

ENONCES



Soit $(O, \vec{i}, \vec{j})$ repère orthonormé.

Déterminer la nature des branches infinies de la courbe de f dans chaque cas :

a) $f(x) = x + 1 + \sqrt{x+1}$

b) $f(x) = x + \sqrt{x^2 + 1}$

c) $f(x) = x - \sqrt{x-1}$

d) $f(x) = x - \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}}$



Soit $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}; x \longmapsto x + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$. On désigne par (C)

sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f .

2) On désigne par (T) la tangente à (C) en O .

Etudier la position de (C) par rapport à (T) .

Déduire que O est un point d'inflexion de (C) .

3) a) Déterminer les asymptotes à (C) .

b) Construire (C) .

4) a) Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Soit f^{-1} la fonction réciproque de f .

Montrer que f^{-1} est dérivable sur J est calculer $(f^{-1})'(0)$.



On considère la fonction f définie par $f(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$.

1) a) Déterminer le domaine de définition D de f .

b) Etudier la continuité et la dérivabilité de f sur D .

c) Etudier les variations de f .

2) Montrer que la courbe représentative (C) de f rencontre l'axe des abscisses en un seul point dont on déterminera son abscisse. En déduire le signe de $f(x)$.

3) a) Montrer que le point $I(0,1)$ est un centre de symétrie de (C) .

b) Etudier la position de (C) par rapport à sa tangente T en I . Que peut-on déduire ?

c) Construire (C) .

4) a) Montrer que f réalise une bijection de D sur $\mathbb{R}$.

b) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f^{-1}(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x^2 - 2x + 2}}$.

5) a) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans D une solution unique α .

Vérifier que $\alpha \in \left]0, \frac{1}{2}\right[$.

b) Montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$ on a : $|f(x) - \alpha| \leq \frac{8\sqrt{3}}{9}|x - \alpha|$

4 Soit la fonction numérique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 1$ de courbe représentative (ζ) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ (unité 1 cm).

1) Calculer $f'(x)$, étudier son signe. Dresser le tableau de variation de f sur $\mathbb{R}$.

2) a) Ecrire une équation de la tangente (T) à (ζ) en $x_0 = 2$.

b) Etudier la position relative de (T) et (ζ) .

3) Démontrer que $\Omega(2; -1)$ est le centre de symétrie de (ζ) .

4) Représenter graphiquement (ζ) et (T).

5) Justifier que $f(x) = 0$ admet trois racines $x_1 < x_2 < x_3$.

6) Discuter graphiquement de l'existence et du signe des solutions de $f(x) = m$ ($m \in \mathbb{R}$).

5 Soit la fonction numérique g définie par : $g(x) = x + 1 + \sqrt{x^2 + 2x}$ et (ζ) la courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1) a) Déterminer le domaine de définition de g .

b) Etudier la dérivabilité de g à droite en 0 et à gauche en -2.

c) Donner le tableau de variation de g .

2) a) Montrer que la courbe (ζ) admet une asymptote oblique (D) en $+\infty$.

b) Etudier la position de (ζ) par rapport à (D) relativement à $\mathbb{R}_+$.

c) Construire la courbe (ζ)

6 Soit la fonction numérique définie sur $[1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}$.

On désigne par (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité 2 cm).

1) a) Démontrer que la droite (D) : $2y - x + 2 = 0$ est une asymptote à ζ en $+\infty$.

b) Justifier que pour tout $x \in [1, +\infty[$; $\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \leq 1$.

En déduire la position relative de ζ et D sur $[1, +\infty[$.

- 2) a) Calculer $\lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h)-f(1)}{h}$
 b) Interpréter ce résultat en terme de dérivabilité (à droite) pour f en $x_0 = 1$.
- 3) Etude d'une fonction auxiliaire.
 Soit $g(x) = x^2 \sqrt{x^2 - 1} - 2$ définie sur $]1, +\infty[$.
 a) Calculer $g(\sqrt{2})$.
 b) Montrer que g est strictement croissante sur $]1, +\infty[$.
 c) Dédire de ce qui précède, le signe de g sur $]1, +\infty[$.
- 4) a) Calculer $f'(x)$. Montrer que f' est du signe de g sur $]1, +\infty[$.
 b) Dresser le tableau de variation de f sur $[1, +\infty[$.
- 5) Représenter graphiquement la courbe (ζ) .

7 On considère la fonction $f(x) = \sqrt{x^2 - 3x + 2}$. On désigne par (ζ) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

- 1) Déterminer le domaine de définition de f .
- 2) Montrer que la droite d'équation $x = \frac{3}{2}$ est un axe de symétrie pour la courbe de f .
 Soit g la restriction de f à $[2, +\infty[$.
- 3) Calculer $g'(x)$ pour $x \in]2, +\infty[$ et dresser le tableau de variation de g .
- 4) Montrer que la courbe (ζ') de g admet une asymptote quand x tend vers $+\infty$ dont on donnera une équation.
- 5) Préciser la demi tangente à la courbe (ζ') au point d'abscisse 2.
 Tracer la courbe (ζ') de g .
- 6) a) Montrer que g réalise une bijection de $[2, +\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.
 b) Expliciter la fonction réciproque g^{-1} de la fonction g .
 c) Tracer la courbe de g^{-1} dans le même repère que la courbe (ζ') de g .

8 Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :
$$\begin{cases} f(x) = \sqrt{x^2 + x} - x - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

- (ζ) désigne sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
- 1) Etudier la continuité et la dérivabilité de f au point (-1) .
- 2) Montrer que la courbe (ζ) admet deux asymptotes Δ_1 et Δ_2 que l'on déterminera.
- 3) Etudier les variations de f et tracer la courbe (ζ) .
- 4) Soit g la restriction de f à l'intervalle $I =]-\infty, -1]$.
 a) Montrer que g réalise une bijection de I sur un intervalle que l'on

précisera. Soit g^{-1} la fonction réciproque de g .

b) Tracer la courbe (ζ') de g^{-1} dans un même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

5) Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.

a) Dresser le tableau de variation de h .

b) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une seule solution réelle α .

c) Vérifier que $\alpha \in \left] \frac{3}{2}, 2 \right[$

d) En déduire que (ζ) rencontre la droite $\Delta : y = x$ en un seul point.

9 Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto x + \sqrt{x^2 - 2x}$

1) a) Déterminer le domaine de définition D_f de f et les limites aux bornes de D_f .

b) Etudier la dérivabilité de f en 0 et 2.

c) Etudier les variations de f .

2) Soit (ζ) la courbe représentative de f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et soit la fonction g définie par $g(x) = x - \sqrt{x^2 - 2x}$, et on désigne par (ζ') sa courbe représentative dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Montrer que (ζ) admet deux asymptotes à déterminer.

Vérifier que leur point d'intersection Ω a pour coordonnées $(1, 1)$.

b) Montrer que (ζ') est le y symétrique de (ζ) par rapport à Ω .

3) Soit (H) la courbe d'équation $y^2 - 2xy + 2x = 0$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Montrer que $H = (\zeta) \cup (\zeta')$ b) Construire (H) .

