

## Chapitre VI

# Variables aléatoires

### 1) Définitions :

■ L'application qui fait correspondre un nombre réel à chaque événement associé à une épreuve s'appelle une **variable aléatoire**. On note :

$X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$  l'ensemble des valeurs que peut prendre la variable.

■ On appelle **loi de probabilité** l'ensemble des valeurs des probabilités des événements associés à chaque valeur de  $X$ .

On note cette loi :  $\{P(X = x_i), i = 1 \dots n\}$ .

Les événements sont «  $X = x_i$  ».

■ On appelle **espérance mathématique** de  $X$  le nombre noté :

$$E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i \cdot P(X = x_i)$$

$E(X)$  est la moyenne des valeurs pondérées par les probabilités de ces valeurs

■ On appelle **variance** de  $X$  le nombre noté :

$$V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - E(X))^2 \cdot p(X = x_i) \text{ ou } V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$$

$\delta$  cette seconde formule est souvent plus pratique dans les calculs.

■ On appelle **écart - type** de  $X$  le nombre noté :  $\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$

### 2) Schéma de Bernoulli ; loi binomiale :

• Nous appellerons schéma de Bernoulli, une expérience aléatoire n'ayant que deux issues qui sont alors deux événements contraires l'un de l'autre, l'une d'elle sera appelée « succès » l'autre « échec ».

• Notons  $P$  la probabilité su « succès » alors la probabilité de l'échec est  $1 - p$  ; posons  $q = 1 - p$ .

• Répétons  $n$  fois cette épreuve, nous obtenons alors un schéma de Bernoulli.

• La question est de savoir quelle est la probabilité d'obtenir  $k$  succès à l'issue de  $n$  épreuves.

• Le schéma de Bernoulli définit en fait une variable aléatoire  $X$ , qui prend comme valeur le nombre de succès à l'issue de  $n$  épreuves.

On a donc  $X = \{0, 1, 2, \dots, n\}$

• La loi de probabilité de  $X$  est une loi binomiale qui est donnée par la formule de Bernoulli :

$P(X = k) = C_n^k \cdot P^k \cdot q^{n-k}$  ;  $0 \leq k \leq n$  qui présente la probabilité « d'obtenir  $k$  succès » à l'issue de  $n$  épreuves.

• L'espérance de  $X$  est  $E(X) = n \cdot p$  et la variance de  $X$  est  $V(X) = n \cdot p \cdot q$ .

**■ Loi uniforme et loi exponentielle :****● Définition de loi uniforme :**

\* Soit  $[a, b]$ ,  $f$  la fonction définie sur  $[a, b]$  par  $f(x) = \frac{1}{b-a}$  est appelée

densité de la loi de probabilité uniforme sur  $[a, b]$ .

\* On appelle probabilité uniforme sur  $[a, b]$

L'application qui à tout intervalle  $[c, d] \subset [a, b]$  associe le réel

$$P([c, d]) = \int_c^d f(x) dx$$

\*  $c \in [a, b]$ ,  $P(\{c\}) = \int_c^c f(x) dx = 0$

**● Définition de loi exponentielle :**

Définition 1 :  $\lambda > 0$  on appelle loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  la loi continue admettant pour densité de la fonction  $f$  définie sur  $[0, +\infty[$  par  $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$

Définition 2 :

On appelle loi de probabilité exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$  l'application  $P$  tel que.

\* à tout intervalle  $[c, d] \subset [0, +\infty[$  on associe le réel  $P([c, d]) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x} dx$

\* à tout intervalle  $[c, +\infty[ \subset [0, +\infty[$

On associe le réel  $P([c, +\infty)) = e^{-\lambda c}$

Remarque : cette loi est aussi appelée « loi de durée de vie sans vieillissement ».

Exemple : Le temps en minutes d'une communication téléphonique sur un portable suit une loi exponentielle de paramètre 0,9.

Calculer la probabilité pour qu'une consommation dure entre 1 et 2 mn.

\* Solution :

$$P([1, 2]) = \int_1^2 0,9 e^{-0,9x} dx = 0,9 \left[ -\frac{1}{0,9} e^{-0,9x} \right]_1^2 = e^{-0,9} - e^{-1,8}.$$

Définition 3 : on dit qu'une variable aléatoire  $x$  soit la loi exponentielle de paramètre  $\alpha$ .

Si  $P(c \leq x \leq d) = \int_c^d \lambda e^{-\lambda x} dx = e^{-\lambda c} - e^{-\lambda d}$  et  $P(x \geq c) = e^{-\lambda c}$

**Réflexes :**

| Situations                                                                                       | Réflexes                                                                                                                                                                                                        |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Utilisation d'une loi binomiale                                                                  | On repère la répétition d'une expression suivant une loi de Bernoulli.<br>On modélise la situation à l'aide d'un arbre ou d'un diagramme.                                                                       |
| Calculer la probabilité d'un intervalle par une loi continue                                     | On intègre la densité de cette loi entre les bornes adéquates.                                                                                                                                                  |
| Examiner si une fonction numérique $f$ définie sur un intervalle est une densité de probabilité. | On vérifie trois conditions :<br>* continuité de $f$ sur $I$ .<br>* Positivité de $f$ sur $I$<br>* L'intégrale de $f$ sur $I$ est égale à 1.<br>(Si $I$ n'est pas borné, c'est une limite qu'il faut calculer.) |