

FONCTIONS RECIPROQUES

résultats à retenir :

- Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une fonction définie sur I .
On dit que f réalise une bijection de I sur $f(I)$ (ou que f est une bijection de I sur $f(I)$), si pour tout y de $f(I)$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans I .
- Si f est une fonction strictement monotone sur un intervalle I , alors f réalise une bijection de I sur $f(I)$.
- Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$. On appelle fonction réciproque de f et on note f^{-1} la fonction définie sur $f(I)$ qui à tout y de $f(I)$ associe l'unique solution dans I de l'équation $f(x) = y$.
- Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$ et f^{-1} sa fonction réciproque.
Pour tout x de I et tout y de $f(I)$, $f(x) = y$, si et seulement si,
 $f^{-1}(y) = x$.
 $f^{-1} \circ f(x) = x$, pour tout x de I et $f \circ f^{-1}(y) = y$, pour tout y de $f(I)$.
- Les courbes respectives d'une bijection f et de sa réciproque f^{-1} dans un repère orthonormé sont symétriques par rapport à la droite $\Delta : y = x$.
- Si f est une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle I alors sa réciproque f^{-1} est continue et strictement monotone sur l'intervalle $f(I)$ et varie dans le même sens que f .
- Soit f une fonction strictement monotone d'un intervalle I sur $f(I)$, a un réel de I et $b = f(a)$.
Si f est dérivable en a et si $f'(a) \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en b
et $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(a)}$.

- Soit f une bijection d'un intervalle I sur $f(I)$.

Si f est dérivable sur I et $f'(x) \neq 0$ pour tout x de I , alors f^{-1} est

dérivable sur $f(I)$ et $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'([f^{-1}(y)])}$, pour tout y de $f(I)$.

- Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

La fonction $x \mapsto x^n$ réalise une bijection de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$. Elle admet une fonction réciproque strictement croissante de $\mathbb{R}_+$ sur $\mathbb{R}_+$, appelée fonction racine $n^{\text{ième}}$.

- Pour tous réels positifs x et y , $y = x^n$, si et seulement si, $x = \sqrt[n]{y}$.
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt[n]{x} = +\infty$
- Soit deux entiers n et p tels que $n \geq 2$ et $p \geq 2$ et deux réels positifs a et b . Alors :

$$\sqrt[n]{a^n} = a ; (\sqrt[n]{a})^n = a ; \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} ; \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, b \neq 0$$

$$\sqrt[n]{a} = \sqrt[n^p]{a^p} ; (\sqrt[n]{a})^p = \sqrt[n]{a^p} ; \sqrt[n]{\sqrt[p]{a}} = \sqrt[np]{a}$$

Pour tout entier $n \geq 2$, la fonction $f : x \mapsto \sqrt[n]{x}$ est continue sur

$[0, +\infty[$ et dérivable sur $]0, +\infty[$. De plus, $f'(x) = \frac{1}{n(\sqrt[n]{x})^{n-1}}$,

pour tout $x > 0$.

- Soit u une fonction dérivable et positive sur un intervalle I et un entier $n \geq 2$.

La fonction $f : x \mapsto \sqrt[n]{u(x)}$ est continue sur I et dérivable en tout

réel x de I tel que $u(x) \neq 0$. De plus, $f'(x) = \frac{u'(x)}{n(\sqrt[n]{u(x)})^{n-1}}$

, pour tout x de I tel que $u(x) > 0$.