

# ENONCES



On considère la fonction  $f$  définie sur  $[0, \sqrt{2}]$  par  $f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$ .

- 1) Démontrer que  $f$  est bijection de  $[0, \sqrt{2}]$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera.
- 2) Expliciter  $f^{-1}(x)$ .
- 3) Montrer que l'équation  $f(x) = -4x + \sqrt{5}$  admet dans  $]1, \sqrt{2}[$  une solution unique.



$r \in \mathbb{Q}^*$ , soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = (1+x)^r$ .

- 1) Déterminer l'équation  $y = T(x)$  de la tangente à  $\zeta_f$  au point d'abscisse 0.
- 2) Pour  $x$  assez proche de 0, on décide d'approximer  $f(x)$  par  $T(x)$   
Calculer ainsi une valeur approchée 1,002<sup>7</sup>.  
Comparer avec la valeur fournie par la calculatrice.



1) Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$ .

- a) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet dans  $\mathbb{R}$  une solution unique  $\alpha \in ]0, 1[$ .
- b) En déduire que  $\alpha$  est le seul réel vérifiant  $\alpha = \sqrt{\frac{1-\alpha}{1+\alpha}}$ .
- 2) Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0, 1]$  par  $g(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ .
  - a) Montrer que  $g$  est une bijection de  $[0, 1]$  sur lui-même soit  $h$  sa bijection réciproque.
  - b) Expliciter  $h(x)$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .
- 3) Soit  $\beta \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$  tel que  $\alpha = \cos 2\beta$ . Montrer que  $\beta$  est l'unique solution dans

$\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$  de l'équation :  $\operatorname{tg} x - \cos 2x = 0$ .



Soit  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x - \sqrt{2-x} & \text{si } x < 0 \\ 4x^3 + x^2 + x - 1 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$$

- 1) Etudier la continuité de  $f$  sur son domaine de définition.

- 2) Etudier la dérivabilité de  $f$  et donner sa fonction dérivée.  
 3) Montrer que l'équation  $f(x) = 0$  admet dans  $]0, +\infty[$  une unique solution  $\alpha$ . Vérifier que  $\alpha \in ]0, 1[$ .  
 4) Montrer que la restriction  $g$  de  $f$  à  $] -\infty, 0[$  réalise une bijection de  $] -\infty, 0[$  sur un intervalle  $J$  à préciser.

Donner l'expression de  $g^{-1}(x)$  pour  $x \in J$ .

- 5) Soit  $h$  la fonction définie sur  $] -\pi, 0[$  par  $h(x) = f\left(\frac{1}{\sin x}\right)$ .

Etudier la dérivabilité de  $h$  et donner sa fonction dérivée.

**5** Soit la fonction  $f: x \mapsto \sqrt{x^2 - x + 1} + \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$ .

- 1) Montrer que  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ . Donner le tableau de variation de  $f$ .  
 2) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur un intervalle  $J$  que l'on précisera. Expliciter  $f^{-1}(x)$  en fonction de  $x$ .

- 3) Déterminer le nombre dérivé de  $f^{-1}$  au point  $\frac{3}{2}$ .

- 4) Soit  $g: \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[ \longrightarrow \mathbb{R}; x \longmapsto \sqrt{\tan^2 x - \tan x + 1} + \tan x + \frac{1}{2}$ .

a) Montrer que  $g$  est dérivable sur  $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ .

b) Donner le tableau de variation de  $g$ .

**6** Soit  $f: [-1, 0] \longrightarrow \left[0, \frac{1}{2}\right]; x \longmapsto \sin^2 \frac{\pi}{4} x$ .

- 1) Montrer que l'équation  $f(x) = x + 1$  admet une solution dans  $\left]-1, -\frac{2}{3}\right[$ .

- 2) Montrer que  $f$  est une bijection, soit  $f^{-1}$  sa réciproque.

- 3) a) Montrer que  $f^{-1}$  est dérivable en  $\frac{1}{4}$ , calculer  $(f^{-1})'\left(\frac{1}{4}\right)$ .

b) Montrer que  $\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f^{-1}(y)}{y} = -\infty$ .

- 4) Déterminer la fonction dérivée de  $f^{-1}$ , puis retrouver  $(f^{-1})'\left(\frac{1}{4}\right)$ .

**7** Soit la fonction  $f$  définie par  $f(x) = \sqrt[3]{2 - 2x}$

- 1) Etudier la dérivabilité de  $f$ .  
 2) Dresser le tableau de variation de  $f$ .

- 3) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]-\infty, 1]$  sur  $J$  que l'on précisera.
- 4)  $g$  étant la réciproque de  $f$ .
- Etudier la dérivabilité de  $g$ .
  - Calculer  $g'(x)$ .
  - Expliciter l'expression de  $g(x)$ .

**8** Soit  $f: ]\frac{1}{2}, 1] \longrightarrow \mathbb{R}; x \longmapsto \frac{1}{\cos^2 \pi x}$

- Etudier la dérivabilité de  $f$ .
  - Dresser le tableau de variation de  $f$ .
- 3) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $]\frac{1}{2}, 1]$  sur  $J$  que l'on précisera.
- 4)  $g$  étant la réciproque de  $f$ .
- $g$  est elle dérivable en 1 et en  $\frac{4}{3}$ .
  - Calculer  $g'(x)$ .

**9** Soit  $f: ]0, 2[ \longrightarrow \mathbb{R}; x \longmapsto \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}(x+1)$

- Montrer que  $f$  réalise une bijection, soit  $h$  sa réciproque.
- Déterminer l'ensemble de continuité de  $h$  et son sens de variation.  
Construire  $C_h$  la courbe de  $h$ .

2) Montrer que  $h$  est dérivable en  $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$  et calculer  $h'\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)$ .

- 3) a) Déterminer la fonction dérivée de  $h$ .

b) Soit  $p: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}; x \longmapsto h(x) + h\left(\frac{1}{x}\right)$ .

**10** Déterminer la fonction dérivée de  $p$ . Expliciter  $p(x)$ .

1) Soit  $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow [-1, 1]$  définie par  $f(x) = \sin x$ .

- Montrer que  $f$  admet une fonction réciproque  $f^{-1}$ .
  - Calculer  $f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right); f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right); f^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$ .
  - Calculer  $h(a) = f^{-1}(a) + f^{-1}(-a)$  pour  $a \in [-1, 1]$ .
  - Calculer  $\sin[f^{-1}(x)]$  et  $\cos[f^{-1}(x)]$
- 2) Soit  $g$  la fonction définie sur  $[0, \pi]$  par  $g(x) = \cos x$ .

a) Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $g^{-1}$  et déterminer le domaine de définition de  $g^{-1}$ .

b) Calculer  $\cos[g^{-1}(x)]$  et  $\sin[g^{-1}(x)]$ .

c) Montrer que  $g^{-1}(-x) = \pi - g^{-1}(x)$ .

d) Soit  $a \in [-1, 1]$ . Exprimer à l'aide de  $g^{-1}(a)$  toutes les solutions de l'équation  $\cos x = a$ .

3)  $f^{-1}$  et  $g^{-1}$  étant les fonctions définies dans 1) et 2).

a) Montrer que  $0 \leq \frac{\pi}{2} - f^{-1}(x) \leq \pi$ .

b) Calculer  $\cos\left[\frac{\pi}{2} - f^{-1}(x)\right]$ .

c) Montrer que pour tout  $x \in [-1, 1]$ ;  $f^{-1}(x) + g^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$ .

**11** Soit  $f : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x) = x + \sin^2 x$ . On désigne par (C)

sa courbe représentative dans un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

A) 1) a) Étudier les variations de  $f$ .

b) Déterminer les points d'abscisses  $x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  en lesquels (C) est tangente aux droites d'équations :  $y = x$  et  $y = x + 1$ .

2) Soit  $\varphi : \left]0, \frac{\pi}{2}\right[ \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto -x + \sin^2 x + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$ .

a) Étudier les variations de  $\varphi$ .

b) Déterminer le signe de  $\varphi(x)$  suivant les valeurs de  $x$ .

c) Dédire sur  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  la position de (C) par rapport à la tangente au point

d'abscisse  $\frac{\pi}{4}$ .