10 1) Etudier les variations de la fonction g définie par $g(x) = \sqrt{4-x}$ et construire sa courbe représentative (Γ) dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

2) Soit f la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{4-x}$

a) Etudier la position de la courbe représentative (ζ) de f par rapport à (Γ) .

b) Etudier les variations de f .

c) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une seule solution α dans

l'intervalle $] -\infty, 4]$ et vérifier que $\alpha \in \left] -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \right[$.

d) Construire la courbe (ζ) dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $] 0, 4]$ une solution unique x_0 .

Vérifier que $x_0 \in \left] \frac{7}{4}, \frac{9}{4} \right[$.

4) On pose $h(x) = f(4 \cos x)$ pour tout $x \in [0; \frac{\pi}{2} [$.

- a) Démontrer que la fonction h réalise une bijection de $[0; \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J que l'on précisera. On note h^{-1} la fonction réciproque de h .
- b) Etudier la dérivabilité de h^{-1} en $\frac{1}{4}$.
- c) Calculer $h(\frac{\pi}{3})$ et déterminer le nombre dérivée de h^{-1} en $(\frac{1}{2} + \sqrt{2})$.



Soit f la fonction définie par $f(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}$.

- 1) Déterminer le domaine de définition de f et calculer les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
- 2) Dresser le tableau de variation de f .
- 3) Soit g la restriction de f sur l'intervalle $]1, +\infty[$.
 - a) Montrer que g est une bijection de $]1 + \infty[$ sur un intervalle I que l'on déterminera (on note g^{-1} sa réciproque).
 - b) Etudier la continuité et le sens de variation de la fonction g^{-1} .
 - c) Exprimer $g^{-1}(x)$ pour tout $x \in I$
 - d) Déterminer le domaine de dérivabilité de g^{-1} et calculer $(g^{-1})'(\frac{2}{3})$.
- 4) a) Montrer que l'équation $g(x) = x$ admet dans l'intervalle $]1, +\infty[$ une solution unique α .
- b) Construire dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les courbes respectives ζ_g et $\zeta_{g^{-1}}$.

- 5) Soit h la fonction définie sur $]0, \frac{\pi}{2}]$ par :
- $$h(x) = \begin{cases} g\left(\frac{1}{\cos x}\right) & \text{si } x \neq \frac{\pi}{2} \\ h\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0 \end{cases}$$

- a) Montrer que h est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$.
- b) Montrer que h est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $h'(x)$.
- c) Déterminer l'expression de $h(x)$ pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$.

CORRIGES



a) $f(x) = x + 1 + \sqrt{x+1}$; $D_f = [-1, +\infty[$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 + \sqrt{x+1} = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} + \frac{x+1}{x} \times \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 1$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x+1}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 0$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \sqrt{x+1} = +\infty$$

donc ζ_f admet une Branche parabolique de direction la droite $y = 1$.

b) $f(x) = x + \sqrt{x^2+1}$; $D_f = \mathbb{R}$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \sqrt{1+\frac{1}{x^2}} = 2$$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2+1} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(x^2+1) - x^2}{(\sqrt{x^2+1} + x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} + x} = 0$$

donc $y = 2x$ est une asymptote au voisinage de $+\infty$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{(x + \sqrt{x^2+1})(\sqrt{x^2+1} - x)}{\sqrt{x^2+1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2+1 - x^2}{\sqrt{x^2+1} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1} - x} = 0$$

Donc $y = 0$ est une asymptote au voisinage de $-\infty$.

c) $f(x) = x\sqrt{x-1}$ et $D_f = [1, +\infty[$

$$* \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{et} \quad * \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x-1} = +\infty$$

donc ζ_f admet une Branche parabolique de direction (yy') en $+\infty$.

d) $f(x) = x - \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$; $D_f = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0$$

On déduit que $y = x$ est une asymptote ζ_f au voisinage de $+\infty$ et de $-\infty$.



$$1) a) \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(x + \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \right) = +\infty$$

b) $x \mapsto 1+x^2$ est dérivable et strictement positive sur $\mathbb{R}$

donc $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ est par suite

$x \mapsto \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ donc $x \mapsto f(x)$ est dérivable

sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$f'(x) = 1 + \frac{\sqrt{1+x^2} - \frac{2x^2}{2\sqrt{1+x^2}}}{1+x^2} = 1 + \frac{1}{(1+x^2)\sqrt{1+x^2}} > 0.$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$	+	
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2) $T: y = f'(0) \cdot x + f(0)$.

$f(0) = 0$ et $f'(0) = 2$ d'où $T: y = 2x$.

$$f(x) - 2x = \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} - x = \frac{x(1 - \sqrt{1+x^2})}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{x(-x^2)}{\sqrt{1+x^2}(1 + \sqrt{1+x^2})}$$

donc le signe de $f(x) - 2x$ est celui de $(-x)$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - 2x$	+	$\circ$	-
Position de (C) par rapport à (T)	(C) est au-dessus de (T)		(C) est au-dessous de (T)

On a $C \cap T = \{O(0,0)\}$. comme la courbe (C) traverse la tangente en O

d'où O est un point d'inflexion pour (C)

3) a) • On a $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ donc la courbe (C) admet une branche infinie au voisinage de $(-\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = -1.$$

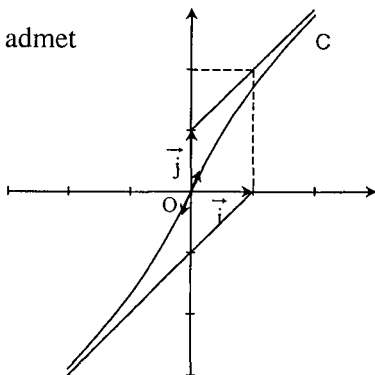
Donc la droite (D) d'équation : $y = x - 1$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $(-\infty)$.

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ donc la courbe (C) admet une branche infinie au voisinage de $(+\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} = 1.$$



Donc la droite (Δ) d'équation $y = x + 1$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $(+\infty)$.

4) a) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $J = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

b) f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$; $f'(x) \neq 0$; donc f^{-1} est

dérivable sur $J = f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$ et $(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{2}$.



1) a) $D = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } 1 - x^2 > 0\} =]-1, 1[$

b) $x \mapsto 1 - x^2$ continue dérivable et strictement positive sur $]-1, 1[$

Alors $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ continue et dérivable sur $]-1, 1[$

d'où f est continue et dérivable sur $]-1, 1[$.

$$\text{c) } \forall x \in]-1, 1[, f'(x) = \frac{-\sqrt{1-x^2} + x \cdot \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}}{(1-x^2)} = \frac{-1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} < 0$$

donc f est strictement décroissante sur $] -1, 1[$.

2) $f(x) = 0$ équivaut à $\sqrt{1-x^2} = x$ ou encore $1-x^2 = x^2$ et $x \geq 0$

soit $x = \sqrt{\frac{1}{2}}$ d'où C rencontre l'axe des abscisses au point d'abscisse $\sqrt{\frac{1}{2}}$

si $x \in] -1, \sqrt{\frac{1}{2}}[$ alors $f(x) \geq 0$ et si $x \in \left[\sqrt{\frac{1}{2}}, 1 \right[$ alors $f(x) \leq 0$

3) a) $\forall x \in] -1, 1[, -x \in] -1, 1[\quad f(-x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$

$$2 - f(x) = 2 - 1 + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} = f(-x)$$

donc $I(0, 1)$ est un centre de symétrie pour C

b) $T: y = f'(0)x + f(0)$ ou encore $T: y = -x + 1$

$$\begin{aligned} f(x) - (-x + 1) &= 1 - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} + x - 1 = x \left(\frac{\sqrt{1-x^2} - 1}{\sqrt{1-x^2}} \right) \\ &= \frac{-x^3}{\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2} + 1)} \end{aligned}$$

x	-1	0	1
$-x$		+	-
Position C et T	C au dessus de T	$\circ$	C au dessous de T

On en déduit que I est un point d'inflexion.

