

Exercice 1

✓ QCM :

- 1) L'inverse de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$ est :
- a) $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ b) $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$ c) $\frac{1}{6} \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$
- 2) Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est :
- a) 0 b) 1 c) -1
- 3) L'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$ est :
- a) $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
- 4) Le déterminant de la matrice $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ est :
- a) -3 b) 3 c) 0
- 5) Le produit de deux matrices d'ordres respectives 2×5 et 5×2 est une matrice :
- a) d'ordre 5×2 b) Carrée d'ordre 5 c) Carrée d'ordre 2
- 6) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Alors :
- a) A est la matrice unité d'ordre 2 b) L'inverse de A est A c) $\det(A)=1$
- 7) On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 6 \\ 2 & 8 & 0 & -4 \\ 4 & -7 & 0 & 9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.
- i) A est une matrice :
- a) d'ordre 3×4 b) d'ordre 4×3 c) carrée
- ii) Pour la matrice A ci-dessus le coefficient a_{23} est
- a) -7 b) 0 c) 23
- iii) La matrice $A \times B$ est d'ordre
- a) 3×4 b) 3×1 c) 4×4
- iv) Soit $C = A \times B$ donc c_{11} est égale à
- a) 19 b) 10 c) 8

Exercice 2

Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 7 \\ 11 & 8 \end{pmatrix}$.

- 1) Quel est le nombre de la troisième ligne et de la première colonne ?
- 2) Où se situe le nombre 5 ?
- 3) Quelle est la dimension de cette matrice ?

Exercice 3

Répondre par « VRAI » ou « FAUX » :

- 1) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$. Alors : La matrice $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.
- 2) Les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$ commutent ($A \times B = B \times A$).
- 3) On considère les deux matrices $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Alors : $A \times B = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ -1 & 1 \\ -1 & -9 \end{pmatrix}$ et la matrice $B \times A$ n'est pas définie.

Exercice 4

- 1) On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 & 3 \\ -1 & 3 & 9 & 1 \\ 0 & -2 & 7 & 8 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & 2 \end{pmatrix}$.
 - a) Donner la dimension de chaque matrice.
 - b) Donner les valeurs des coefficients a_{11} , a_{23} , a_{32} et a_{34} de la matrice A et b_{12} et b_{21} de B.

- 2) Soient les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $3A$, $-2B$ et $2A - B$.

- 3) $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & -2 \end{pmatrix}$. Déterminer $-A$; $\sqrt{2}B$; $2A + B$.

- 4) Calculer :

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 4 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 & 6 \\ 2 & 4 & -2 \\ 3 & 5 & 3 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 9 & -10 & 1 \\ -6 & 7 & 0 & 1 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} (1 \ 2 \ 3); \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};$$

- 5) Calculer les déterminants suivants :

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 2 & 2 & 3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 1 & 0 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 5 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

- 6) a) Soit $A = \begin{pmatrix} -4 & -4 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, vérifier que $A^{-1} = \begin{pmatrix} -0.5 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 5 \\ 1.5 & -2 & 6 \end{pmatrix}$.
- b) Soient $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$; $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Trouver B^{-1} , C^{-1} et D^{-1} .
- 7) On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 5 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.
- a) Calculer $\det(A)$ et $\det(B)$, déduire pour A.
- b) Déterminer les matrices $C = A + B$ et $A \times C$. Puis déterminer la matrice A^{-1} .

Exercice 5

✓ QCM :

- 1) L'ordre de la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ est :
- a) 2x3 b) 3x2 c) 3x3
- 2) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$, alors le système (S) associé à $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est :
- a) $\begin{cases} -x + 4y - 3z = -2 \\ y + z = 1 \\ 2x + 2y - 2z = 3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} -x - 2y + 3z = -2 \\ y + z = 1 \\ 2x - 2y - 2z = 3 \end{cases}$ c) $\begin{cases} -x + 2y + 3z = 2 \\ y + z = 1 \\ 2x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$
- 3) Le produit de la matrice suivant $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$ est :
- a) $\begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} -4 \\ -3 \\ 12 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -4 & -1 & 4 \end{pmatrix}$
- 4) le déterminant de la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ est :
- a) -3 b) -1 c) 3
- 5) l'inverse de cette matrice $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ 3 & -7 & 6 \\ 3 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ est :
- a) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 1 & -3 & 6 \\ 6 & -8 & 12 \\ 3 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Exercice 6

Soit $A = \begin{pmatrix} a & a \\ 2a & 1 \end{pmatrix}$ avec a un réel.

- 1) calculer a pour que la matrice A ne soit pas inversible.
- 2) on suppose $a = 1$. Calculer A^2 et déterminer A^{-1} .
- 3) Résoudre par la méthode matricielle le système : $\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + y = 2 \end{cases}$.

Exercice 7

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer le déterminant de M et déduire que M est inversible.
- 2) Montrer que $M^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & 5 & 6 \\ -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.
- 3) On considère le système linéaire suivant $S : \begin{cases} y + 2z = 5 \\ -x + 3y = 2 \\ x - 2y + z = -2 \end{cases}$.
 - a) Donner l'écriture matricielle du système S .
 - b) Résoudre alors dans $\mathbb{R}^3$ le système S .