B) Soit  $g : \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right] \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto 1 + \sin 2x$ .

1) Montrer que  $g$  admet une fonction réciproque  $G$  définie sur  $J$  à préciser.

2) Calculer  $G(0)$ ,  $G(1)$  et  $G(2)$ .

3) a) Sur quel ensemble  $K$ ,  $G$  est elle dérivable.

b) Démontrer que pour tout  $x \in \mathbb{K}$  ;  $G'(x) = \frac{1}{2 \cdot \sqrt{x(2-x)}}$ .

4) Soit  $h$  la fonction définie sur  $[0, 2]$  par :  $h(x) = \frac{x-1}{2} - G(x)$ .

a) Etudier la dérivabilité de  $h$  aux points 0 et 2.

b) Dresser le tableau de variation de  $h$ .

**12** Soit  $f$  la fonction définie sur  $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  par  $f(x) = 1 - \frac{1}{1 + \sin \pi x}$

1) a) Montrer que  $f$  réalise une bijection de  $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  sur un intervalle  $J$ .

b) On note  $g = f^{-1}$ , calculer  $g(-1)$  ;  $g(0)$  ;  $g\left(\frac{1}{3}\right)$  ;  $g\left(\frac{1}{2}\right)$  et  $g(-1 - \sqrt{2})$ .

2) a) Sur quel ensemble  $K$ ,  $g$  est elle dérivable ? Déterminer  $g'(x)$  pour  $x \in K$ .

b) Soit  $h$  la fonction définie sur  $\left]\frac{\pi}{3}, \pi\right]$  par  $h(x) = g(\cos x)$ .

Montrer que  $h$  est dérivable et calculer  $h'(x)$ .

3) a) En utilisant le théorème des accroissements finis sur  $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$  pour la

fonction  $g$ , montrer qu'il existe un réel  $\alpha \in \left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$  tel que :

$$(1 - \alpha)^2 (1 - 2\alpha) = \frac{1}{4\pi^2}.$$

b) Trouver la limite éventuelle de  $\frac{g(\alpha + t) - g(\alpha - t)}{t}$  quand  $t$  tend vers 0.

## CORRIGES

1) Soit  $f(x) = x^4 - 4x^2 + 1$  avec  $x \in [0, \sqrt{2}]$

- 1) La fonction  $f$  est définie, continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  en particulier sur  $[0, \sqrt{2}]$  et on a pour tout  $x \in [0, \sqrt{2}]$ ,  $f'(x) = 4x^3 - 8x = 4x(x^2 - 2)$  d'où le tableau de variation :

|         |   |   |            |
|---------|---|---|------------|
| $x$     | 0 |   | $\sqrt{2}$ |
| $f'(x)$ | 0 | - | 0          |
| $f(x)$  | 1 |   | -3         |

La fonction  $f$  est continue et strictement décroissante sur  $[0, \sqrt{2}]$

donc elle réalise une bijection de  $[0, \sqrt{2}]$  sur  $f([0, \sqrt{2}]) = [-3, 1]$ .

- 2) On a pour tout  $y \in [-3, 1]$ , il existe un unique  $x \in [0, \sqrt{2}]$

$$\text{tel que } f(x) = y \Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 1 = y.$$

$$\Leftrightarrow x^4 - 4x^2 + 4 = y + 3 \Leftrightarrow (x^2 - 2)^2 = y + 3.$$

$$\Leftrightarrow |x^2 - 2| = \sqrt{y + 3} \text{ or } x \in [0, \sqrt{2}] \Leftrightarrow 0 \leq x \leq \sqrt{2} \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 2$$

$$\text{d'où } x^2 - 2 \leq 0 \text{ et par suite } |x^2 - 2| = 2 - x^2$$

$$\text{donc } 2 - x^2 = \sqrt{y + 3} \Leftrightarrow x^2 = 2 - \sqrt{y + 3} \text{ or } x > 0$$

$$\text{d'où } x = \sqrt{2 - \sqrt{y + 3}} \text{ et par suite } f^{-1}(y) = \sqrt{2 - \sqrt{y + 3}}$$

- 3) Soit  $g(x) = f(x) + 4x - \sqrt{5}$  avec  $x \in [1, \sqrt{2}]$ .

La fonction  $g$  est définie, dérivable sur  $\mathbb{R}$  en particulier sur  $[1, \sqrt{2}]$  et on a pour tout  $x \in [1, \sqrt{2}]$

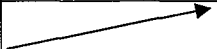
$$g'(x) = 4x^3 - 8x + 4 = 4(x^3 - 2x + 1) = 4(x - 1)(x^2 + x - 1)$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } x^2 + x - 1 = 0$$

$$x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2} \quad \text{ou} \quad x = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

| x         | 1 | $\sqrt{2}$ |
|-----------|---|------------|
| $x-1$     | + |            |
| $x^2+x-1$ | + |            |
| $g'(x)$   | + |            |

d'où

| x       | 1 | $\sqrt{2}$                                                                        |
|---------|---|-----------------------------------------------------------------------------------|
| $g'(x)$ | + |                                                                                   |
| $g(x)$  |   |  |

$g$  est continue sur  $[1, \sqrt{2}]$  et on a :

$$g(1) = 2 - \sqrt{5} < 0; \quad g(\sqrt{2}) = -3 + 4\sqrt{2} - \sqrt{5} > 0 \quad \text{d'où } g(1) \cdot g(\sqrt{2}) < 0$$

donc il existe  $\alpha \in ]1, \sqrt{2}[$  tel que  $g(\alpha) = 0$  et comme  $g$  est strictement

croissante sur  $[1, \sqrt{2}]$  donc  $g$  est une bijection sur  $[1, \sqrt{2}]$  d'où l'unicité de  $\alpha$ .

**2** 1)  $f(0) = 1$ ,  $f'(x) = r(1+x)^{r-1}$  et  $f'(0) = r$

L'équation de la tangente au point d'abscisse 0 est

$$y = f'(0)x + f(0) \Rightarrow y = rx + 1.$$

2) L'approximation affine de  $f$  voisin de 0 est  $f(x) \approx rx + 1 = T(x)$

Soit  $(1+x)^r \approx rx + 1$  donc  $(1,002)^7 \approx (1+0,002)^7 \approx 7 \times 0,002 + 1 = 1,014$   
et avec une calculatrice  $(1,002)^7 = 1,0140842$ .

**3** 1)  $f(x) = x^3 + x^2 + x - 1$ .

a)  $f$  est une fonction polynôme donc elle est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $f'(x) = 3x^2 + 2x + 1 > 0$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$

Donc  $f$  est strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  et par suite  $f$  est une bijection sur  $\mathbb{R}$

Montrons l'existence de la solution  $\alpha$  pour l'équation  $f(x) = 0$

On a :  $f$  est continue sur  $[0, 1]$

$$f(0) = -1; \quad f(1) = 2 \quad \text{et par suite } f(0) \cdot f(1) < 0$$

Donc il existe  $\alpha \in ]0, 1[$  tel que  $f(\alpha) = 0$  et comme  $f$  est une bijection d'où l'unicité de  $\alpha$  et par suite l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in ]0, 1[$ .

b) Résolvons dans  $\mathbb{R}$  l'équation  $x = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$  (E)

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 0 \\ \frac{1-x}{1+x} \geq 0 \\ x^2 = \frac{1-x}{1+x} \end{cases} \quad (1)$$

| x                 | $-\infty$ | $-1$ | $1$ | $+\infty$ |
|-------------------|-----------|------|-----|-----------|
| $\frac{1-x}{1+x}$ |           |      |     |           |
| $\frac{1-x}{1+x}$ | -         |      | +   | -         |

Le système (1) équivaut à 
$$\begin{cases} x \in ]-1, 1] \\ x \geq 0 \\ x^2 = \frac{1-x}{1+x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \in [0, 1] \\ x^2 = \frac{1-x}{1+x} \end{cases}$$

$$x^2 = \frac{1-x}{1+x} \Leftrightarrow x^2 + x^3 = 1-x \Leftrightarrow x^3 + x^2 + x - 1 = 0 \text{ avec } x \in [0, 1]$$

donc d'après (a)  $\alpha$  est la seule solution de l'équation (E) car  $\alpha \in ]0, 1[$ .

