

GEOMETRIE DANS L'ESPACE

Résultats à retenir :

1°/ Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$ de l'espace et tous réels α et β :

- $\vec{u}\vec{v} = \vec{v}\vec{u}$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u}\vec{v} + \vec{u}\vec{w}$
- $(\alpha\vec{u})\vec{v} = \vec{u} \cdot (\alpha\vec{v}) = \alpha(\vec{u}\vec{v})$
- $(\alpha\vec{u}) \cdot (\beta\vec{v}) = \alpha\beta(\vec{u}\vec{v})$
- $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$

2°/ Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs et α, β deux réels .

- $\vec{u} \wedge \vec{u} = \vec{0}$.
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$, si et seulement si , $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires .
- $\vec{u} \wedge \vec{v} = -(\vec{v} \wedge \vec{u})$, $\vec{u} \wedge (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{u} \wedge \vec{w}$, $\alpha\vec{u} \wedge \beta\vec{v} = \alpha\beta(\vec{u} \wedge \vec{v})$

3°/ L'espace est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Pour tous vecteurs $\vec{u}, \vec{v}$ et $\vec{w}$,

$$(\vec{u} \wedge \vec{v})\vec{w} = (\vec{v} \wedge \vec{w})\vec{u} = (\vec{w} \wedge \vec{u})\vec{v} = \det(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) \cdot \vec{0} .$$

4°/ Le volume d'un parallélogramme ABCDEFGH est égal à

$$|(\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AD}) \cdot \overrightarrow{AE}| .$$

5°/ L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit S une sphère de centre A et de rayon R . Soit P un plan , h la distance de A à P et H le projeté orthogonal de A sur P ,

L'intersection de S et P est

- Vide si $h > R$,
- réduite au singleton $\{H\}$ si $h = R$,
- le cercle de rayon $\sqrt{R^2 - h^2}$ et de centre H si $h < R$.

6°/ On appelle distance d'un point M à une droite D , la distance MH où H est le projeté orthogonal de M sur D . Cette distance est notée $d(M, D)$.

7°/ Soit D une droite de vecteur $\vec{u}$ et A un point de D .

La distance d'un point M de l'espace à la droite D est le réel

$$d(M, D) = \frac{\|\overrightarrow{MA} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}.$$

8°/ Soit $\vec{u}$ un vecteur de l'espace. L'application qui à tout point M de l'espace associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$ est appelée translation de vecteur $\vec{u}$ et notée $t_{\vec{u}}$.

Pour tous points M et M' de l'espace, $t_{\vec{u}}(M) = M'$ équivaut à $\overrightarrow{MM'} = \vec{u}$.

9°/ Toute translation de l'espace de vecteur $\vec{u}$ est bijective. Son application réciproque est la translation de vecteur $-\vec{u}$.

Pour tous points M et N de l'espace, $N = t_{\vec{u}}(M)$ équivaut à $M = t_{-\vec{u}}(N)$.

10°/ Une application de l'espace dans lui-même est une translation, si et seulement si, pour tous points M et N d'images respectives M' et N' , on a : $\overrightarrow{M'N'} = \overrightarrow{MN}$.

- Toute translation de l'espace conserve la distance.
- Toute translation de l'espace conserve le produit scalaire.

11°/ L'image d'une droite par une translation est une droite qui lui est parallèle.

L'image d'un plan par une translation est un plan qui lui est parallèle.

12°/ Toute translation conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

Toute translation conserve le milieu.

13°/ L'image d'une sphère S par une translation est une sphère S' de même rayon et de centre l'image du centre .

14°/ L'espace est muni d'un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

• Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ un vecteur de l'espace .

Si $M(x, y, z)$ est un point de l'espace et $M'(x', y', z')$ est son

image par la translation de vecteur $\vec{u}$ alors
$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases} .$$

• L'application qui à tout point $M(x, y, z)$ associe le point

$M'(x', y', z')$ tel que
$$\begin{cases} x' = x + a \\ y' = y + b \\ z' = z + c \end{cases}$$
 est la translation de vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

15°/ Soit I un point de l'espace et K un réel non nul . L'application qui à tout point M de l'espace associe l'unique point M' tel que $\overrightarrow{IM'} = K \overrightarrow{IM}$ est appelée homothétie de centre I et de rapport K , elle est notée $h_{(I, K)}$.

Pour tous points M et M' de l'espace , $h_{(I, K)}(M) = M'$ équivaut à $\overrightarrow{IM'} = K \overrightarrow{IM}$.

16°/ Toute homothétie de centre I et de rapport non nul K est une bijection de l'espace et admet comme application réciproque

l'homothétie de centre I et de rapport $\frac{1}{k}$. Pour tous points M et N de l'espace, $N = h_{(I,k)}(M)$ équivaut à $M = h_{\left(I, \frac{1}{k}\right)}(N)$.

17°/ Soit f une application de l'espace dans lui-même et k un réel non nul et différent de 1.

f est une homothétie de rapport k, si et seulement si, pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par f, $\overline{M'N'} = k \overline{MN}$.

18°/ Soit h une homothétie de l'espace de rapport k.

Pour tous points M et N d'images respectives M' et N' par h, $M'N' = |k| MN$.

19°/ L'image d'une droite par une homothétie est une droite qui lui est parallèle.

L'image d'un plan par une homothétie est un plan qui lui est parallèle.

20°/ Toute homothétie conserve le parallélisme et l'orthogonalité.

Toute homothétie conserve le milieu.

21°/ L'image d'une sphère S de centre I et de rayon R par une homothétie de l'espace de rapport k est une sphère S' de centre I' image de I et de rayon $|k| R$.

22°/ Toute homothétie de l'espace conserve le contact.

23°/ L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

• Soit un point I (a , b , c), k un réel non nul et différent de 1 et l'homothétie de centre I et de rapport k.

Si $M(x, y, z)$ est un point de l'espace et $M'(x', y', z')$ est son image

par h , alors
$$\begin{cases} x' = kx + (1-k)a \\ y' = ky + (1-k)b \\ z' = kz + (1-k)c \end{cases}$$

• L'application qui à tout point $M(x, y, z)$ associe le point

$$M'(x', y', z') \text{ tel que } \begin{cases} x' = kx + \alpha \\ y' = ky + \beta, k \neq 1 \\ z' = kz + \delta \end{cases}$$

est l'homothétie de centre $I\left(\frac{\alpha}{1-k}, \frac{\beta}{1-k}, \frac{\delta}{1-k}\right)$ et de rapport k .