

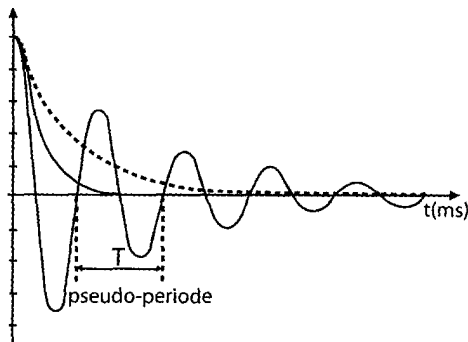
Les oscillations mécaniques forcées

1) Rappel sur les oscillations libres

- Frottements négligeables :
 - Amplitude constante.
 - Oscillations sinusoïdales.
 - Période des oscillations égale à

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K}}$$

- Energie mécanique se conserve.
- Frottements non nuls :
 - Amplitude diminue.
 - Deux régimes d'oscillations :
 - Régime pseudo périodique : la pseudo période T est légèrement supérieur à T_0 .

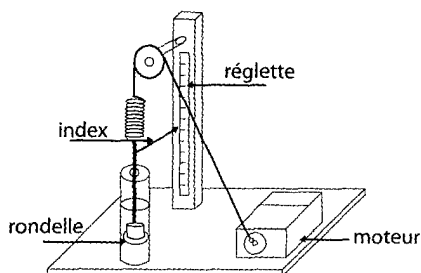


- Régime apériodique pas d'oscillations
- Energie mécanique diminue.

2) Comment oscille le pendule s'il est excité par une force sinusoïdale ?

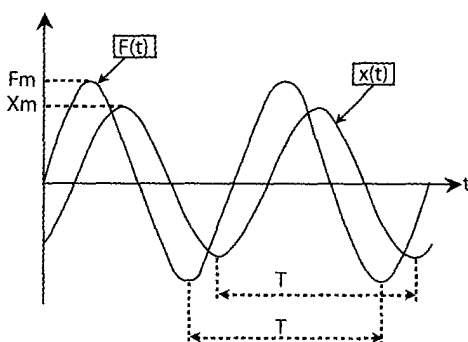
a- Dispositif expérimental.

b- Réponse :



le moteur exerce sur le pendule une force sinusoïdale

$$F(t) = F_m \sin \omega t$$

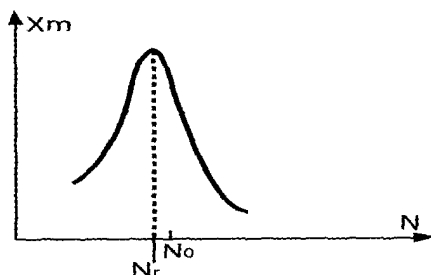


- Le solide effectue des oscillations sinusoïdales.
- Si on varie la fréquence de la force excitatrice (par variation de la vitesse de rotation du moteur), celle du pendule élastique varie aussi tout en lui restant égale.
- La période des oscillations n'est plus égale à la période propre T_0 , elle est imposée par l'excitateur.
- Les oscillations n'étant plus libres, elles sont dites forcées.

3) Quel est l'effet de la fréquence de l'excitateur sur l'amplitude des oscillations du résonateur ?

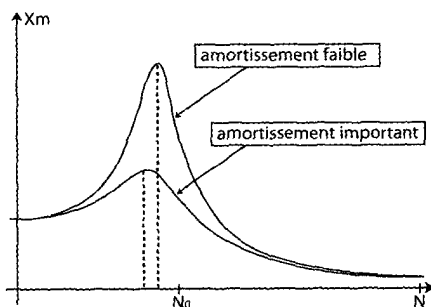
X_m augmente, atteint un maximum, puis elle diminue.

→ Lorsque X_m est maximale : résonance d'élongation.



→ La résonance d'élongation est atteinte pour une fréquence de l'excitateur $N_r < N_0$.

4) Quelle est l'influence de l'amortissement sur l'amplitude X_m des oscillations ?



5) Détermination de X_m et du déphasage φ entre la force excitatrice $f(t)$ et l'élongation $x(t)$.