2) a)  $g(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$  pour tout  $x \in [0, 1]$ .

$$Dg = [0, 1]$$

$x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$  continue et positive sur  $[0, 1]$  donc  $x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$  est continue sur  $[0, 1]$ .

•  $x \mapsto \frac{1-x}{1+x}$  est dérivable et strictement positive sur  $[0, 1]$

d'où  $x \mapsto \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$  est dérivable sur  $[0, 1]$  et on a pour tout  $x \in [0, 1]$

$$g'(x) = \left( \frac{1-x}{1+x} \right)' \cdot \frac{1}{2\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}$$

$$\text{d'où } g'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2 \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} < 0; \forall x \in [0, 1[$$

et par suite  $g$  est strictement décroissante sur  $[0, 1]$ .

On a :  $g$  est continue et strictement décroissante sur  $[0, 1]$  donc elle réalise une bijection de  $[0, 1]$  sur  $g([0, 1]) = [g(1), g(0)] = [0, 1]$

soit  $h$  sa bijection réciproque.

b) On a pour tout  $y \in [0, 1]$ , il existe un unique  $x \in [0, 1]$  tel que

$$g(x) = y \Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} \text{ or } y \geq 0 \text{ donc } y^2 = \frac{1-x}{1+x} \Leftrightarrow y^2(1+x) = 1-x$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{1-y^2}{1+y^2} \text{ d'où } h(y) = \frac{1-y^2}{1+y^2}$$

$$\text{ou encore } h(x) = \frac{1-x^2}{1+x^2} \text{ pour tout } x \in [0, 1].$$

3) Soit  $\beta \in \left] 0, \frac{\pi}{4} \right[$  tel que  $\alpha = \cos 2\beta$ .

Soit  $K(x) = \operatorname{tg} x - \cos 2x$ , montrons que  $\beta$  est l'unique solution dans  $\left[ 0, \frac{\pi}{4} \right]$  de l'équation  $k(x) = 0$ .

$x \mapsto \operatorname{tg} x$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi; k \in \mathbb{Z} \right\}$

en particulier sur  $\left[ 0, \frac{\pi}{4} \right]$ .

$x \mapsto \cos 2x$  est continue et dérivable sur  $\mathbb{R}$  en particulier sur  $\left[ 0, \frac{\pi}{4} \right]$

donc  $x \mapsto k(x)$  est continue et dérivable sur  $\left[ 0, \frac{\pi}{4} \right]$  et on a pour tout

$x \in \left[ 0, \frac{\pi}{4} \right]$ ;  $k'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x + 2 \sin 2x > 0$  pour tout  $x \in \left[ 0, \frac{\pi}{4} \right]$ .

La fonction  $K(x)$  est continue et strictement croissante sur  $\left[ 0, \frac{\pi}{4} \right]$  donc elle

réalise une bijection de  $\left[ 0, \frac{\pi}{4} \right]$  sur  $K\left(\left[ 0, \frac{\pi}{4} \right]\right) = \left[ K(0), K\left(\frac{\pi}{4}\right) \right] = [-1, 1]$

Or  $0 \in [-1, 1]$  donc il existe un unique  $c \in \left[ 0, \frac{\pi}{4} \right]$  tel que  $K(c) = 0$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} c - \cos 2c = 0 \Leftrightarrow \operatorname{tg} c = \cos 2c = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 c}{1 + \operatorname{tg}^2 c} = h(\operatorname{tg} c).$$

Or  $h$  est la fonction réciproque de  $g$  donc  $g(\operatorname{tg} c) = \operatorname{tg} c \Leftrightarrow \sqrt{\frac{1 - \operatorname{tg} c}{1 + \operatorname{tg} c}} = \operatorname{tg} c$

d'après 1) b) nécessairement  $\operatorname{tg} c = \alpha \Leftrightarrow \cos 2c = \alpha$

or  $\alpha = \cos 2\beta$  d'où  $\cos 2c = \cos 2\beta$

or  $c$  et  $\beta \in \left[ 0, \frac{\pi}{4} \right]$  donc  $C = \beta$

et par suite  $\beta$  est l'unique solution de l'équation  $\operatorname{tg} x - \cos 2x = 0$ .



1)  $Df = \mathbb{R}$ .

•  $x \mapsto 2 - x$  est continue et positive sur  $] -\infty, 0[$

donc  $x \mapsto \sqrt{2-x}$  est continue sur  $] -\infty, 0[$  et  $x \mapsto x$  continue sur  $\mathbb{R}$  d'où  $f$  est continue sur  $] -\infty, 0[$ .

•  $f(x) = 4x^3 + x^2 + x - 1$  polynôme donc continue sur  $[0, +\infty[$   
et  $\lim_{0^+} f(x) = f(0) = -1$ .

•  $\lim_{0^-} f(x) = \lim_{0^-} x - \sqrt{2-x} = -\sqrt{2} \neq f(0)$  donc  $f$  n'est pas continue en 0.

**Conclusion :**  $f$  est continue sur  $\mathbb{R}^*$ .

2)  $x \mapsto 2-x$  dérivable et strictement positive sur  $] -\infty, 0[$

alors  $x \mapsto \sqrt{2-x}$  est dérivable sur  $] -\infty, 0[$  et  $x \mapsto x$  dérivable sur  $\mathbb{R}$  d'où  $f$  est dérivable sur  $] -\infty, 0[$  et  $f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2-x}}$

sur  $[0, +\infty[$   $f$  est dérivable et  $f'(x) = 12x^2 + 2x + 1$

$f$  est discontinue en 0 donc  $f$  n'est pas dérivable en 0.

$$\begin{cases} f'(x) = 1 + \frac{1}{2\sqrt{2-x}} & \text{si } x < 0 \\ f'(x) = 12x^2 + 2x + 1 & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

3) La restriction de  $f$  à l'intervalle  $]0, +\infty[$  est continue et strictement croissante donc  $f$  réalise une bijection de  $]0, +\infty[$  sur  $f(]0, +\infty[) = ]-1, +\infty[$   
or  $0 \in ]-1, +\infty[$  donc l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in ]-1, +\infty[$  donc l'équation  $f(x) = 0$  admet une unique solution  $\alpha \in ]0, +\infty[$ .  
 $f(0) = -1$  et  $f(1) = 5$  d'où  $f(0) \cdot f(1) < 0$  donc  $\alpha \in ]0, 1[$

4) •  $g$  est continue et strictement croissante sur  $] -\infty, 0[$  donc  $g$  réalise une bijection de  $] -\infty, 0[$  sur  $g(] -\infty, 0[) = J$

$$\lim_{-\infty} f(x) = \lim_{-\infty} x - \sqrt{2-x} = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{0^-} f(x) = -\sqrt{2}$$

donc  $J = ]-\infty, -\sqrt{2}[$ .

$$\bullet \begin{cases} g^{-1}(x) = y \\ x \in ]-\infty, -\sqrt{2}[ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = g(y) \\ y \in ]-\infty, 0[ \end{cases}$$

$$g(y) = x \Leftrightarrow y - \sqrt{2-y} = x \Leftrightarrow \sqrt{2-y} = y - x$$

ou encore  $y - x \geq 0$  et  $2 - y = (y - x)^2$  soit  $y^2 - (2x - 1)y - 2 + x^2 = 0$   
et  $y - x > 0$

$$\Delta = (2x - 1)^2 - 4(-2 + x^2) = -4x + 9 > 0 \quad \text{car } x < -\sqrt{2} < 0$$

$$y' = \frac{2x-1+\sqrt{9-4x}}{2} \text{ ou } y'' = \frac{2x-1-\sqrt{9-4x}}{2}$$

Vérifions la condition  $y-x \geq 0$  :

$$\text{pour } y'' = \frac{2x-1-\sqrt{9-4x}}{2} \text{ on a } y''-x = \frac{-1-\sqrt{9-4x}}{2} < 0$$

donc  $y''$  à rejeter.