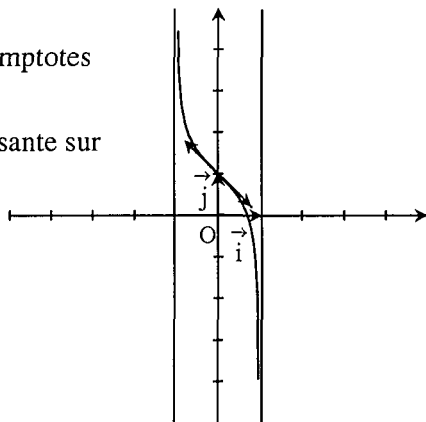
c) $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$

donc $x = -1$ et $x = 1$ sont les asymptotes de C .

4) a) f est continue et strictement décroissante sur $] -1, 1[$ donc f réalise une bijection de $] -1, 1[$ sur $\mathbb{R}$.

b) $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow 1 - \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} = x$

ou encore $1 - x = \frac{y}{\sqrt{1-y^2}}$ équivaut à



$$(1-x)^2 = \frac{y^2}{1-y^2} \text{ et } y \text{ et } 1-x \text{ ont le même signe par suite } y^2 = \frac{(1-x)^2}{1+(1-x)^2}$$

$$\text{soit } |y| = \frac{|1-x|}{\sqrt{1+(1-x)^2}} \text{ comme } y \text{ et } 1-x \text{ ont le même signe}$$

$$\text{Alors } y = \frac{1-x}{\sqrt{1+(1-x)^2}} \text{ ainsi } f^{-1}(x) = \frac{1-x}{\sqrt{x^2-2x+2}}$$

5) a) On pose $g(x) = f(x) - x$

g est dérivable sur $] -1, 1[$ et $g'(x) = f'(x) - 1$ comme $f'(x) < 0$

Alors $g'(x) < 0$ donc g est strictement décroissante sur $] -1, 1[$ comme g est continue sur $] -1, 1[$

par suite g réalise une bijection de $] -1, 1[$ sur $g(] -1, 1[) = \mathbb{R}$

$$\text{car } \lim_{-1^+} g(x) = \lim_{(-1)^+} f(x) - x = +\infty \text{ et } \lim_{1^-} g(x) = -\infty$$

or $0 \in \mathbb{R}$, alors il admet qu'un seul antécédent $\alpha \in] -1, 1[$ tel que

$$g(\alpha) = 0 \text{ ou encore } f(\alpha) = \alpha$$

$$g(0) = f(0) = 1 > 0 \text{ et } g\left(\frac{1}{2}\right) = f\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{3}} < 0 \text{ donc } \alpha \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[.$$

b) • f est continue sur $\left[0, \frac{1}{2} \right]$.

• f est dérivable sur

$$\bullet \forall x \in \left[0, \frac{1}{2} \right], \frac{3}{4} \leq 1-x^2 \leq 1 \text{ et } \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sqrt{1-x^2} \leq 1$$

$$\text{Alors } \frac{3\sqrt{3}}{8} \leq (1-x^2)\sqrt{1-x^2} \leq 1 \text{ donc } -\frac{8\sqrt{3}}{9} < 1 \leq \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} \leq \frac{8\sqrt{3}}{9}$$

$$\text{d'où } |f'(x)| \leq \frac{8\sqrt{3}}{9}$$

d'après le théorème des accroissements finis sur $\left[0, \frac{1}{2} \right]$

on a pour $x \in \left[0, \frac{1}{2} \right]$ et $\alpha \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[$,

$$|f(x) - f(\alpha)| \leq \frac{8\sqrt{3}}{9} |x - \alpha| \text{ comme } f(\alpha) = \alpha \text{ } |f(x) - \alpha| \leq \frac{8\sqrt{3}}{9} |x - \alpha|.$$

4

1) $f'(x) = -3x^2 + 12x - 9$.

x	$-\infty$	1	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	0	-
$f(x)$	$+\infty$	-3	1	$-\infty$

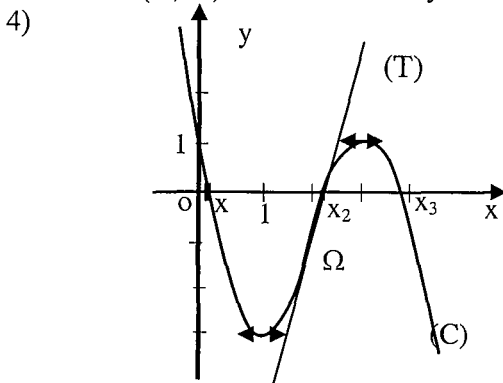
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -x^3 \left(1 - \frac{6}{x} + \frac{9}{x^2} - \frac{1}{x^3}\right) = +\infty, \text{ de même } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty.$$

2) a) $f(2) = -1$ et $f'(2) = 3$ d'où l'équation de la tangente (T) à (ζ) en $x_0 = 2$ est $T : y = 3x - 7$.

b) $f(x) - (3x - 7) = -x^3 + 6x^2 - 12x + 8 = -(x-2)^3$.

Pour $x > 2$; $-(x-2)^3 < 0$ donc ζ est au dessous de T.Pour $x < 2$; $-(x-2)^3 > 0$ donc ζ est au dessus de T.3) On a : $f(4-x) = -(4-x)^3 + 6(4-x)^2 - 9(4-x) + 1 = x^3 - 6x^2 + 9x - 3$.

D'autre part $-2 - f(x) = -x^3 + 6x^2 - 9x + 3$ d'où $f(4-x) = -2 - f(x)$.

Donc $\Omega(2; -1)$ est le centre de symétrie de (ζ) .

5) f est une fonction continue sur $\mathbb{R}$ } donc d'après le théorème des valeurs
 en particulier sur $[0,1;0,2]$ } intermédiaires il existe $x_1 \in]0,1;0,2[$
 et $f(0,1) \times f(0,2) < 0$ } tel que $f(x_1) = 0$

avec le même raisonnement on relève que :

* $x_2 \in]2,3;2,4[$ tel que $f(x_2) = 0$. * $x_3 \in]3,5;3,6[$ tel que $f(x_3) = 0$.

6) Les solutions, si elles existent de $f(x) = m$ sont les abscisses des points d'intersection de (ζ) avec la droite variable d'équation $\Delta_m : y = m$.1^{er} cas : si $m > 1$; l'équation admet une solution négative.2^{ème} cas : si $m = 1$; $x = 0$ et $x = 3$.3^{ème} cas : si $m \in]-3,1[$; il y a 3 solutions positives.4^{ème} cas : si $m = -3$; $x = 1$ et $x = 4$.5^{ème} cas : si $m \in]-\infty,-3[$; il y a une solution positive.



