

Chapitre III

Produit scalaire produit vectoriel dans l'espace

▪ **Produit scalaire** : $A, B, C \in \zeta$ et $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \in W$.

$\overline{AB} \cdot \overline{AC} = AB \cdot AC \cos \hat{BAC}$	Si $\vec{u} = \vec{0}$ ou $\vec{v} = \vec{0}$
$\overline{AB} \cdot \overline{AB} = AB^2$	alors $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$
$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$	$(\alpha \vec{u}) \cdot \vec{v} = \alpha(\vec{u} \cdot \vec{v})$
$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$	$(\alpha \vec{u}) \cdot (\beta \vec{v}) = \alpha\beta(\vec{u} \cdot \vec{v})$

Dans un repère orthonormé $(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$$

- $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$
- $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0 \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow xx' + yy' + zz' = 0$
- $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy' + zz'$

▪ **Produit vectoriel** :

$\overline{AB} \wedge \overline{AC} = 0 \Leftrightarrow \overline{AB}, \overline{AC} \text{ colinéaires}$	$\overline{AB} \wedge \overline{AC}$ est un vecteur orthogonal à $\overline{AB}$ et à $\overline{AC}$
$(\overline{AB}, \overline{AC}, \overline{AB} \wedge \overline{AC})$ base directe.	$\ \overline{AB} \wedge \overline{AC}\ = AB \cdot AC \sin \hat{BAC}$
$\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$	$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$
$\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$	$\alpha \vec{u} \wedge \beta \vec{v} = \alpha\beta(\vec{u} \wedge \vec{v})$

Dans un repère orthonormé directe

$(O, \vec{I}, \vec{J}, \vec{K})$ R.O.N.D

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} \quad \vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} |y & y'| \\ |z & z'| \\ |x & x'| \end{pmatrix}$$

$$(\vec{u} \wedge \vec{v}) \cdot \vec{w} = (\vec{v} \wedge \vec{w}) \cdot \vec{u} = (\vec{w} \wedge \vec{u}) \cdot \vec{v} = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$$

$$\det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} x & x' & x'' \\ y & y' & y'' \\ z & z' & z'' \end{vmatrix} = x \begin{vmatrix} y' & y'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} - y \begin{vmatrix} x' & x'' \\ z' & z'' \end{vmatrix} + z \begin{vmatrix} x' & x'' \\ y' & y'' \end{vmatrix}$$

L'aire du parallélogramme ABCD est : $\|\vec{AB} \wedge \vec{AD}\|$

L'aire du triangle ABC est : $\frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\|}{2}$

Le volume du tétraèdre ABCD est : $\frac{|(\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD}|}{6}$

Le volume du parallélépipède ABCDEFGH est $|(\vec{AB} \wedge \vec{AD}) \cdot \vec{AE}|$

*P: $ax + by + cz + d = 0$ et A (x_A, y_A, z_A) alors $d(A, P) = \frac{|ax_A + by_A + cz_A + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

$d(A, P) = \frac{|\vec{BA} \cdot \vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$ avec B $\in P$ et $\vec{n}$ normal de P.

* soit la droite D(B, $\vec{u}$) alors $d(A, D) = \frac{\|\vec{AB} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}$

Réflexes :

Situations	Réflexes
Comment montrer que $\vec{u}$ est orthogonale à (ABC) ?	Il suffit que les vecteurs $\vec{AB} \wedge \vec{AC}$ et $\vec{u}$ soient colinéaires.
Comment montrer $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ base orthonormé ?	$\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\ \vec{w}\ = \ \vec{u}\ = \ \vec{v}\ = 1$ et $\vec{u} \perp \vec{v}$.
Comment calculer le volume d'un tétraèdre ?	* $V = \frac{1}{3}$ aire de base $\times$ hauteur où $V = \frac{ (\vec{AB} \wedge \vec{AC}) \cdot \vec{AD} }{6}$