

INTEGRALE D'UNE FONCTION CONTINUE

Des résultats à retenir :

- Le plan étant muni d'un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$, l'unité d'aire, notée par u.a est l'aire du rectangle de dimensions $\|\vec{i}\|$ et $\|\vec{j}\|$.
- Soit f une fonction continue sur un intervalle I . Si F et G sont deux primitives de f sur I alors pour tous a et b de I , $F(b) - F(a) = G(b) - G(a)$.

- Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Soit f une fonction continue et positive sur un intervalle $[a, b]$ et F une primitive de f sur $[a, b]$.

L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le réel $F(b) - F(a)$

Le réel $F(b) - F(a)$ est appelé intégrale de f de a à b et est noté $\int_a^b f(x) dx$.

- Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a et b deux réels de I et F une primitive de f sur I .

On appelle intégrale de f entre a et b le réel, noté $\int_a^b f(x) dx$,

défini par $\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$.

- Soit f une fonction continue sur un intervalle I , a , b et c des réels de I . Alors :

$$\int_a^a f(x) dx = 0 \quad ; \quad \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx$$

$$\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx \quad (\text{Relation de Chasles})$$

- Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$.

L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par l'axe des abscisses, la courbe de f , les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le réel

$$\int_a^b |f(x)| dx.$$

- Soit f et g deux fonction continues sur $[a, b]$.

Pour tous réels α et β ,

$$\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x)) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx + \beta \int_a^b g(x) dx$$

- Soit f une fonction continue sur $[a, b]$. Si f est positive sur $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$.

- Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ où $a < b$. Si f est positive et ne s'annule qu'en un nombre finide réels de $[a, b]$, alors $\int_a^b f(x) dx > 0$.

- Soit f , g et h trois fonctions continues sur $[a, b]$.

Si $h \leq f \leq g$, alors $\int_a^b h(x) dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$.

- Si f est une fonction continue sur $[a, b]$, alors

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

- Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Soit f et g deux fonctions continues sur $[a, b]$.

L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f , la courbe de g et les droites d'équations $x = a$ et $x = b$ est le réel

$$\int_a^b |f(x) - g(x)| dx.$$

- Théorème d'intégration par parties :

Soit f et g deux fonctions dérivables sur $[a, b]$ et telles que leurs dérivées f' et g' sont continues sur $[a, b]$. Alors

$$\int_a^b f(t) g'(t) dt = [f(t) g(t)]_a^b - \int_a^b f(t) g'(t) dt.$$

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ ($a < b$). On appelle valeur moyenne de f sur $[a, b]$ le réel, noté $\bar{f}$, défini par

$$\bar{f} = \frac{1}{(b-a)} \int_a^b f(x) dx.$$

- Interprétation géométrique de la valeur moyenne

Le plan est muni d'un repère orthogonal.

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$.

L'aire (en u.a) de la partie du plan limitée par la courbe de f , les droites d'équations $x = a$, $x = b$ et $y = 0$ est égale à celle du rectangle de côtés $(b - a)$ et $\bar{f}$.

• Inégalité de la moyenne

Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ ($a < b$). Soit m et M deux réels.

Si pour tout x de $[a, b]$, $m \leq f(x) \leq M$, alors $m \leq \bar{f} \leq M$.

• Soit f une fonction continue sur $[a, b]$ ($a < b$). Il existe $c \in [a, b]$, tel que $\bar{f} = f(c)$.

• L'espace est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit f une fonction continue et positive sur $[a, b]$. Le volume V du solide de révolution engendré par la rotation de l'arc $AB = \{ M(x, y) \text{ tels que } y = f(x) \text{ et } a \leq x \leq b \}$ autour de

l'axe $(O, \vec{i})$ est le réel $V = \pi \int_a^b f^2(x) dx$

• Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel de I .

Alors la fonction F définie sur I par $F(x) = \int_a^x f(t) dt$ est la primitive de f qui s'annule en a .

• Soit f une fonction continue sur un intervalle I et a un réel de I .

Alors la fonction $F: x \mapsto \int_a^x f(t) dt$ est dérivable sur I et $F'(x) = f(x)$, pour tout réel x de I .

• Soit f une fonction continue sur un intervalle I , u une fonction dérivable sur un intervalle J telle que $u(J) \subset I$ et a un réel de I . Alors

la fonction F définie sur J par $F(x) = \int_a^{u(x)} f(t) dt$ est dérivable sur J et $F'(x) = f(u(x)) \cdot u'(x)$, pour tout x de J .

• Soit f une fonction continue sur un intervalle I centré en 0 et soit a un réel de I .

• Si f est impaire alors $\int_{-a}^a f(x) dx = 0$.

• Si f est paire alors $\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$.