1) a) $Dg = \{x \in \mathbb{R}, \text{ tel que } x^2 + 2x \geq 0\} =]-\infty, -2] \cup [0, +\infty[.$

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sqrt{x^2 + 2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} 1 + \frac{x(x+2)}{x\sqrt{x^2 + 2x}} = +\infty$$

Donc g n'est pas dérivable à droite en 0.

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{g(x) - g(-2)}{x+2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} \frac{\sqrt{x^2 + 2x}}{x+2} = \lim_{x \rightarrow (-2)^-} 1 + \frac{x(x+2)}{(x+2)\sqrt{x^2 + 2x}} = -\infty$$

Donc g n'est pas dérivable à gauche en -2.

c) La fonction $x \mapsto x^2 + 2x$ est dérivable et strictement positive sur :

$I =]-\infty, -2[\cup]0, +\infty[.$ Alors la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x}$ est dérivable sur I et $x \mapsto x + 1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur I d'où g est dérivable sur I

$$\text{et pour tout } x \in I \text{ on a } g'(x) = 1 + \frac{x+1}{\sqrt{x^2 + 2x}} = \frac{x+1+\sqrt{x^2 + 2x}}{\sqrt{x^2 + 2x}}.$$

* Si $x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -1$ alors $x \in]0, +\infty[.$

Donc $g'(x) \geq 0$ pour tout $x \in]0, +\infty[.$

* Si $x + 1 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq -1$ alors $x \in]-\infty, -2[.$

$$g'(x) = \frac{-1}{[\sqrt{x^2 + 2x} - (x+1)] \cdot \sqrt{x^2 + 2x}} < 0$$

x	$-\infty$	-2	0	$+\infty$
$g'(x)$		-		+
$g(x)$	0	-1	1	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty; \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x+1-\sqrt{x^2 + 2x}} = 0$$

2) a) On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ donc la courbe (ζ) admet une branche infinie,

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \sqrt{1 + \frac{2}{x}}\right) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - 2x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - x + \sqrt{x^2 + 2x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - 4x}{1 - x - \sqrt{x^2 + 2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4 + \frac{1}{x}}{\left(\frac{1}{x} - 1 - \sqrt{1 + \frac{2}{x}}\right)} = 2.$$

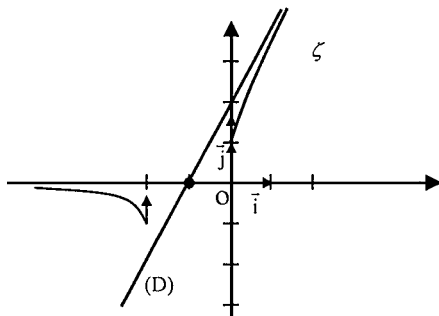
Donc la droite (D) d'équation : $y = 2x + 2$ est une asymptote oblique en $+\infty$.

$$b) \text{ Pour tout } x \in \mathbb{R}_+; g(x) - y = \sqrt{x^2 + 2x} - x - 1 = \frac{-1}{\sqrt{x^2 + 2x} + x + 1} < 0.$$

Donc (ζ) est au dessous de la droite (D) pour tout $x \in \mathbb{R}_+.$

c) • $y = 0$ est une asymptote à (ζ) au voisinage de $(-\infty)$.

• La courbe (ζ) admet deux demi tangentes verticale aux points d'abscisse $x = -2$ et $x = 0$.



6

1) a) Pour démontrer que la droite d'équation : $2y - x + 2 = 0$ ou encore $y = \frac{1}{2}x - 1$ est une asymptote à ζ étudions :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (\frac{1}{2}x - 1)) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x(x + \sqrt{x^2 - 1})} = 0^+$$

Donc la droite D est une asymptote oblique à la courbe ζ en $+\infty$.

b) Pour tout $x \in [1, +\infty[$; $\sqrt{x^2 - 1} \leq x$ donc $\frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \leq \frac{x}{x} \leq 1$

c'est - à - dire que $1 - \frac{\sqrt{x^2 - 1}}{x} \geq 0$ où encore que $f(x) - (\frac{1}{2}x - 1) \geq 0$

Donc pour tout $x \in [1, +\infty[$, ζ est au dessus de D.

$$2) a) \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}h - \frac{\sqrt{1+2h+h^2-1}}{1+h} - \frac{1}{2}}{h} \\ = \lim_{h \rightarrow 0^+} (\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{h^2+2h}}{h(1+h)}) = \lim_{h \rightarrow 0^+} (\frac{1}{2} - \frac{h(h+2)}{h(1+h)\sqrt{h^2+2h}}) = \lim_{h \rightarrow 0^+} (\frac{1}{2} - \frac{h+2}{(1+h)\sqrt{h^2+2h}}) = -\infty$$

b) Comme $\frac{f(1+h) - f(1)}{h}$ n'a pas de limite finie quand h tend vers 0, f n'est pas dérivable en $x_0 = 1$, mais on interprète ce résultat à l'aide d'une demi tangente verticale au point $(1 ; \frac{1}{2})$.

3) Etude de la fonction auxiliaire : $g(x) = x^2 \sqrt{x^2 - 1} - 2$ sur $]1 ; +\infty[$.

$$a) g(\sqrt{2}) = 0$$

$$b) g'(x) = x^2 \frac{2x}{2\sqrt{x^2-1}} + 2x\sqrt{x^2-1} = \frac{x^3}{\sqrt{x^2-1}} + 2x\sqrt{x^2-1}$$

$$g'(x) = \frac{x(3x^2-2)}{\sqrt{x^2-1}}. \text{ Pour tout } x > 1, 3x^2 - 2 > 0 \text{ donc } g'(x) > 0$$

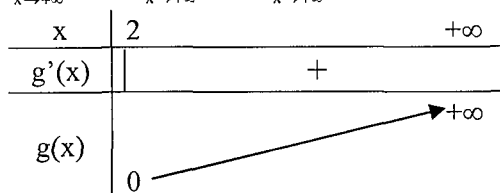
D'où g est strictement croissante sur $]1 ; +\infty[$.

donc $x = \frac{3}{2}$ est un axe de symétrie.

3) $x \mapsto x^2 - 3x + 2$ est une fonction dérivable et strictement positive sur $] -\infty, 1[\cup] 2, +\infty[$ en particulier sur $] 2, +\infty[$ donc $x \mapsto \sqrt{x^2 - 3x + 2}$ est dérivable sur $] 2, +\infty[$ et on a pour tout $x \in] 2, +\infty[$

$$g'(x) = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+2}} > 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 - 3x + 2} = +\infty; f(2) = 0$$



4) On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ donc ζ admet une branche infinie au voisinage de $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} = 1.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} [g(x) - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} [\sqrt{x^2 - 3x + 2} - x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 3x + 2 - x^2}{\sqrt{x^2 - 3x + 2} + x}$$

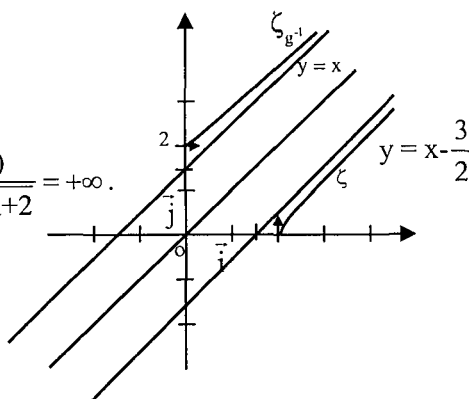
$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-3x + 2}{\sqrt{x^2 - 3x + 2} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(-3 + \frac{2}{x})}{x \left[\sqrt{1 - \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2}} + 1 \right]} = -\frac{3}{2}$$