Equation différentielle : $m \frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$

avec $F(t) = F_m \sin \omega t$, la solution particulière de l'équation différentielle est :

$$x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi_x)$$

Pour déterminer X_m et φ on utilise la construction de Fernel :

$$kx \rightarrow \vec{V}_1(kX_m; \varphi_x)$$

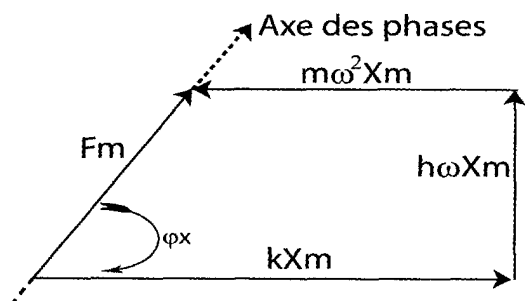
$$h \frac{dx}{dt} \rightarrow \vec{V}_2 \left(h\omega X_m; \varphi_x + \frac{\pi}{2} \right)$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} \rightarrow \vec{V}_3 (m\omega^2 X_m; \varphi_x + \pi)$$

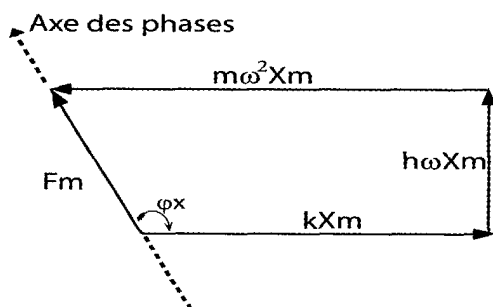
$$F \rightarrow \vec{V}(F_m; 0)$$

$$\vec{V} = \vec{V}_1 + \vec{V}_2 + \vec{V}_3$$

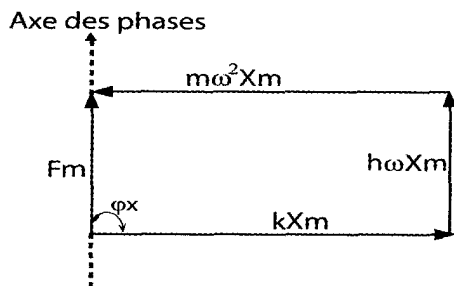
1^{er} cas: $\omega < \omega_0$



2^{eme} cas: $\omega > \omega_0$



3^{eme} cas: $\omega = \omega_0$



$$X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 \omega^2 + (k - m\omega^2)^2}}$$

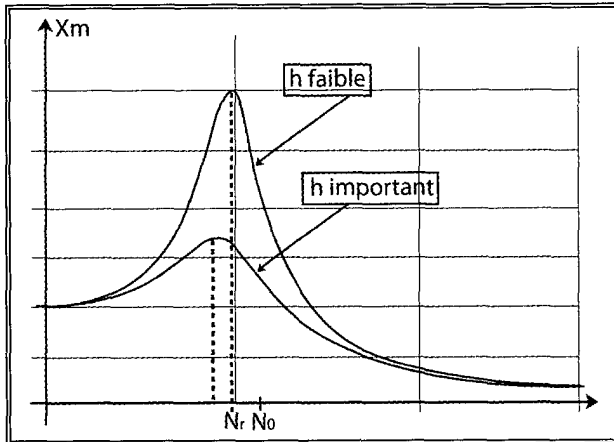
Condition de résonance :

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}$$

$$N_r^2 = N_0^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m^2}$$

Ainsi :

- Si h est faible, X_m importante : résonance aigue.
- Si h est important, X_m faible : résonance floue.



- On désigne par $\varphi = \varphi_x - \varphi_F$

$$\text{Si } \omega < \omega_0 : -\frac{\pi}{2} < \varphi < 0$$

$$\text{Si } \omega = \omega_0 : \varphi = -\frac{\pi}{2}$$

$$\text{Si } \omega > \omega_0 : -\pi < \varphi < -\frac{\pi}{2}$$

Ainsi :

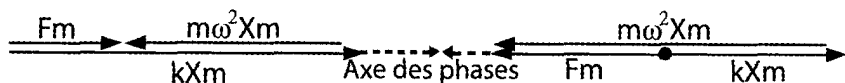
- $X(t)$ est toujours en retard de phase par rapport à $F(t)$.

6) Que deviennent le déphasage φ et l'amplitude X_m lorsque l'amortissement est nul ?

Pour $h=0$

Cas : $\omega < \omega_0$

Cas : $\omega > \omega_0$



$$\varphi = 0$$

$$\varphi = \pi$$

$\Rightarrow X(t)$ et $F(t)$ sont en phase.