$$\text{Pour } y' = \frac{2x-1+\sqrt{9-4x}}{2} \text{ on a } y'-x = \frac{-1+\sqrt{9-4x}}{2}$$

$$\text{on a } x < -\sqrt{2} \text{ équivaut à } -4x > 4\sqrt{2}$$

$$\text{ou encore } -4x+9 > 4\sqrt{2}+9$$

$$\text{Soit } (-1)+\sqrt{-4x+9} > \sqrt{4\sqrt{2}+9}+(-1) > 0 \text{ donc } y'-x > 0$$

$$\text{finalement } g^{-1}(x) = \frac{-1+2x+\sqrt{9-4x}}{2}$$

$$5) \forall x \in ]-\pi, 0[, h(x) = f\left(\frac{1}{\sin x}\right) = f \circ U(x)$$

$$\text{on pose } U(x) = \frac{1}{\sin x} \text{ d'où } h = f \circ U$$

$U$  est dérivable sur  $]-\pi, 0[$

$f$  est dérivable sur  $]-\infty, 0[$

$$\text{et } U(x) = \frac{1}{\sin x} < 0 \text{ d'où } U(x) \in ]-\infty, 0[.$$

donc  $h$  est dérivable sur  $]-\pi, 0[$

$$h'(x) = U'(x) \cdot f'(U(x)) = \frac{-\cos x}{\sin^2 x} \cdot \left( \frac{1}{2\sqrt{2-\frac{1}{\sin x}}} + 1 \right)$$

$$\text{d'où } h'(x) = -\cotg x \left( 1 - \frac{1}{2\sqrt{2\sin^2 x - \sin x}} \right)$$

$$\nabla 5) f(x) = \sqrt{x^2 - x + 1} + x + \frac{1}{2}.$$

$x \longmapsto x^2 - x + 1$  dérivable et strictement positive sur  $\mathbb{R}$

d'où  $x \longmapsto \sqrt{x^2 - x + 1}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et on a  $x \longmapsto x + \frac{1}{2}$

dérivable sur  $\mathbb{R}$  par suite  $f$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) = \frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}} + 1$

$$f'(x) = \frac{2x-1+2\sqrt{x^2-x+1}}{2\sqrt{x^2-x+1}}$$

$f'(x) = 0$  équivaut à  $2x-1+2\sqrt{x^2-x+1} = 0$  Soit  $\sqrt{x^2-x+1} = \frac{1}{2} - x$

Ou encore  $x^2 - x + 1 = \frac{1}{4} - x + x^2$  et  $\frac{1}{2} - x \geq 0$

D'où  $1 = \frac{1}{4}$  impossible donc  $f'(x) \neq 0$ .

$f'$  est continue sur  $\mathbb{R}$  et  $f'(x) \neq 0$  donc  $f'$  garde un signe constant sur  $\mathbb{R}$

celui de  $f'(0) = \frac{1}{2} > 0$  donc  $f'(x) > 0$ .

|         |           |           |
|---------|-----------|-----------|
| $x$     | $-\infty$ | $+\infty$ |
| $f'(x)$ |           | +         |
| $f(x)$  | 1         | $+\infty$ |

$$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} x \left( \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1 + \frac{1}{2x} \right) = +\infty$$

$$\lim_{-\infty} f(x) = \lim_{-\infty} \sqrt{x^2 - x + 1} + x + \frac{1}{2} = \lim_{-\infty} \frac{(x^2 - x + 1) - \left(x + \frac{1}{2}\right)^2}{\sqrt{x^2 - x + 1} - x - \frac{1}{2}}$$

$$= \lim_{-\infty} \frac{x \left( -2 + \frac{3}{4x} \right)}{x \left( -\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} - 1 + \frac{1}{2x} \right)} = 1$$

2)  $f$  est continue et strictement croissante sur  $\mathbb{R}$  donc  $f$  réalise une bijection de  $\mathbb{R}$  sur  $]1, +\infty[ = J$ .

$\forall x \in ]1, +\infty[$  il existe qu'un seul  $y \in \mathbb{R}$  tel que

$$f(y) = x \Leftrightarrow \sqrt{y^2 - y + 1} + y + \frac{1}{2} = x \Leftrightarrow \sqrt{y^2 - y + 1} = x - y - \frac{1}{2}$$

Ou encore  $y^2 - y + 1 = \left(x - y - \frac{1}{2}\right)^2$

$$D' \text{ où } y^2 - y + 1 = \frac{1}{4} + x^2 + y^2 - 2xy - x + y$$

$$y(-2 + 2x) = x^2 - x - \frac{3}{4} \text{ donc } y = \frac{x^2 - x - \frac{3}{4}}{2x - 2}$$

$$\forall x \in ]1, +\infty[ ; f^{-1}(x) = \frac{x^2 - x - \frac{3}{4}}{2x - 2}.$$

$$3) f(0) = \frac{3}{2} \text{ et } f'(0) = \frac{1}{2} \neq 0 \text{ donc } f^{-1} \text{ est dérivable en } \frac{3}{2}$$

$$\text{et } (f^{-1})' \left( \frac{3}{2} \right) = \frac{1}{f'(0)} = 2.$$

$$4) a) x \mapsto \operatorname{tg} x \text{ est dérivable sur } \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \text{ et } f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}$$

$$\text{Alors } g \text{ est dérivable sur } \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[.$$

$$b) \forall x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ , g'(x) = (1 + \operatorname{tg}^2 x) f'(\operatorname{tg} x) > 0$$

$$\text{car } 1 + \operatorname{tg}^2 x > 0 \text{ et } \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) > 0.$$

$$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} \operatorname{tg} x = -\infty \text{ et } \lim_{-\infty} f(x) = 1 \text{ donc } \lim_{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} g(x) = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x = +\infty \text{ et } \lim_{+\infty} f(x) = +\infty \text{ donc } \lim_{\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} g(x) = +\infty$$

| x       | $-\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{2}$ |
|---------|------------------|-----------------|
| $g'(x)$ | +                |                 |
| $g(x)$  | 1                | $+\infty$       |



1) Soit  $h(x) = f(x) - (x + 1)$ ,  $h$  continue sur  $\left[-1, -\frac{2}{3}\right]$  et on a :

$$h(-1) = \sin^2\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} > 0 \text{ et } h\left(-\frac{2}{3}\right) = \sin^2\left(-\frac{\pi}{6}\right) - \frac{1}{3} = \frac{1}{4} - \frac{1}{3} < 0.$$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires on déduit que  $h(x) = 0$

admet une solution  $\alpha \in \left] -1, -\frac{2}{3} \right[$   $h(\alpha) = 0 \Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha + 1$

D'où l'équation  $f(x) = x + 1$  admet une solution  $\alpha \in \left] -1, -\frac{2}{3} \right[$ .

2)  $f$  est continue, dérivable sur  $[-1, 0]$  et  $f'(x) = \frac{\pi}{2} \sin \frac{\pi}{4} x \cdot \cos \frac{\pi}{4} x$

$$-1 \leq x \leq 0 \Leftrightarrow -\frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{4} x \leq 0 \text{ donc } \cos \frac{\pi}{4} x > 0 \text{ et } \sin \frac{\pi}{4} x \leq 0$$

Donc  $f'(x) \leq 0$  d'où :

|         |               |             |
|---------|---------------|-------------|
| $x$     | $-1$          | $0$         |
| $f'(x)$ | $-$           | $\emptyset$ |
| $f(x)$  | $\frac{1}{2}$ | $0$         |

•  $f$  est continue et strictement décroissante sur  $[-1, 0]$  et  $f(-1) = \frac{1}{2}$

et  $f(0) = 0$  alors  $f$  réalise une bijection de  $[-1, 0]$  sur  $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ .

3) a) D'après la 1°) question  $f\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{4}$  et  $-\frac{2}{3} \in [-1, 0]$

$$\text{d'où } f^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) = -\frac{2}{3}.$$

$f$  est dérivable en  $-\frac{2}{3}$  et  $f'\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{2} \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{-\pi\sqrt{3}}{8} \neq 0$

donc  $f^{-1}$  est dérivable en  $\frac{1}{4}$  et  $(f^{-1})'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{f'\left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{-8}{\pi\sqrt{3}}.$

$$\text{b) } \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{f^{-1}(y)}{y} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{f(x)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{\frac{f(x) - f(0)}{x - 0}} = -\infty$$

car  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0$  et  $f'(x) < 0$  et on a :  $f^{-1}(0) = 0$

d'où  $f^{-1}$  n'est pas dérivable en 0.