Donc la courbe (ζ') admet une asymptote au voisinage de $+\infty$ d'équation :

$$y = x - \frac{3}{2}$$

$$\begin{aligned} 5) \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{g(x) - g(2)}{x - 2} &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2 - 3x + 2}}{x - 2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 3x + 2}{(x - 2)\sqrt{x^2 - 3x + 2}} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x - 1)}{(x - 2)\sqrt{x^2 - 3x + 2}} = +\infty. \end{aligned}$$

Donc g n'est pas dérivable en 2 et la courbe (ζ') admet une demi tangente verticale dirigé vers le haut au point $(2, 0)$



6) a) g est continue et strictement croissante sur $[2, +\infty[$ donc elle réalise une

bijection de $[2, +\infty[$ sur $g < [2, +\infty[> = [0, +\infty[$.

b) Soit $x \in [0, +\infty[$, cherchons $y \in [2, +\infty[$ tel que $g^{-1}(x) = y$.

$$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x \Leftrightarrow x = \sqrt{y^2 - 3y + 2} \Leftrightarrow x^2 = y^2 - 3y + 2$$

$$\Leftrightarrow y^2 - 3y + 2 - x^2 = 0.$$

$$\Delta = 9 - 4(2 - x^2) = 1 + 4x^2 > 0$$

$$\text{Donc } y = \frac{3 - \sqrt{1 + 4x^2}}{2} < \frac{3}{2} \text{ donc } y \notin [2, +\infty[$$

$$\text{Ou } y = \frac{3 + \sqrt{1 + 4x^2}}{2} \geq 2 \text{ donc } g^{-1}(x) = \frac{3 + \sqrt{1 + 4x^2}}{2}$$

c) La courbe de g^{-1} est la symétrique de celle de g par rapport à la première bissectrice.

8
$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + x} - x - 1 & \text{si } x \leq -1 \\ \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

1) Pour étudier la continuité et la dérivabilité de f en (-1) il est nécessaire de les étudier à droite et à gauche de (-1) .

* Continuité de f en -1 :

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} (\sqrt{x^2 + x} - x - 1) = 0 = f(-1)$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} = \frac{0}{2} = 0.$$

On a $\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = f(-1)$ donc f est continue en (-1) .

* Dérivabilité de f en -1 :

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{\sqrt{x^2 + x} - x - 1}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{x^2 + x - (x + 1)^2}{(x + 1)(\sqrt{x^2 + x} + x + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{-(x + 1)}{(x + 1)(\sqrt{x^2 + x} + x + 1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} \frac{-1}{\sqrt{x^2 + x} + x + 1} = -\infty. \end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en -1 .

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x^2 + 2x + 1}{(x + 1)(x^2 + 1)} = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{(x + 1)^2}{(x + 1)(x^2 + 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow (-1)^+} \frac{x + 1}{x^2 + 1} = 0 \text{ d'où } f \text{ est dérivable à droite en } -1. \end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable en -1 .

2) * $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 + 1} = 1$

Donc la droite Δ_1 d'équation : $y = 1$ est une asymptote à la courbe (ζ) au

voisinage de $(+\infty)$

$$* \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} - x - 1) = +\infty$$

Donc la courbe (ζ) admet une branche infinie au voisinage de $(-\infty)$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1 + \frac{1}{x}\right) = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) + 2x] = \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2+x} + x - 1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x-1}{\sqrt{x^2+x} - x + 1} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(3-\frac{1}{x})}{-x \left(\sqrt{1+\frac{1}{x}} + 1 - \frac{1}{x} \right)} = -\frac{3}{2}$$

Donc la droite Δ_2 d'équation : $y = -2x - \frac{3}{2}$ est une asymptote à la courbe (ζ) au voisinage de $(-\infty)$.

$$3) * \text{ Si } x \in]-\infty, -1] ; f(x) = \sqrt{x^2+x} - x - 1$$

$x \mapsto \sqrt{x^2+x} - x - 1$ est dérivable sur $] -\infty, -1[\cup] 0, +\infty[$ en particulier sur $] -\infty, -1[$ et on a pour tout $x \in] -\infty, -1[$

$$f'(x) = \frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x}} - 1 < 0 \text{ car } 2x+1 < -1$$

* Si $x \in]-1, +\infty[$; $f(x) = \frac{x^2+2x+1}{x^2+1}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ en particulier sur

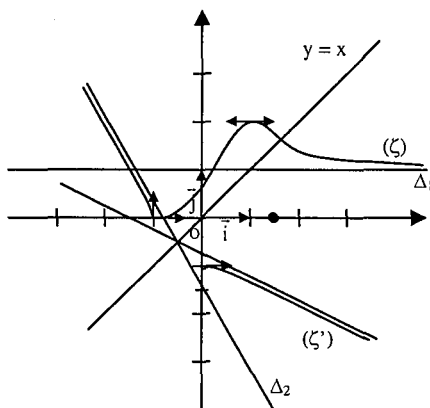
$] -1, +\infty[$ et on a pour tout $x \in]-1, +\infty[$; $f'(x) = \frac{-2x^2+2}{(x^2+1)^2}$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$-2x^2+2$	-	$\ominus$	+	$\ominus$	-

D'où le tableau de variation de la fonction f.

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$		
$f'(x)$	-	$\parallel$	+	$\ominus$	-		
$f(x)$	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	1

- 4) a) La fonction g est la restriction de la fonction f sur $I =]-\infty, -1]$ est une fonction continue et strictement décroissante donc elle réalise une bijection de I sur $g(I) =]-\infty, -1]$.



- b) $\zeta' = S_{\Delta}(\zeta)$ avec $\Delta : y = x$

5) $h(x) = x^3 - x^2 - x - 1$.

a) $D_h = \mathbb{R}$; h est une fonction polynôme, elle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a :

$$h'(x) = 3x^2 - 2x - 1.$$

$$h'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3} \text{ ou } x = 1.$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	1	$+\infty$
$h'(x)$		+	-	+
$h(x)$	$-\infty$	$-\frac{22}{27}$	-2	$+\infty$

- b) D'après les variations de h on a : pour tout $x \in]-\infty, 1[$; $h(x) < 0$ donc $h(x) = 0$ n'a pas de solution sur $]-\infty, 1[$ la restriction de la fonction h sur $[1, +\infty[$ est une fonction continue et strictement croissante donc elle réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $[-2, +\infty[$.

$0 \in [-2, +\infty[$ (donc l'équation $h(x) = 0$ admet une seule solution réelle $\alpha \in [1, +\infty[$).

$$\left. \begin{array}{l} c) h\left(\frac{3}{2}\right) = -\frac{11}{8}; h(2) = 1 \\ h \text{ est continue sur } \mathbb{R} \\ \text{en particulier sur } \left[\frac{3}{2}, 2\right] \end{array} \right\}$$

d'après le théorème des valeurs

intermédiaires $\alpha \in]\frac{3}{2}, 2[$.

