

Chapitre IV

Equations de droites, de plans et de sphères

■ Orthogonalité – distance d'un point à un point :

■ Un vecteur non nul est dit **normal d'un plan P** s'il est orthogonal à tous les vecteurs de P. Si $(\vec{U}; \vec{V})$ est une base de P et $\vec{n}$ un vecteurs normal de P alors $\vec{n} \perp \vec{u}$ et $\vec{n} \perp \vec{v}$ alors $\vec{n} = \alpha(\vec{U} \wedge \vec{V})$

■ Une droite D est orthogonal à P si et seulement si $\vec{W}$ le vecteur directeurs de D est colinéaire au vecteurs normal de P.

■ a, b, c et d quatre réels données, l'ensemble des points M(x, y, z) vérifiant : $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ est un plan de vecteurs

$$\text{normal } \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

■ P et P' deux plans, d'équations respectives :

$$ax + by + cz + d = 0 \text{ et } a'x + b'y + c'z + d' = 0 \text{ dans un repère orthonormal.}$$

$$* P \perp P' \Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{n}' = 0 \Leftrightarrow aa' + bb' + cc' = 0.$$

■ Intersection de deux plans :

$$P : ax + by + cz + d = 0 ; P' : a'x + b'y + c'z + d' = 0$$

$$\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ vecteur normal de P ; } \vec{n}' \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix} \text{ vecteur normal de P'}$$

$$P \text{ et } Q \text{ sont strictement parallèles} \Leftrightarrow \vec{n} = \alpha \cdot \vec{n}' \text{ et } \alpha d' \neq d.$$

$$* P \text{ et } Q \text{ sont parallèles} \Leftrightarrow \vec{n} = \alpha \cdot \vec{n}' \Leftrightarrow \vec{n} \text{ et } \vec{n}' \text{ sont colinéaires.}$$

$$* P \text{ et } Q \text{ sont sécantes} \Leftrightarrow P \text{ et } Q \text{ non parallèles} \Leftrightarrow \vec{n} \text{ et } \vec{n}' \text{ non colinéaires.}$$

■ Intersection droite et plan :

$$P : ax + by + cz + d = 0 ; \vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ vecteur normal de P. } \vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \delta \end{pmatrix} \text{ est un vecteur}$$

directeur de la droite Δ qui passe par $A(x_A, y_A, z_A)$.

$$* \Delta // P \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow \alpha a + \beta b + \delta c = 0$$

Si de plus $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$ alors $A \in P$ donc $\Delta \subset P$

et si $ax_A + by_A + cz_A + d \neq 0$ alors $A \notin P$ donc Δ est parallèle strictement à P .

* Δ coupe $P \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{n} \neq 0$

Sphère :

■ Définition :

Soit R un réel strictement positif, I un point de l'espace. L'ensemble des points M de l'espace tels que :

$IM = R$ est la sphère de centre I et de rayon R , noté : $S(I, R)$

■ Théorème :

Soient A et B deux points de l'espace. La sphère de diamètre $[AB]$ est l'ensemble de points M de l'espace tels que $\overrightarrow{AM} \cdot \overrightarrow{BM} = 0$.

■ Equation cartésienne d'une sphère :

Soient $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé, le point $A(x_A, y_A, z_A)$ de l'espace et r un réel strictement positif.

La sphère S de centre A de rayon r est l'ensemble des points $M(x, y, z)$ tel que : $(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = r^2$, c'est l'équation cartésienne de S .

* En développant cette équation on obtient alors une équation de la forme : $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$.

■ Positions Sphère et plan :

$P : ax + by + cz + d = 0$ et S de centre I de rayon R .

* Si $d(I, P) = R \Rightarrow S \cap P = \{H\}$ H est le projeté orthogonal de I sur P .

On dit que P est tangent à S .

* Si $d(I, P) > R \Rightarrow S \cap P = \emptyset$. On dit que P est extérieur à S .

* Si $d(I, P) < R \Rightarrow S \cap P$ est un cercle de centre H de rayon $\sqrt{R^2 - d^2}$.

On dit P et S sont sécants.

Le point H vérifie $\overrightarrow{IH} = \alpha \vec{n}$ où $\vec{n}$ vecteur normal de P et $H \in P$.

Remarque : Si $d(I, P) = 0$ alors $S \cap P$ est le cercle de centre I et de rayon R .

■ Théorème :

L'ensemble des points $M(x, y, z)$ tel que $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ est :

* Une sphère de centre $I\left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}, \frac{-c}{2}\right)$ de rayon $R = \sqrt{h}$

$$\text{si } h = \frac{a^2 + b^2 + c^2}{4} - d > 0.$$

* Un singleton $\left\{ I\left(\frac{-a}{2}, \frac{-b}{2}, \frac{-c}{2}\right) \right\}$ si $h = 0$.

* Le vide si $h < 0$.

Réflexes :

Situations	Réflexes
Comment déterminer une équation du plan dont on connaît un point et un vecteur normal ?	* Une équation du plan $P : ax + by + cz + d = 0$ $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et on calcul d à l'aide des coordonnées de A Où $M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} \cdot \vec{n} = 0$ On retrouve l'équation du plan.
Comment déterminer l'intersection d'une droite D et d'une sphère S ?	On écrit l'équation paramétrique de la droite puis on remplace x et y et z dans l'équation de la sphère. On retrouve une équation de second degré. Si l'équation à 2 solutions donc $S \cap D = \{2 \text{ points}\}$ Si l'équation à 1 solution double alors $S \cap D = \{1 \text{ points}\}$ Si l'équation n'admet pas de solution alors $S \cap D = \emptyset$.