4)  $f^{-1}$  n'est pas dérivable en 0.

$f$  est dérivable sur  $[-1, 0[$  et pour tout  $x \in [-1, 0[$  on a :  $f'(x) \neq 0$

alors  $f^{-1}$  est dérivable sur  $f\left]\left[-1, 0\right[ \right] = \left]0, \frac{1}{2}\right]$  et  $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$  ;

on pose  $f^{-1}(y) = x$  d'où  $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{2}{\pi \sin \frac{\pi}{4} x \cos \frac{\pi}{4} x}$

$$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y \Leftrightarrow \sin^2 \frac{\pi}{4} x = y \Leftrightarrow \sin \frac{\pi}{4} x = \pm \sqrt{y}$$

or  $\sin \frac{\pi}{4} x < 0$  donc  $\sin \frac{\pi}{4} x = -\sqrt{y}$ .

On sait que  $\cos^2 \frac{\pi}{4} x = 1 - \sin^2 \frac{\pi}{4} x = 1 - y$

donc  $\cos \frac{\pi}{4} x = \pm \sqrt{1-y}$  or  $\cos \frac{\pi}{4} x > 0$  d'où  $\cos \frac{\pi}{4} x = \sqrt{1-y}$

par suite  $(f^{-1})'(y) = \frac{2}{-\pi \sqrt{y} \cdot \sqrt{1-y}}$  donc  $(f^{-1})'(y) = \frac{2}{-\pi \sqrt{y-y^2}}$

$$(f^{-1})'\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{2}{\pi \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{1}{16}}} = \frac{-8}{\pi \times \sqrt{3}}.$$

7/1)  $D_f = \{x \in \mathbb{R} \text{ tel que } 2 - 2x \geq 0\} = ]-\infty, 1]$

$x \mapsto 2 - 2x$  est dérivable et strictement positive sur  $] -\infty, 1[$

donc  $f$  est dérivable sur  $] -\infty, 1[$  et

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(2 - 2x)^{\frac{1}{3}}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} 2^{\frac{1}{3}} (1 - x)^{-\frac{2}{3}} = -\infty$$

donc  $f$  n'est pas dérivable en 1 d'où  $D_f = ]-\infty, 1[$ .

$$2) \forall x \in ]-\infty, 1[, f'(x) = \frac{1}{3} (2 - 2x)^{-\frac{2}{3}} \cdot (-2) = \frac{-2}{3(2 - 2x)^{\frac{2}{3}}} < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (2 - 2x)^{\frac{1}{3}} = +\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} (2 - 2x)^{\frac{1}{3}} = 0.$$

|         |           |     |
|---------|-----------|-----|
| $x$     | $-\infty$ | $1$ |
| $f'(x)$ | -         |     |
| $f(x)$  | $+\infty$ | $0$ |

3)  $f$  est continue et strictement décroissante sur  $] -\infty, 1]$

donc  $f$  réalise une bijection de  $]-\infty, 1]$  sur  $[0, +\infty[ = J$ .

4) a)  $f$  est dérivable sur  $]-\infty, 1[$  et  $f'(x) \neq 0$  alors  $g$  est dérivable sur  $]0, +\infty[$ .

$$\text{dérivabilité en } 0 : \lim_{y \rightarrow 0} \frac{g(y) - g(0)}{y} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}} = 0$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = -\infty \text{ donc } g \text{ est dérivable en } 0$$

d'où  $D_{g'} = [0, +\infty[$ .

$$\begin{aligned} \text{b) } \forall x \in ]0, +\infty[ \quad g'(x) &= \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \text{ on pose } & \left| \begin{array}{l} f^{-1}(x) = y \\ x = f(y) \\ x = (2 - 2y)^{\frac{1}{3}} \end{array} \right. \\ &= \frac{1}{f'(y)} = -\frac{3}{2}(2 - 2y)^{\frac{2}{3}} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } g'(x) = -\frac{3}{2}x^2 \text{ pour tout } x \in ]0, +\infty[$$

et on a  $g'(0) = 0$ .

$$\text{c) } \begin{cases} f^{-1}(x) = y \\ x \in [0, +\infty[ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in ]-\infty, 1] \end{cases}$$

$$f(y) = x \Leftrightarrow (2 - 2y)^{\frac{1}{3}} = x \Leftrightarrow 2 - 2y = x^3 \Leftrightarrow y = \frac{2 - x^3}{2}.$$

$$\forall x \in [0, +\infty[ \quad g(x) = 1 - \frac{1}{2}x^3.$$

$$\nabla 8 \quad 1) \quad f(x) = \frac{1}{\cos^2 \pi x}$$

$$\text{On a : } \frac{1}{2} < x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{\pi}{2} < \pi x \leq \pi \Rightarrow -1 \leq \cos \pi x < 0$$

donc  $\cos \pi x \neq 0$  sur  $\left] \frac{1}{2}, 1 \right]$ ,  $x \mapsto \cos \pi x$  dérivable et non nul sur

$\left] \frac{1}{2}, 1 \right]$  donc  $f$  est dérivable sur  $\left] \frac{1}{2}, 1 \right]$ .

$$2) \text{ Pour tout } x \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right] ; f'(x) = \frac{2 \cos \pi x \sin \pi x}{\cos^4 \pi x} = \frac{2 \sin \pi x}{\cos^3 \pi x}$$

$$x \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right] \Leftrightarrow \pi x \in \left] \frac{\pi}{2}, \pi \right] \Rightarrow \cos \pi x < 0 \text{ et } \sin \pi x \geq 0$$

d'où  $f'(x) \leq 0$

$$\bullet f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin \pi x = 0 \Leftrightarrow x = 1.$$

|         |               |   |
|---------|---------------|---|
| x       | $\frac{1}{2}$ | 1 |
| $f'(x)$ | -             | ○ |
| $f(x)$  | $+\infty$     | 1 |

$$f(1) = 1; \lim_{\left(\frac{1}{2}\right)^+} f(x) = +\infty \text{ car } \lim_{\left(\frac{1}{2}\right)^+} \cos \pi x = 0.$$

3) f est continue et strictement décroissante sur  $\left] \frac{1}{2}, 1 \right]$

donc f réalise une bijection de  $\left] \frac{1}{2}, 1 \right]$  sur  $[1, +\infty[ = J$ .

4) a) • On a :  $f(1) = 1 \Leftrightarrow g(1) = 1$

On sait que f est dérivable en 1 et  $f'(1) = 0$

$$\lim_{y \rightarrow 1} \frac{g(y) - g(1)}{y - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1}{\frac{f(x) - f(1)}{x - 1}} = -\infty \text{ donc } g \text{ n'est pas dérivable en } 1.$$

$$\bullet g\left(\frac{4}{3}\right) = x \Leftrightarrow f(x) = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{\cos^2 \pi x} = \frac{4}{3} \Leftrightarrow \cos^2 \pi x = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \cos \pi x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \cos \pi x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ or } \cos \pi x < 0$$

$$\text{donc } \cos \pi x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \pi x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \text{ ou } \pi x = -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow x = \frac{5}{6} + 2k \text{ ou } x = -\frac{5}{6} + 2k, k \in \mathbb{Z} \text{ or } x \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right] \text{ donc } x = \frac{5}{6}.$$

f est dérivable sur  $\left] \frac{1}{2}, 1 \right]$  donc f est dérivable en  $\frac{5}{6}$ .