- d) * Si $x \in]-\infty, -1]$.

$$\text{Soit } M(x, y) \in \zeta \cap \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + x} - x - 1 = x \\ y = x \end{cases}$$

$$\sqrt{x^2 + x} = 2x + 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x = (2x + 1)^2 \\ x^2 + x \geq 0 \\ 2x + 1 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + 3x + 1 = 0 \text{ n'a pas de solution} \\ x^2 + x \geq 0 \\ 2x + 1 \geq 0 \end{cases}$$

* Si $x \in]-1, +\infty[$.

Soit $M(x, y) \in \zeta \cap \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = x \\ y = x \end{cases} \Leftrightarrow \frac{x^2+2x+1}{x^2+1} = x \text{ et } y=x.$

$$x^2+2x+1 = x^3+x \Leftrightarrow x^3-x^2-x-1=0 \Leftrightarrow h(x)=0$$

cette équation admet une seule solution d'après 5) b)

Donc $\zeta \cap \Delta = \{1 \text{ point}\}.$



$$f(x) = x + \sqrt{x^2-2x}$$

1) a) $Df = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x^2-2x \geq 0\}.$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
x^2-2x	+	$\emptyset$	-	$\emptyset$	+

Donc $Df =]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x + \sqrt{x^2-2x}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{\sqrt{x^2-2x}-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-2x}{-x \left(\sqrt{1-\frac{2}{x}} + 1 \right)} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x + \sqrt{x^2-2x}) = +\infty$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2-2x}+x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2-2x}}{x} + 1 = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(1 + \frac{x(x-2)}{x \cdot \sqrt{x^2-2x}} \right) = -\infty$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{x^2-2x}+x-2}{x-2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(1 + \frac{x(x-2)}{(x-2)\sqrt{x^2-2x}} \right) = 1 + \infty = +\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à droite en $x_0 = 2$.

c) f est dérivable sur $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ et on a pour tout $x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$

$$f'(x) = 1 + \frac{2x-2}{2\sqrt{x^2-2x}} = 1 + \frac{x-1}{\sqrt{x^2-2x}}$$

* si $x \in]2, +\infty[\Leftrightarrow x-1 > 0$ donc $f'(x) > 0$

* si $x \in]-\infty, 0[\Leftrightarrow x-1 < 0$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x^2-2x}+x-1}{\sqrt{x^2-2x}} = \frac{-1}{\underbrace{\sqrt{x^2-2x}}_{>0} \underbrace{\sqrt{(\sqrt{x^2-2x}-(x-1))}}_0} < 0$$

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-			+
f(x)	1	0	2	$+\infty$

2) a) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ donc la droite $\Delta_1 : y=1$ est une asymptote horizontale au voisinage de $(-\infty)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x + \sqrt{x^2 - 2x}}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \sqrt{1 - \frac{2}{x}}\right) = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x + \sqrt{x^2 - 2x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{x\left(\sqrt{1 + \frac{2}{x}} + 1\right)} = -1$$

Donc la droite $\Delta_2 : y = 2x - 1$ est une asymptote oblique à la courbe (ζ) au voisinage de $(+\infty)$.

$$\text{Soit } \Omega(x, y) \in \Delta_1 \cap \Delta_2 \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases} \text{ donc } \Delta_1 \cap \Delta_2 = \{\Omega(1, 1)\}$$

b) Montrons que $(\zeta') = S_{\Omega}(\zeta)$.

Soit $M(x, y) \in P$ et $M'(x', y') \in P$.

$$S_{\Omega}(M) = M' \Leftrightarrow M * M' = \Omega \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x+x'}{2} = 1 \\ \frac{y+y'}{2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 - x' \\ y = 2 - y' \end{cases}$$

$$M(x, y) \in \zeta \Leftrightarrow y = x + \sqrt{x^2 - 2x} \Leftrightarrow 2 - y' = 2 - x' + \sqrt{(2 - x')^2 - 2(2 - x')}$$

$$\Leftrightarrow -y' = -x' + \sqrt{x'^2 - 2x'} \Leftrightarrow y' = x' - \sqrt{x'^2 - 2x'}$$

$$\Leftrightarrow M'(x', y') \in (\zeta) \text{ d'où } S_{\Omega}(\zeta) = \zeta'.$$

$$3) H = \{M(x, y) \text{ tel que } y^2 - 2xy + 2x = 0\}$$

$$M(x, y) \in H \Leftrightarrow y^2 - 2xy + 2x = 0 \Leftrightarrow (y - x)^2 - x^2 + 2x = 0$$

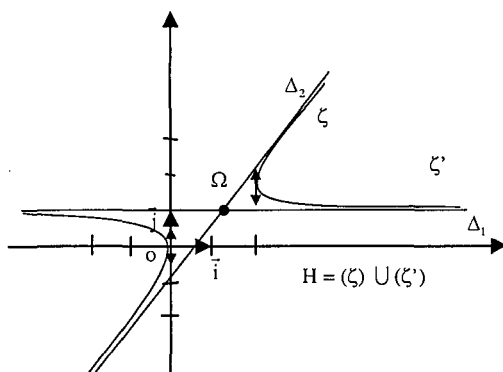
$$\Leftrightarrow (y - x)^2 = x^2 - 2x \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - 2x \geq 0 \\ |y - x| = \sqrt{x^2 - 2x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[\\ y - x = \sqrt{x^2 - 2x} \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[\\ y - x = -\sqrt{x^2 - 2x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[\\ y = x + \sqrt{x^2 - 2x} = f(x) \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} x \in]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[\\ y = x - \sqrt{x^2 - 2x} = g(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow M(x, y) \in \zeta \text{ ou } M(x, y) \in \zeta' \Leftrightarrow M(x, y) \in \zeta \cup \zeta' \text{ d'où } H = \zeta \cup \zeta'.$$

b) La courbe (ζ) admet aux points $(0, 0)$ et $(2, 2)$ deux demi tangentes verticales dirigées vers le haut.


10

1) $g(x) = \sqrt{4-x}$; $D_g = \{x \in \mathbb{R}, \text{ tel que } 4-x \geq 0\} =]-\infty, 4]$.

La fonction g est continue sur $]-\infty, 4]$ et dérivable sur $]-\infty, 4[$ et on a pour tout $x \in]-\infty, 4[$.

$$g'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{4-x}} < 0$$

x	$-\infty$	4
$g'(x)$		-
$g(x)$	$+\infty$	0

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{4-x}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{\frac{4-x}{x^2}} = 0$$

(car $\sqrt{x^2} = -x$ au voisinage de $-\infty$).

Donc la courbe (Γ) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $(-\infty)$.

