

# FONCTION EXPONENTIELLE

## Des résultats à retenir :

- On appelle fonction exponentielle la fonction réciproque de la fonction logarithme népérien .

L'image d'un réel  $x$  par la fonction exponentielle est noté  $e^x$  .

- $\mathbb{N}$  pour tout réel  $x$  et pour tout réel strictement positif  $y$  ,  
 $y = e^x \Leftrightarrow x = \ln y$  .

- pour tout réel  $x$  ,  $\ln(e^x) = x$  .
- pour tout réel  $x > 0$  ,  $e^{\ln x} = x$  .
- $\ln e = 1$  .

- Soit deux réels  $a$  et  $b$  .

$$P_1 . e^{a+b} = e^a \times e^b , e^{a-b} = \frac{e^a}{e^b} \quad e^{-a} = \frac{1}{e^a} .$$

$$P_2 . \text{ pour tout entier } n , e^{na} = (e^a)^n .$$

$$P_3 . \text{ pour tout entier naturel } q \geq 2 , e^{\frac{a}{q}} = \sqrt[q]{e^a} .$$

$$P_4 . \text{ pour tout entier naturel } q \geq 2 \text{ et tout entier } p , e^{\frac{p}{q}a} = \sqrt[q]{e^{pa}}$$

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty , \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$  .
- La fonction exponentielle est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa fonction dérivée est la fonction  $x \mapsto e^x$  .  
 La fonction exponentielle est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  .
- La fonction exponentielle est bijective de  $\mathbb{R}$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  et pour tout réel  $x$  ,  $e^x > 0$  .
- Soit  $m$  et  $n$  deux entiers naturels non nuls ,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{nx}}{x^m} = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} x^m e^{nx} = 0 .$$

- Soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

La fonction  $h : x \mapsto e^{u(x)}$  est dérivable sur  $I$  et  $h'(x) = u'(x) e^{u(x)}$ ,  $x \in I$ .

- Soit  $u$  une fonction dérivable sur un intervalle  $I$ .

Les primitives sur  $I$  de la fonction  $x \mapsto u'(x) e^{u(x)}$  sont les fonctions  $x \mapsto e^{u(x)} + k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

- Soit un réel  $a > 0$ . Pour tout réel  $b$ , on pose  $a^b = e^{b \ln a}$ .
- Pour tous nombres réels strictement positifs  $a$  et  $b$  et tous réels  $c$  et  $d$ ,

$$a^{c+d} = a^c \times a^d; (a^c)^d = a^{cd}; a^{c-d} = \frac{a^c}{a^d}; a^c \times b^c = (ab)^c; \frac{a^c}{b^c} = \left(\frac{a}{b}\right)^c.$$

- Soit un réel  $a > 0$ . On appelle fonction exponentielle de base  $a$  la fonction  $x \mapsto a^x$ .

- Soit un réel  $a > 0$ . La fonction  $x \mapsto a^x$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et sa fonction dérivée est la fonction  $x \mapsto (\ln a) a^x$ .

- Si  $a > 1$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$

- Si  $0 < a < 1$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} a^x = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = +\infty$ .

- Soit  $r$  un rationnel. On appelle fonction puissante  $r$  la fonction  $x \mapsto e^{r \cdot \ln x}$ ,  $x > 0$ .

- Si  $r > 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^r = +\infty$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^r = 0$ .

- Si  $r < 0$  alors  $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^r = 0$ ;  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^r = +\infty$ .

- Soit  $r$  un rationnel. la fonction  $x \mapsto x^r$  est dérivable sur  $\mathbb{R}_+^*$  et sa dérivée est la fonction  $x \mapsto r x^{r-1}$

- Soit  $r$  un rationnel différent de  $-1$ . les primitives sur  $\mathbb{R}_+^*$  de la

fonction  $x \mapsto x^r$  sont les fonctions  $x \mapsto \frac{1}{r+1} x^{r+1} + k$ ,  $k \in \mathbb{R}$ .

- Soit  $r$  un rationnel strictement positif.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^r} = 0; \lim_{x \rightarrow 0^+} x^r \ln x = 0; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^r} = +\infty.$$