$$f'\left(\frac{5}{6}\right) = -\frac{8}{3\sqrt{3}} \neq 0 \text{ donc } g \text{ est dérivable en } \frac{4}{3}$$

$$\text{et } g'\left(\frac{4}{3}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{5}{6}\right)} = \frac{-3\sqrt{3}}{8}$$

$$\text{b) } f \text{ est dérivable sur } \left] \frac{1}{2}, 1 \right[ \left\{ \begin{array}{l} \text{pour tout } x \in \left] \frac{1}{2}, 1 \right[ \\ f'(x) \neq 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \text{g est dérivable sur } ]1, +\infty[$$

$$\text{et } g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))} = \frac{1}{f'(y)} \text{ on pose } g(x) = y \text{ d'où } g'(x) = \frac{\cos^3 \pi y}{2 \sin \pi y}$$

$$g(x) = y \Leftrightarrow x = f(y) \Leftrightarrow x = \frac{1}{\cos^2 \pi y} \Leftrightarrow \cos^2 \pi y = \frac{1}{x}$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin^2 \pi y = \frac{1}{x} \Leftrightarrow \sin^2 \pi y = 1 - \frac{1}{x}$$

$$\text{On sait que } \cos \pi y < 0 \text{ et } \sin \pi y > 0 \text{ donc } \cos \pi y = -\sqrt{\frac{1}{x}}$$

$$\text{et } \sin \pi y = \sqrt{1 - \frac{1}{x}} \text{ d'où } g'(x) = \frac{-\frac{1}{x} \sqrt{\frac{1}{x}}}{2 \sqrt{1 - \frac{1}{x}}} = -\frac{1}{2x\sqrt{x-1}}.$$



1) a) f est continue et dérivable sur  $]0, 2[$ .

$$f'(x) = \frac{\pi}{2} \left[ 1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2} (x+1) \right] > 0 \text{ donc } f \text{ est strictement croissante sur}$$

$]0, 2[$  et continue donc f réalise une bijection de  $]0, 2[$  sur

$$f[<]0, 2[>] = \left] \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{2^-} f(x) \right[ = J$$

$$\lim_{0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} (x+1) = -\infty \text{ car } \lim_{0^+} \frac{\pi}{2} (x+1) = \left( \frac{\pi}{2} \right)^+$$

$$\lim_{2^-} f(x) = \lim_{2^-} \operatorname{tg} \frac{\pi}{2} (x+1) = +\infty \text{ car } \lim_{2^-} \frac{\pi}{2} (x+1) = \left( \frac{3\pi}{2} \right)^-$$

donc  $J = \mathbb{R}$ .

b) f est continue sur  $]0, 2[ \Rightarrow h$  est continue sur  $\mathbb{R}$ .

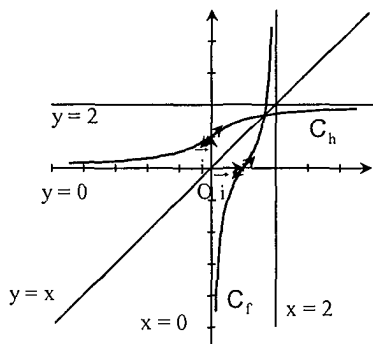
f est strictement croissante sur  $]0, 2[$

$\Rightarrow h$  est strictement croissante  
sur  $\mathbb{R}$

$$C_h = S_\Delta(C_f) ; \Delta: y = x.$$

•  $x = 0$  et  $x = 2$  sont les asymptotes de  $C_f$ .

•  $y = 0$  et  $y = 2$  sont les asymptotes de  $C_h$ .



$$2) h\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = x \Leftrightarrow f(x) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}(x+1) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}(x+1) = -\frac{\pi}{6} + k\pi \Leftrightarrow x+1 = -\frac{1}{3} + 2k$$

$$\Leftrightarrow x = -\frac{4}{3} + 2k, k \in \mathbb{Z} \text{ or } x \in ]0, 2[ \text{ donc } x = \frac{2}{3} \text{ donc } h\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{2}{3}.$$

$$f \text{ est dérivable en } \frac{2}{3} \text{ et } f'\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2} \left(\frac{2}{3} + 1\right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \neq 0$$

$$\text{donc } h \text{ est dérivable en } -\frac{\sqrt{3}}{3} \text{ et } h'\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \frac{1}{f'\left(\frac{2}{3}\right)} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6}} = \frac{3}{2\pi}.$$

$$3) a) h'(x) = \frac{1}{f'(h(x))} \text{ on pose } h(x) = y \text{ ou encore } f(y) = x$$

$$h'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{\frac{\pi}{2} \left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{\pi}{2}(y+1)\right)} \text{ et } \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}(y+1) = x$$

$$\text{d'où } h'(x) = \frac{1}{\frac{\pi}{2}(1+x^2)} = \frac{2}{\pi(1+x^2)}.$$

$$b) p: \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}; x \longmapsto h(x) + h\left(\frac{1}{x}\right).$$

$f$  est dérivable sur  $]0, 2[$  et pour tout  $x \in ]0, 2[$   $f'(x) \neq 0$

donc  $h$  est dérivable sur  $\mathbb{R}$ .

$x \longmapsto \frac{1}{x}$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  d'où  $p$  est dérivable sur  $\mathbb{R}^*$  ;

$$p'(x) = h'(x) + \left(-\frac{1}{x^2}\right)h'\left(\frac{1}{x}\right)$$

$$p'(x) = h'(x) - \frac{1}{x^2} \cdot \frac{2}{\pi \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} = \frac{2}{\pi(1+x^2)} - \frac{2}{\pi(x^2+1)} = 0$$

donc  $p(x)$  est une constante,  $p(x) = c$ .

$$p(1) = h(1) + h(1) = 2h(1).$$

$$h(1) = x \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} \frac{\pi}{2}(x+1) = 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{2}(x+1) = \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow x+1 = \frac{1}{2} + 2k \Leftrightarrow x = -\frac{1}{2} + 2k$$

Or  $x \in ]0, 2[$  donc  $x = \frac{3}{2}$  d'où  $h(1) = \frac{3}{2}$ ;  $p(x) = 2h(1) = 3$ .



1) a)  $f$  est dérivable sur  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  et  $f'(x) = \cos x \geq 0$

$$f'(x) = 0 \text{ équivaut à } x = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x = -\frac{\pi}{2}$$

donc  $f$  est continue et strictement croissante sur  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  d'où  $f$  réalise

une bijection de  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$  sur  $[-1, 1]$  par suite  $f^{-1}$  existe.

$$b) f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = x \text{ équivaut à } \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ or } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{d'où } x = \frac{\pi}{3} \text{ ainsi } f^{-1}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{\pi}{3}.$$

$$f^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{6} \text{ et } f^{-1}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = -\frac{\pi}{4}$$

$$c) h(a) = f^{-1}(a) + f^{-1}(-a)$$

$$\text{On pose } f^{-1}(a) = \alpha \text{ et } f^{-1}(-a) = \beta \text{ avec } \alpha \text{ et } \beta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{ou encore } a = \sin \alpha \text{ et } -a = \sin \beta$$

$$\text{donc } \sin \alpha = \sin(-\beta) \text{ équivaut } f(\alpha) = f(-\beta)$$

$$\text{or } f \text{ est une bijection d'où } \alpha = -\beta \text{ ou encore } \alpha + \beta = 0$$

$$\text{soit } f^{-1}(a) + f^{-1}(-a) = 0 \text{ ainsi } h(a) = 0$$

$$d) \sin(f^{-1}(x)) = f(f^{-1}(x)) = x$$

$$\cos^2[f^{-1}(x)] + \sin^2[f^{-1}(x)] = 1 \text{ or } \cos[f^{-1}(x)] \geq 0$$

$$\text{d'où } \cos[f^{-1}(x)] = \sqrt{1-x^2}.$$

2) a)  $g$  est dérivable sur  $[0, \pi]$  et  $g'(x) = -\sin x \leq 0$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = \pi$$

$g$  est continue et strictement décroissante sur  $[0, \pi]$ .

donc  $g$  réalise une bijection de  $[0, \pi]$  sur  $[-1, 1]$ .

ainsi  $g^{-1}$  existe et elle est définie sur  $[-1, 1]$ .