Exercice 8

On considère la matrice carré suivante $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- 1) a) Quelle est l'ordre de M
 - b) Déterminer le terme a_{22} de M .
- 2) Calculer le déterminant de M en déduire que M est inversible.
- 3) a) Calculer $A = \frac{1}{2}(M - I_3)$ où I_3 est la matrice unité d'ordre 3.
 - b) Calculer $A \times M$ en déduire la matrice inverse M^{-1} de M .
- 4) On considère le système linéaire suivant : (S) $\begin{cases} y + z = 2 \\ x + z = 4 \\ x + y = -2 \end{cases}$.
 - a) Donner l'écriture matricielle du système (S).
 - b) En déduire la solution du système (S).

Exercice 9

- 1) On donne les deux matrices : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ -3 & 3 & -3 \\ 5 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.
 - a) Calculer $\det(A)$ et $\det(B)$.

Exercice 12

- 1) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Montrer que A est inversible.
- 2) Soit la matrice $M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \alpha \\ 1 & 1+\alpha & \alpha \\ 1 & \alpha & 1+\alpha \end{pmatrix}; (\alpha \in \mathbb{R})$.
- a) Montrer que pour tout réel α , M_α est inversible.
- b) Déterminer le réel α pour que la matrice M_α soit l'inverse de la matrice A.
- 3) Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ le système (S) :
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + z = 0 \\ x + y + 2z = 2 \end{cases}$$

Exercice 13

- I) On donne les matrices : $Q = \begin{pmatrix} 20 & 30 & 10 \\ 20 & 10 & 40 \\ 30 & 20 & 30 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 5 \\ 2.5 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 20 & 15 & 8 \\ 20 & 5 & 32 \\ 15 & 5 & 12 \end{pmatrix}$.
- 1) Calculer $Q \times P$.
- 2) a) Calculer le déterminant de A et déduire que A est inversible.
- b) Vérifier que la matrice A^{-1} inverse de A est : $A^{-1} = \frac{1}{1800} \begin{pmatrix} -100 & -140 & 440 \\ 240 & 120 & -480 \\ 25 & 125 & -200 \end{pmatrix}$.
- II) Chaque mois, une usine utilise dans sa production trois matières M_1, M_2 et M_3 provenant de trois fournisseurs F_1, F_2 et F_3 . Le tableau suivant représente les quantités mensuelles en tonnes fournies par les trois fournisseurs pour chaque matière.

Fournisseur	M_1	M_2	M_3
F_1	20	30	10
F_2	20	10	40
F_3	30	20	30

Le prix d'une tonne de chacune des matières M_1, M_2 et M_3 est respectivement 5 milles dinars; 2,5 milles dinars et 4 milles dinars; respecté par les trois fournisseurs.

- 1) Calculer le coût mensuel total des trois matières.
- 2) Les prix des trois matières ont subi des hausses : de x% pour M_1 , de y% pour M_2 et de z% pour M_3 . Ainsi les factures mensuelles de l'usine ont augmenté : de 6 milles dinars chez F_1 , de 7 milles dinars chez F_2 et de 8 milles dinars chez F_3 .
- a) Montrer que la situation se traduit par le système (S) :
$$\begin{cases} 20x + 15y + 8z = 120 \\ 20x + 5y + 32z = 140 \\ 15x + 5y + 12z = 80 \end{cases}$$
- b) Donner l'écriture matricielle de (S).
- c) Calculer alors les augmentations en pourcentages des prix de chaque matière.
- 3) Déterminer le coût mensuel des trois matières après les hausses.

- b) En déduire que A est inversible.
- c) Calculer : $A \times B$.
- d) En déduire A^{-1} la matrice inverse de A.

2) On considère le système : (S) :
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + y - z = 6 \\ x - 2y - 2z = 1 \end{cases}$$

- a) Ecrire (S) sous forme matricielle.
- b) Résoudre alors le système (S).

Exercice 10

1) Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -3 & 4 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

- a) Montrer que A est inversible.
- b) Vérifier que : $A^2 - 3A + 2I_3 = 0$.
- c) En déduire la matrice inverse A^{-1} de A.

2) On considère le système : (S) :
$$\begin{cases} y - z = 1 \\ -3x + 4y - 3z = 2 \\ -x + y = 3 \end{cases}$$

- a) Ecrire le système (S) sous forme matricielle.
- b) Résoudre alors le système (S).

Exercice 11

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer le déterminant de A.
- 2) a) Calculer la matrice $M = (2I_3 - A)$. Où I_3 la matrice unité d'ordre 3.
- b) Vérifier que : $A \times M = I_3$.
- c) En déduire que A est inversible et déterminer sa matrice inverse A^{-1} .

3) Soit le système suivant (S) :
$$\begin{cases} 2x + 2y + z = 5 \\ -x - y - z = 2 \\ x + 2y + 2z = 3 \end{cases}$$

- a) Donner l'écriture matricielle du système (S).
- b) Résoudre alors le système (S).