

PROBABILITES

Résultats à retenir :

1°/ Soit $E = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \}$ un ensemble à n éléments et p un entier naturel non nul .

- Le nombre des p -uplets d'éléments de E est l'entier n^p .
- Le nombre de n -uplets d'éléments de E deux à deux distincts est l'entier $n!$
- Si $1 \leq p \leq n$ alors
 - Le nombre des p -uplets d'éléments de E deux à deux distincts est

$$\text{l'entier } A_n^p = \frac{n!}{(n-p)!} ,$$

- Le nombre de parties à p éléments de E est l'entier $C_n^p = \frac{n!}{(n-p)!p!}$.

(l'entier C_n^p est aussi noté $\binom{n}{p}$ et on convient que $C_n^0 = 1$).

2°/ Une expérience aléatoire est une expérience dont le résultat est soumis au hasard et est donc imprévisible .

L'ensemble E des issues d'une expérience aléatoire est appelé univers

Les éléments de E sont appelés évènements élémentaires .

Une partie A de E est appelée évènement .

Soit E l'univers d'une expérience aléatoire et $P(E)$ l'ensemble des évènements de E .

On appelle probabilité sur E , toute application p , de $P(E)$ dans $[0,1]$ vérifiant les conditions ci-dessous.

- L'image $p(E)$ de E est égale à 1.
- L'image $p(\emptyset)$ de l'ensemble vide est égale à 0
- L'image $p(A)$ d'un évènement A , est la somme des images des

évènements élémentaires de A , c'est-à-dire $p(A) = \sum_{a_i \in A} p(a_i)$.

3°/ Soit $(E, P(E), p)$ un espace probabilisé et A et B deux évènements de E .

- $p(\overline{A}) = 1 - p(A)$
- $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$.
- si $A \cap B = \emptyset$ alors $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$.
- si $A_1, A_2, \dots, A_k$ sont des évènements deux à deux incompatibles, alors $p(A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k) = p(A_1) + p(A_2) + \dots + p(A_k)$.

4°/ soit E l'univers d'une expérience aléatoire dans une situation d'équiprobabilité et $P(E)$ l'ensemble des parties de E .

l'application p définie de $P(E)$ dans $[0,1]$ par $p(a) = \frac{1}{\text{card}(E)}$, pour

tout évènement élémentaire a de E est une probabilité sur E , appelée probabilité uniforme.

5°/ si $(E, P(E), p)$ est un espace probabilisé tel que la probabilité p

est uniforme, alors $p(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(E)}$, pour tout évènement A de E .

6°/ Soit $(E, p(E), p)$ un espace probabilisé B un évènement tel que $p(B) \neq 0$.

L'application p_B de $P(E)$ dans $[0, 1]$, définie par $p_B(A) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)}$,

pour tout évènement A , est une probabilité sur E .

Soit $(E, P(E), p)$ un espace probabilisé et B un évènement tel que $p(B) \neq 0$.

L'application p_B ainsi définie s'appelle probabilité B-conditionnelle.

Le réel $p_B(A)$ est noté $p(A/B)$ (on lit « probabilité de A , sachant B »).

7°/ On dit que deux évènements A et B sont indépendants lorsque

$$p(A \cap B) = p(A) \times p(B).$$

Dans le cas où $p(B) \neq 0$, la réalisation de B n'influence pas celle de A ,

$$\text{c'est-à-dire } p(A/B) = p(A)$$

8°/ Soit E un ensemble fini, les parties $B_1, B_2, \dots, B_n$ forment une partition de E lorsqu'ils sont deux à deux disjoints et leur réunion est E .

Soit $(E, P(E), p)$ un espace probabilisé,

$B_1, B_2, \dots, B_n$ des évènements formant une partition de E tels que

$$\text{pour tout } i, p(B_i) \neq 0.$$

Alors pour tout évènement A ,

$$P(A) = \sum_{i=1}^n p(A \cap B_i) = \sum_{i=1}^n p(B_i) \cdot p_{B_i}(A).$$

Variable aléatoire :

1°/ Soit $(E, P(E), p)$ un espace probabilisé.

On appelle aléa numérique ou variable aléatoire toute application $X : E \rightarrow \mathbb{R}$.

Soit $(E, P(E), p)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire.