$$b) \cos(g^{-1}(x)) = g \circ g^{-1}(x) = x$$

on sait que  $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ ,  $x \in [0, \pi]$  alors  $\sin x \geq 0$

$$\text{par suite } \sin x = \sqrt{1 - \cos^2 x} \text{ ainsi } \sin[g^{-1}(x)] = \sqrt{1 - x^2}$$

c)  $g^{-1}(x) = \alpha$  et  $g^{-1}(-x) = \beta$  avec  $\alpha$  et  $\beta \in [0, \pi]$

$$x = g(\alpha) \text{ et } -x = g(\beta) \text{ ou encore } x = \cos \alpha \text{ et } -x = \cos \beta$$

$$\text{d'où } -\cos \alpha = \cos \beta \text{ soit } \cos \beta = \cos(\pi - \alpha)$$

$$\text{donc } \beta = \pi - \alpha \text{ par suite } g^{-1}(-x) = \pi - g^{-1}(x)$$

$$d) \cos x = a \text{ ou encore } \cos x = \cos(g^{-1}(a))$$

$$\text{équivalent à } x = g^{-1}(a) + 2k\pi \text{ ou } x = -g^{-1}(a) + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z}$$

$$3) a) \text{ On a : } -\frac{\pi}{2} \leq f^{-1}(x) \leq \frac{\pi}{2}$$

$$\text{ou encore } \frac{\pi}{2} \geq -f^{-1}(x) \geq -\frac{\pi}{2} \text{ en ajoutant } \frac{\pi}{2} \text{ on obtient : } \pi \geq \frac{\pi}{2} - f^{-1}(x) \geq 0$$

$$b) \cos\left[\frac{\pi}{2} - f^{-1}(x)\right] = \sin[f^{-1}(x)] = x.$$

c) Pour montrer que  $f^{-1}(x) + g^{-1}(x) = \frac{\pi}{2}$  il suffit de prouver que

$$\frac{\pi}{2} - f^{-1}(x) = g^{-1}(x)$$

$$g\left(\frac{\pi}{2} - f^{-1}(x)\right) = \cos\left[\frac{\pi}{2} - f^{-1}(x)\right] = x$$

$$g(g^{-1}(x)) = x \text{ D'où } g\left(\frac{\pi}{2} - f^{-1}(x)\right) = g(g^{-1}(x)) \text{ or } \frac{\pi}{2} - f^{-1}(x) \text{ et}$$

$$g^{-1}(x) \in [0, \pi] \text{ et } g \text{ est une bijection donc } \frac{\pi}{2} - f^{-1}(x) = g^{-1}(x)$$

11

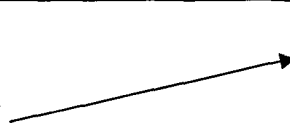
A/ 1) a)  $f$  est dérivable sur  $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ 

$$\text{et } f'(x) = 1 + 2 \sin x \cos x = 1 + \sin 2x.$$

$$\bullet f'(x) = 0 \Leftrightarrow \sin 2x = -1 \Leftrightarrow 2x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$\text{or } x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \text{ donc } x = -\frac{\pi}{4}.$$

$$\bullet \text{ On a } -1 \leq \sin 2x \leq 1 \text{ donc } \sin 2x + 1 \geq 0.$$

|         |                      |                                                                                   |                 |
|---------|----------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------|
| $x$     | $-\frac{\pi}{2}$     | $-\frac{\pi}{4}$                                                                  | $\frac{\pi}{2}$ |
| $f'(x)$ | +                    | $\emptyset$                                                                       | +               |
| $f(x)$  | $-\frac{\pi}{2} + 1$ |  |                 |

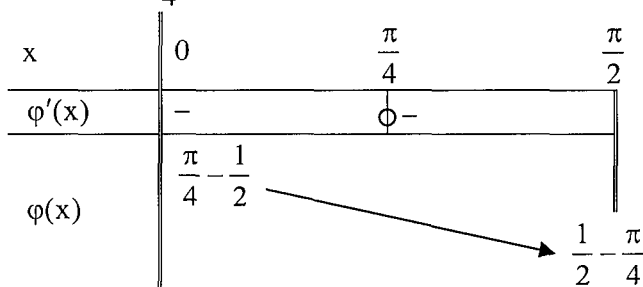
b) On remarque que les deux droites ont le même coefficient directeur 1.

$$f'(x_0) = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} 1 + \sin 2x_0 = 1 \\ x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x_0 = 0 \\ x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x_0 = k\pi, k \in \mathbb{Z} \\ x_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases} \Leftrightarrow x_0 = 0 \text{ ou } x_0 = \frac{\pi}{2} \text{ ou } x_0 = -\frac{\pi}{2}$$

en  $x_0 = 0$  le point  $O(0, 0)$  et  $T_0: y = f'(0)x + f(0)$  d'où  $T_0: y = x$ en  $x_0 = \frac{\pi}{2}$  le point  $A\left(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + 1\right)$  et  $T_{\frac{\pi}{2}}: y = f'\left(\frac{\pi}{2}\right)\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ d'où  $T_{\frac{\pi}{2}}: y = x + 1$ en  $x_0 = -\frac{\pi}{2}$  le point  $B\left(-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{2} + 1\right)$  et  $T_{-\frac{\pi}{2}}: y = x + 1$ 2) a)  $\phi$  est dérivable sur  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$  et  $\phi'(x) = -1 + \sin 2x$ sur  $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ ;  $-1 \leq \sin 2x \leq 1$  donc  $\sin 2x - 1 \leq 0$

$$\bullet \sin 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$



b)  $\phi\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$  alors Si  $x < \frac{\pi}{4}$  et  $\phi$  strictement décroissante

alors  $\phi(x) > \phi\left(\frac{\pi}{4}\right)$  donc  $\phi(x) > 0$ .

Si  $x > \frac{\pi}{4}$  et  $\phi$  strictement décroissante alors  $\phi(x) < \phi\left(\frac{\pi}{4}\right)$

d'où  $\phi(x) < 0$ .

$$c) T_{\frac{\pi}{4}} : y = f'\left(\frac{\pi}{4}\right)\left(x - \frac{\pi}{4}\right) + f\left(\frac{\pi}{4}\right)$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} \text{ et } f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \text{ d'où } T_{\frac{\pi}{4}} : y = 2x - \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$$

Position de C et  $T_{\frac{\pi}{4}}$  :

$$f(x) - y = x + \sin^2 x - 2x + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = -x + \sin^2 x + \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} = \phi(x)$$

Si  $x \in \left]0, \frac{\pi}{4}\right[$ ,  $\phi(x) > 0$  donc  $f(x) > y$  d'où C est au-dessus de  $T_{\frac{\pi}{4}}$

Si  $x \in \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$ ,  $\phi(x) < 0$  donc C est au-dessous de  $T_{\frac{\pi}{4}}$ .

B/ 1) g est dérivable sur  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$ ,  $g'(x) = 2 \cos 2x$

$$-\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{4} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq 2x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos 2x \geq 0$$

$$g'(x) = 0 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2}$$

or  $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$  donc  $x = -\frac{\pi}{4}$  ou  $x = \frac{\pi}{4}$

|         |                  |                 |
|---------|------------------|-----------------|
| $x$     | $-\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{4}$ |
| $g'(x)$ | 0                | +               |
| $g(x)$  | 0                | 2               |

$g$  est continue et strictement croissante sur  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

donc  $g$  réalise une bijection de  $\left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$  sur  $[0, 2] = J$ .

$$2) g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow G(0) = -\frac{\pi}{4} ; g\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \Leftrightarrow G(2) = \frac{\pi}{4} ;$$

$$g(0) = 1 \Leftrightarrow G(1) = 0.$$

$$3) a) g \text{ est dérivable sur } \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[ \text{ et } g'(x) \neq 0 \text{ sur } \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$$

alors  $G$  est dérivable sur  $]0, 2[$ .