$\Rightarrow X(t)$ et $F(t)$ sont en opposition de phase

$$X_m = \frac{F_m}{|m\omega^2 - k|}$$

A la résonance $\omega = \omega_0$; X_m devient infinie $\rightarrow$ rupture de l'oscillateur.

7) Quelle valeur limite peut rendre h ?

Dans le cas où h est nul ; la résonance d'élongation est obtenue pour

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}$$

$$\text{or } \omega_r > 0 \Rightarrow h < m\omega_0\sqrt{2}$$

Si $h > m\omega_0\sqrt{2} \Rightarrow$ absence de résonance.

8) Résonance d'élongation et résonance de vitesse :

Résonance d'élongation

Résonance de vitesse

$$X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2\omega^2 - (k - m\omega^2)^2}}$$

Condition de résonance :

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}$$

$$N_r^2 = N_0^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m^2}$$

$$V_m = \omega X_m \frac{F_m}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{k}{\omega} - m\omega\right)^2}}$$

$$\omega_r^2 = \omega_0^2$$

$$N_r^2 = N_0^2$$

La résonance d'élongation est obtenue pour une fréquence $N_r < N_0$ à laquelle il y a une résonance de vitesse.

Remarque :

Comment identifier deux courbes donnant X_m et V_m en fonction de la fréquence excitatrice ?

1^{ère} méthode : En augmentant la pulsation de l'excitateur, la résonance d'élongation est obtenue avant la résonance de vitesse car $\omega_r < \omega_0$

2^{ème} méthode :

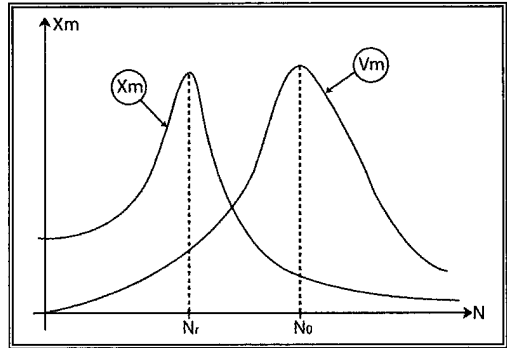
On a :

$$X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2\omega^2 - (k - m\omega^2)^2}}$$

$$V_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 + (\frac{k}{\omega} - m\omega)^2}}$$

Pour $\omega \Rightarrow 0$ on a : $X_m \neq 0$ alors que

$V_m \rightarrow 0$. D'où la courbe qui débute de 0 représente V_m .



9) La résonance et l'énergie :

Lors de la mise en oscillations forcées du résonateur, de l'énergie lui est transférée par l'excitateur.

Le résonateur emmagasine une partie de cette énergie et le reste est dissipé par frottements.

L'augmentation de l'amplitude du mouvement du résonateur avec la fréquence de l'excitateur correspond donc au stockage d'une plus grande quantité d'énergie. A la résonance, l'énergie transférée de l'excitateur au résonateur est emmagasinée par ce dernier est donc maximale.

10) Importance des oscillations mécaniques forcées et de la résonance :

Les oscillations mécaniques forcées ainsi que le phénomène de résonance sont très importants tant dans la nature que dans les différents domaines de la vie (en acoustique, en industrie...). Toutefois, elles sont parfois recherchées, surtout à la résonance comme en acoustique ; par contre, dans d'autres car elles sont à éviter parce qu'elles sont gênantes ou même dangereuses.

1- Les instruments à cordes :

En musique, les caisses des instruments à cordes ainsi que l'air qu'elles contiennent, entrent en résonance sous l'action des vibrations des cordes, ce qui permet de renforcer les notes produites.

2- Mouvement de pompage d'une automobile :

L'automobile avec ses suspensions peut être assimilée à un solide posé sur un ressort, ce qui constitue un pendule élastique vertical.

Pour certaines vitesses, avec les irrégularités de la chaussée, le résonateur entre en résonance.

3- Les ponts suspendus :

Le tablier du pont avec des câbles de suspension, présentant une certaine élasticité, constituent un oscillateur élastique.

L'excitation créée par le vent ou le pas périodique d'une troupe de soldats le fait d'entrer en résonance qui peut provoquer sa rupture.

4- Equilibrage des roues :

L'irrégularité dans la répartition de la matière d'une roue autour de son axe entraîne l'apparition de petits « à coups » périodiques qui à leur tour vont produire des oscillations forcées dommageables à la longue.