On appelle loi de probabilité de X ou distribution de X , l'application

$$P_X : X(E) \rightarrow [0,1]$$

$$x_i \mapsto p(X = x_i)$$

2°/ Soit $(E, P(E), p)$ un espace probabilisé. Si X est une variable aléatoire sur E telle que

$$X(E) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \text{ alors } \sum_{i=1}^n p(X = x_i) = 1.$$

3°/ Soit $(E, P(E), p)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur E telle que $X(E) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$.

On appelle espérance mathématique ou moyenne de X le nombre

$$E(X) = \sum_{i=1}^n x_i p_i$$

4°/ Soit $(E, P(E), p)$ un espace probabilisé et X, Y deux variables aléatoires sur E . alors pour tout réel α ,

- $E(\alpha X) = \alpha E(X)$.
- $E(X+Y) = E(X) + E(Y)$.

5°/ Soit $(E, P(E), p)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur E .

On appelle variance de X le nombre $V(X) = E\left((X - E(X))^2\right) = E(x^2) - (E(x))^2$

On appelle écart-type de X le nombre $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$.

6°/ Soit $(E, P(E), p)$ un espace probabilisé et X une variable aléatoire sur E .

On appelle fonction de répartition de X , l'application définie de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ par $F : x \mapsto p(X \leq x)$

Loi binomiale :

1°/ Soit une expérience aléatoire constituée de n épreuves identiques, indépendantes et n'ayant que deux issues : succès ou échec.

Soit p la probabilité de l'évènement succès.

On considère la variable aléatoire X associant à cette expérience le nombre de succès réalisés au cours des n épreuves.

Alors la loi de probabilité de X est donnée par

$$p(X = k) = C_n^k p^k (1-p)^{n-k}, k \in \{0, 1, \dots, n\}.$$

On dit que X suit une loi binomiale de paramètre (n, p) .

2°/ Soit x une variable aléatoire suivant à une loi binomiale $B(n, p)$.

On a $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$ et $\sigma(X) = \sqrt{np(1-p)}$.

Loi Uniforme :

Soit un intervalle $[a, b]$ ($a < b$). la fonction f définie sur $[a, b]$ par

$$f(x) = \frac{1}{b-a} \text{ est appelée densité de la loi de probabilité uniforme sur } [a, b].$$

On appelle loi uniforme P sur $[a, b]$ l'application qui à tout intervalle

$$[c, d] \text{ inclus dans } [a, b] \text{ associe le réel } P([c, d]) = \int_c^d f(x) dx.$$

Pour tout réel c de $[a, b]$, $P(\{c\}) = \int_c^c f(x) dx = 0$.

Si on désigne par $\overline{[c, d]}$ le complémentaire de $[c, d]$ dans $[a, b]$; alors

$$P(\overline{[c, d]}) = 1 - P([c, d]).$$

On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans un intervalle $[a, b]$

$$\text{suit la loi de probabilité uniforme } P \text{ si } P(c \leq X \leq d) = \frac{d-c}{b-a}.$$

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité uniforme P sur l'intervalle $[a, b]$.

On appelle fonction de répartition de X , l'application $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ P(a \leq X \leq x) & \text{si } x \in [a, b] \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

Loi exponentielle :

Soit λ un réel strictement positif. La fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ est appelée densité de loi exponentielle.

On appelle loi de probabilité exponentielle de paramètre λ , l'application P qui

1°/ à tout intervalle $[c, d]$ inclus dans $[0, +\infty[$ associe le réel $P([c, d]) =$

$$\int_c^d \lambda e^{-\lambda x} dx$$

2°/ à tout intervalle $[c, +\infty[$ inclus dans $[0, +\infty[$ associe le réel

$$P([c, +\infty[) = e^{-\lambda c}.$$

Pour tout réel $c > 0$, $P(\{c\}) = \int_c^c f(x) dx = 0$.

pour tout réel $c > 0$, $P([0, c]) = \int_0^c f(x) dx = 1 - e^{-\lambda c}$.

$P([c, +\infty[) = 1 - P([0, c])$.

On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ ,

$$\text{Si } P(c \leq X \leq d) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d} \text{ et } P(X \geq c) = e^{-\lambda c}$$

Soit X une variable aléatoire qui suit la loi de probabilité exponentielle P de paramètre λ .

On appelle fonction de répartition de X ,

L'application $F : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ définie par

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ P(0 \leq X \leq x) & \text{si } x \in [0, +\infty[\end{cases}$$