* Dérivable à gauche en $x_0 = 4$

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{g(x) - g(4)}{x - 4} &= \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\sqrt{4-x}}{x - 4} \\ &= \lim_{x \rightarrow 4^-} -\sqrt{\frac{4-x}{(4-x)^2}} = \lim_{x \rightarrow 4^-} -\frac{1}{\sqrt{4-x}} = -\infty \end{aligned}$$

d'où la courbe (Γ) admet à gauche au point $A(4, 0)$ une demi tangente de vecteur directeur $\vec{j}$

$$2) f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{4-x} ; D_f =]-\infty, 0[\cup]0, 4]$$

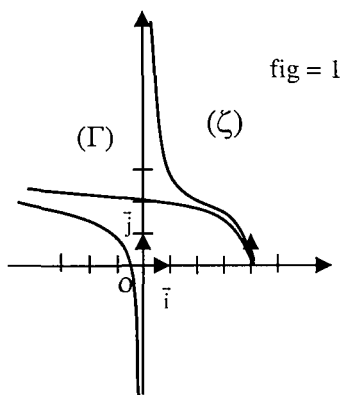


fig = 1

$$a) f(x) - g(x) = \frac{1}{x}$$

x	$-\infty$	0	4
$f(x) - g(x)$	-		+
Position de (ζ) par rapport à (Γ)	(Γ) est au dessus de (ζ)		(Γ) est au dessous de (ζ)

b) $f(x) = \frac{1}{x} + \sqrt{4-x}$ est dérivable sur $] -\infty, 0[\cup] 0, 4[$ et on a pour tout x

$$\in] -\infty, 0[\cup] 0, 4[, f'(x) = \frac{-1}{x^2} - \frac{1}{2\sqrt{4-x}} < 0$$

x	$-\infty$	0	4
$f'(x)$	-		-
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$
	$\searrow$		$\searrow$
	$-\infty$		$1/4$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty ; \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty ; \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty ; f(4) = \frac{1}{4}$$

c) D'après les variations de f on a :

* Pour tout $x \in]0, 4[$; $f(x) > 0$ donc $f(x) \neq 0$ pour tout $x \in]0, 4[$

* f est définie, continue et strictement décroissante sur $] -\infty, 0[$

Donc f réalise une bijection de $] -\infty, 0[$ sur $f <] -\infty, 0[\supseteq \mathbb{R}$

$0 \in f <] -\infty, 0[\supseteq \mathbb{R}$ donc l'équation $f(x) = 0$ admet dans $] -\infty, 0[$ une solution unique α .

Conclusion : L'équation $f(x) = 0$ admet dans $] -\infty, 4[$ une seule solution α

$$* f\left(-\frac{1}{2}\right) = -2 + \frac{3\sqrt{2}}{2} > 0 \text{ et } f\left(-\frac{1}{3}\right) = -3 + \sqrt{\frac{13}{3}} < 0$$

$$\text{donc } f\left(-\frac{1}{2}\right) \cdot f\left(-\frac{1}{3}\right) < 0 \text{ d'où } \alpha \in \left]-\frac{1}{2}, -\frac{1}{3}\right[.$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{\sqrt{4-x}}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{x(\frac{4}{x} - 1)}{x\sqrt{4-x}} \right) = 0$$

donc la courbe (ζ) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $(-\infty)$.

• $y = 0$ est une asymptote à (ζ) .

• Dérivabilité en $x_0 = 4$.

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{f(x)-f(4)}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{\frac{1}{x} + \sqrt{4-x} - \frac{1}{4}}{x-4} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \left[-\frac{1}{4x} - \frac{1}{\sqrt{4-x}} \right] = -\infty$$

Donc la courbe (ζ) admet à gauche au point $(4, \frac{1}{4})$ une demi tangente de

vecteur directeur $\vec{j}$. (voir Fig 1)

$$3) f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0.$$

On pose $k(x) = f(x) - x$; pour tout $x \in]0, 4[$.

Pour tout $x \in]0, 4[$; $k'(x) = f'(x) - 1 < 0$.

K est une fonction continue et strictement décroissante sur $]0, 4[$ donc elle

réalise une bijection de $]0, 4[$ sur $k <]0, 4[> - [k(4) ; \lim_{x \rightarrow 0^+} k(x) = [-\frac{15}{4}; +\infty[$.

$0 \in k <]0, 4[>$ donc il existe un unique $x_0 \in]0, 4[$ tel que $k(x_0) = 0$.

Conclusion : L'équation $f(x) = x$ admet dans $]0, 4[$ une unique solution x_0 .

$$\bullet f\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{29}{14} \text{ d'où } k\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{29}{14} - \frac{7}{4} = \frac{9}{28}.$$

$$f\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{4}{9} + \sqrt{4 - \frac{9}{4}} = \frac{4}{9} + \frac{\sqrt{7}}{2} \text{ d'où } k\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{-65 + 9\sqrt{7}}{36} < 0$$

$$k\left(\frac{7}{4}\right), k\left(\frac{9}{4}\right) < 0 \text{ donc } x_0 \in \left] \frac{7}{4}, \frac{9}{4} \right[.$$

$$4) a) h(x) = f(4 \cos x) ; \text{ pour tout } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\text{Pour tout } x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[; 4 \cos x \in]0, 4] \text{ donc } h \text{ est définie sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$* u : x \mapsto 4 \cos x \text{ est dérivable sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\text{ et } f \text{ est dérivable sur }]0, 4[;$$

$$\text{pour tout } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[; u(x) \in]0, 4[.$$

$$\text{Donc } x \mapsto h(x) = f(u(x)) \text{ est dérivable sur } \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\text{et on a, pour tout } x \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[; h'(x) = -4 \sin x f'(4 \cos x) > 0.$$

$$\text{La fonction } h \text{ est continue, et strictement croissante sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$$

$$\text{Donc elle réalise une bijection de } \left[0, \frac{\pi}{2}\right[\text{ sur } h < \left[0, \frac{\pi}{2}\right[>$$

$$= [h(0) ; \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} h(x)] = [\frac{1}{4}, +\infty[\text{ car } \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$$

b) Etudions d'abord la dérivabilité de h en 0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(4\cos x) - \frac{1}{4}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{4\cos x} + \sqrt{4(1 - \cos x)} - \frac{1}{4}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{4\cos x} \left(\frac{1 - \cos x}{x} \right) + 2\sqrt{\frac{1 - \cos x}{x^2}} \right).$$

On a $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1 - \cos x}{x} \right) = 0$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1 - \cos x}{x^2} \right) = \frac{1}{2}$, d'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{h(x) - h(0)}{x} = \sqrt{2}$

Donc h est dérivable en 0 et $h'(0) = \sqrt{2}$ par suite h^{-1} est dérivable en

$$h(0) = \frac{1}{4} \text{ et on a : } (h^{-1})' \left(\frac{1}{4} \right) = \frac{1}{h'(0)} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

c) $h\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} + \sqrt{2}$

pour tout $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$; $h(x) = \frac{1}{4\cos x} + \sqrt{4(1 - \cos x)}$

$$= \frac{1}{4\cos x} + 2\sqrt{2} \left| \sin \frac{x}{2} \right| \text{ car } 1 - \cos x = 2\sin^2 \frac{x}{2}$$

Or pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$; $\sin \frac{x}{2} > 0$ donc $h(x) = \frac{1}{4\cos x} + 2\sqrt{2} \sin \frac{x}{2}$

$$h'(x) = \frac{\sin x}{4\cos^2 x} + \sqrt{2} \cos \frac{x}{2}; \text{ pour tout } x \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

$$h'\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6}}{2} \text{ d'où } (h^{-1})'\left(\frac{1}{2} + \sqrt{2}\right) = \frac{1}{h'\left(\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{6}} = \frac{2}{3}(\sqrt{6} - \sqrt{3}).$$



$$f(x) = -1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}}.$$

1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } x^2 - 1 > 0\} =]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[.$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left[-1 - \frac{x}{x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \right] = -2 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[-1 + \frac{x}{x\sqrt{1 - \frac{1}{x^2}}} \right] = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left[-1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} \right] = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = -\infty.$$

2) $x \mapsto x^2 - 1$ est dérivable et strictement positif sur l'intervalle

$] -\infty, -1[\cup] 1, +\infty[$ donc $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ est dérivable sur cette intervalle .

