points M tels que $MF = eMH$.

Si $e = 1$, C est une parabole de foyer F et de directrice D .

Si $e > 1$, C est une hyperbole de foyer F , de directrice D et d'excentricité e .

Si $e < 1$, C est une ellipse de foyer F , de directrice D et d'excentricité e .