Donc $x \mapsto f(x)$ est dérivable sur $] -\infty, -1[\cup] 1, +\infty[$.

et on a , pour tout $x \in] -\infty, -1[\cup] 1, +\infty[$, $f'(x) = \frac{\sqrt{x^2-1} - \frac{2x^2}{2\sqrt{x^2-1}}}{x^2-1}$

d'où $f'(x) = \frac{-1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} < 0$ pour tout $x \in] -\infty, -1[\cup] 1, +\infty[$.

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
f'(x)	-			-
f(x)	-2		$+\infty$	0

3) a) La fonction f est continue, définie et strictement décroissante sur $] 1, +\infty[$ donc g réalise une bijection de $] 1, +\infty[$ sur :

$$g <] 1, +\infty[> = f <] 1, +\infty[> =] 0, +\infty[= \mathbb{R}_+^* = I.$$

b) g est continue et strictement décroissante sur $] 1, +\infty[$ d'où g^{-1} est continue et strictement décroissante sur I .

c) Pour tout $x \in I$, il existe un seul $y \in] 1, +\infty[$ tel que $g(y) = x$.

$$g(y) = x \Leftrightarrow \frac{y}{\sqrt{y^2-1}} = x+1 \Leftrightarrow \frac{y^2}{y^2-1} = (x+1)^2$$

$$y^2 = (y^2-1)(x+1)^2 \Leftrightarrow y^2(1-(x+1)^2) = -(x+1)^2$$

$$\Leftrightarrow y^2(-2x-x^2) = -(x+1)^2 \Leftrightarrow y^2 = \frac{(x+1)^2}{2x+x^2}$$

$$\Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{(x+1)^2}{2x+x^2}} \text{ ou } y = -\sqrt{\frac{(x+1)^2}{2x+x^2}}$$

$$\text{or } y \in] 1, +\infty[\text{ donc } y = \sqrt{\frac{(x+1)^2}{2x+x^2}} = \frac{|x+1|}{\sqrt{2x+x^2}} = \frac{x+1}{\sqrt{2x+x^2}}$$

(car $x+1 > 0$ pour $x \in I$) donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$

$$\text{On a : } g^{-1}(x) = \frac{x+1}{\sqrt{2x+x^2}}.$$

d) g est dérivable sur $] 1, +\infty[$; on a : $g'(x) = -\frac{1}{(x^2-1)\sqrt{x^2-1}} \neq 0$, pour tout

$x \in] 1, +\infty[$ donc la fonction g^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$.

$$\bullet g^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\frac{5}{3}}{\sqrt{\frac{4}{9} + \frac{4}{3}}} = \frac{\frac{5}{3}}{\frac{4}{3}} = \frac{5}{4}$$

$$g'\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{-1}{\left(\frac{25}{16} - 1\right) \sqrt{\frac{25}{16} - 1}} = \frac{-1}{\frac{9}{16} \sqrt{\frac{9}{16}}} = \frac{-1}{\frac{27}{64}} \text{ donc } g'\left(\frac{5}{4}\right) = -\frac{64}{27}$$

$$\bullet g \text{ est dérivable en } \frac{5}{4} \left\{ \begin{array}{l} \text{donc } g^{-1} \text{ est dérivable en } g\left(\frac{5}{4}\right) = \frac{2}{3} \\ \text{et } (g^{-1})'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{g'\left(\frac{5}{4}\right)} = -\frac{27}{64} \end{array} \right.$$

4) a) On pose $k(x) = g(x) - x$; pour tout $x \in]1, +\infty[$.

$k'(x) = g'(x) - 1 < 0$; pour tout $x \in]1, +\infty[$.

k est continue et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$ donc k réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $h <]1, +\infty[> =] \lim_{x \rightarrow +\infty} k(x), \lim_{x \rightarrow 1^+} k(x) [$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - x] = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} k(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} [f(x) - x] = +\infty \text{ d'où } k <]1, +\infty[> = \mathbb{R}.$$

$0 \in \mathbb{R}$, donc il existe un unique $\alpha \in]1, +\infty[$ tel que $k(\alpha) = 0$

$$\Leftrightarrow g(\alpha) - \alpha = 0 \Leftrightarrow g(\alpha) = \alpha.$$

Conclusion : L'équation $g(x) = x$ admet dans l'intervalle $]1, +\infty[$ une unique solution α .

b) $\bullet x = 1$ est une asymptote à ζ_g .

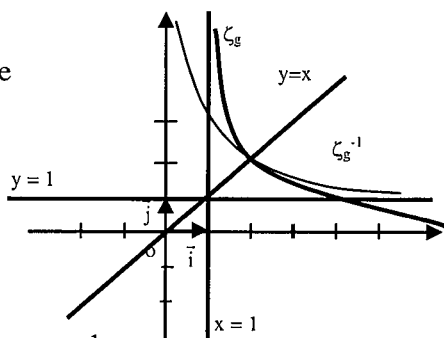
$\bullet y = 0$ est une asymptote à ζ_g^{-1} au voisinage de $+\infty$.

$$5) a) \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} h(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} g\left(\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1}{\cos x} = +\infty; \lim_{x \rightarrow +\infty} g(X) = 0 \text{ avec } X = \frac{1}{\cos x}$$

$$\text{Donc } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \left[g\left(\frac{1}{\cos x}\right) \right] = 0 \text{ et par suite } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} h(x) = 0 = h\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

alors h est continue à gauche en $\frac{\pi}{2}$.



b) Soit $v : x \mapsto \frac{1}{\cos x}$ par suite $h(x) = g(v(x)) = g \circ v(x)$

$x \mapsto v(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi ; k \in \mathbb{Z} \right\}$ en particulier sur $]0, \frac{\pi}{2}[$;

$x \mapsto g(x)$ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$; $V(x) \in]1, +\infty[$

donc $h(x) = g \circ v(x)$ est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et on a : pour tout $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$;

$$h'(x) = v'(x) \cdot g'(v(x)).$$

$$h'(x) = \frac{\sin x}{\cos^2 x} \left[\frac{-1}{\left(\left(\frac{1}{\cos x} \right)^2 - 1 \right) \sqrt{\left(\frac{1}{\cos x} \right)^2 - 1}} \right]$$

$$h'(x) = \frac{-\sin x}{\cos^2 x} \cdot \frac{1}{\operatorname{tg}^3 x} = \frac{-\sin x}{\cos^2 x} \cdot \frac{\cos^3 x}{\sin^3 x} = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}.$$

$$\text{d'où } h'(x) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x}, \text{ pour tout } x \in]0, \frac{\pi}{2}[$$

$$\text{c) Pour tout } x \in]0, \frac{\pi}{2}[; h(x) = g\left(\frac{1}{\cos x}\right) = -1 + \frac{\frac{1}{\cos x}}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 x} - 1}}$$

$$= -1 + \frac{1}{|\operatorname{tg} x|} = -1 + \frac{1}{\operatorname{tg} x} \quad (\text{car pour } x \in]0, \frac{\pi}{2}[\operatorname{tg} x > 0)$$

$$\text{D'où } h(x) = -1 + \frac{1}{\sin x} ; \text{ pour tout } x \in]0, \frac{\pi}{2}[$$