Dérivable en 0 de  $G$  :

$$\lim_{y \rightarrow 0} \frac{G(y) - G(0)}{y} = \lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{4}} \frac{1}{g(x) - g\left(-\frac{\pi}{4}\right)} = +\infty \text{ car } g'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

$$\lim_{y \rightarrow 2} \frac{G(y) - G(2)}{y - 2} = +\infty \text{ car } g'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

donc  $G$  n'est pas dérivable ni en 0 ni en 2 ; d'où  $K = ]0, 2[$ .

$$b) \text{ Pour tout } x \in ]0, 2[, G'(x) = \frac{1}{g'(G(x))} = \frac{1}{g'(y)} \text{ avec } y = G(x)$$

$$G'(x) = \frac{1}{2 \cos 2y} \text{ avec } y = G(x) \Leftrightarrow g(y) = x$$

$$g(y) = x \Leftrightarrow 1 + \sin 2y = x \Leftrightarrow \sin 2y = x - 1$$

$$\text{donc } \sin^2 2y = (x - 1)^2 \text{ or } \sin^2 2y = 1 - \cos^2 2y$$

$$\text{d'où } 1 - \cos^2 2y = (x - 1)^2 \text{ par suite } \cos^2 2y = 1 - (x - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow \cos 2y = \sqrt{1 - (x - 1)^2} \text{ ou } \cos 2y = -\sqrt{1 - (x - 1)^2}$$

$$\text{or } y \in \left] -\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right[ \text{ ou encore } 2y \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[ \text{ donc } \cos 2y > 0$$

$$\text{Ainsi } \cos 2y = \sqrt{1 - (x-1)^2}$$

$$\text{Par suite } G'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 - (x-1)^2}} = \frac{1}{2\sqrt{-x^2 + 2x}} = \frac{1}{2\sqrt{x(2-x)}}$$

$$\begin{aligned} 4) \text{ a) } \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{h(x) - h(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x-1}{2} - G(x) + \frac{1}{2} + G(0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{2} - \frac{G(x) - G(0)}{x} = -\infty \end{aligned}$$

Donc  $h$  n'est pas dérivable en 0.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2} \frac{h(x) - h(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{2} - \frac{G(x) - G(2)}{x - 2} = -\infty$$

Donc  $h$  n'est pas dérivable en 2.

$$\text{b) } h(x) = \frac{x-1}{2} - G(x) \text{ est dérivable sur } ]0, 2[.$$

$$h'(x) = \frac{1}{2} - G'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\sqrt{x(2-x)}} = \frac{\sqrt{x(2-x)} - 1}{2\sqrt{x(2-x)}}$$

$$\begin{aligned} h'(x) = 0 &\Leftrightarrow \sqrt{x(2-x)} - 1 = 0 \Leftrightarrow \sqrt{x(2-x)} = 1 \Leftrightarrow x(2-x) = 1 \\ &\Leftrightarrow -x^2 + 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \end{aligned}$$

Si  $x \in ]0, 1[$ ,  $h'$  est continue et  $h'(x) \neq 0$ .

Donc  $h'$  garde un signe constant d'où le signe de  $h'(x)$  est le signe de

$$h'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{2\sqrt{\frac{3}{4}}} < 0 \text{ d'où } h'(x) < 0.$$

Si  $x \in ]1, 2[$   $h'$  est continue et  $h'(x) \neq 0$  donc  $h'$  garde un signe

$$\text{constant est celui de } h'\left(\frac{3}{2}\right) \text{ or } h'\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{2\sqrt{\frac{3}{4}}} < 0 \text{ donc } h'(x) < 0$$

|         |                                |   |                               |   |
|---------|--------------------------------|---|-------------------------------|---|
| x       | 0                              | 1 | 2                             |   |
| $h'(x)$ |                                | - | 0                             | - |
| $h(x)$  | $-\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4}$ |   | $\frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$ |   |

$$h(0) = -\frac{1}{2} - G(0) = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} \quad \text{et} \quad h(2) = \frac{1}{2} - G(2) = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}.$$

**12** 1) a)  $f$  est dérivable sur  $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ ,  $f'(x) = \frac{\pi \cos \pi x}{(1 + \sin \pi x)^2}$

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \quad \text{ou encore} \quad -\frac{\pi}{2} < \pi x < \frac{\pi}{2} \quad \text{alors} \quad \cos \pi x > 0$$

donc  $f$  est strictement croissante sur  $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  et comme elle est continue

d'où  $f$  réalise une bijection de  $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  sur  $\left[\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x), f\left(\frac{1}{2}\right)\right] = J = \left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$ .

$$\text{b) } g(-1) = x \Leftrightarrow f(x) = -1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{1 + \sin \pi x} = -1 \Leftrightarrow \sin \pi x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{or } x \in \left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right] \quad \text{donc } x = -\frac{1}{6}$$

$$g(0) = 0; \quad g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}; \quad g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad g(-1 - \sqrt{2}) = -\frac{1}{4}$$

2) a)  $f$  est dérivable sur  $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$

$$\text{et } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \quad \text{alors } g \text{ est dérivable sur } \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[ = K.$$

$$\forall x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[ \quad g'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \quad \text{on pose } f^{-1}(x) = y$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{(1 + \sin \pi y)^2}{\pi \cos \pi y} \quad \text{et } f(y) = x$$

$$f(y) = x \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{1 + \sin \pi y} = x \Leftrightarrow 1 - x = \frac{1}{1 + \sin \pi y}$$

$$\text{ou encore } 1 + \sin \pi y = \frac{1}{1 - x} \quad \text{d'où } \sin \pi y = \frac{1}{1 - x} - 1 = \frac{x}{1 - x}$$

comme  $\cos^2 \pi y + \sin^2 \pi y = 1$  alors  $\cos^2 \pi y = 1 - \left(\frac{x}{1-x}\right)^2$

or  $\pi y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ ,  $\cos \pi y \geq 0$  donc  $\cos \pi y = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{1-x}\right)^2} = \sqrt{\frac{1-2x}{(1-x)^2}}$

par suite  $g'(x) = \frac{\left(\frac{1}{1-x}\right)^2}{\pi \cdot \frac{\sqrt{1-2x}}{(1-x)}} = \frac{1}{\pi \sqrt{1-2x}(1-x)}, \forall x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$

b) On pose  $U(x) = \cos x$ ,  $h(x) = g \circ U(x)$

•  $U$  est dérivable sur  $\left]\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ ,  $g$  est dérivable sur  $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ .

•  $\forall x \in \left]\frac{\pi}{3}, \pi\right]$  on a  $-1 \leq \cos x \leq \frac{1}{2}$  d'où  $U(x) \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$

par suite  $h$  est dérivable sur  $\left]\frac{\pi}{3}, \pi\right]$

et  $h'(x) = U'(x) \cdot g'(U(x)) = -\frac{\sin x}{\pi \sqrt{1-2\cos x}(1-\cos x)}$

3) a) •  $f$  est continue sur  $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  alors  $g$  est continue sur  $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$

donc  $g$  est continue sur  $\left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$  et  $g$  est dérivable sur  $\left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$

alors il existe un réel  $\alpha \in \left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$  tel que  $g'(\alpha) = \frac{g\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = 2$

car  $g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$  et  $g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$

$\frac{1}{\pi \sqrt{1-2\alpha}(1-\alpha)} = 2$  ou encore  $\sqrt{1-2\alpha}(1-\alpha) = \frac{1}{2\pi}$

Soit  $(1-2\alpha)(1-\alpha)^2 = \frac{1}{4\pi^2}$

b)  $\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(\alpha+t) - g(\alpha-t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{g(\alpha+t) - g(\alpha)}{t} + \frac{g(\alpha-t) - g(\alpha)}{-t} \right]$

$$1) a) f \text{ est dérivable sur } \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right], f'(x) = \frac{\pi \cos \pi x}{(1 + \sin \pi x)^2}$$

$$-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} \text{ ou encore } -\frac{\pi}{2} < \pi x < \frac{\pi}{2} \text{ alors } \cos \pi x > 0$$

donc  $f$  est strictement croissante sur  $\left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$  et comme elle est continue

d'où  $f$  réalise une bijection de  $\left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$  sur

$$\left[ \lim_{x \rightarrow -\frac{1}{2}} f(x), f\left(\frac{1}{2}\right) \right] = J = \left] -\infty, \frac{1}{2} \right].$$

$$b) g(-1) = x \Leftrightarrow f(x) = -1 \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{1 + \sin \pi x} = -1 \Leftrightarrow \sin \pi x = -\frac{1}{2}$$

$$\text{or } x \in \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right] \text{ donc } x = -\frac{1}{6}$$

$$g(0) = 0; g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}; g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{ et } g(-1 - \sqrt{2}) = -\frac{1}{4}$$

$$2) a) f \text{ est dérivable sur } \left] -\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$$

$$\text{et } f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2} \text{ alors } g \text{ est dérivable sur } \left] -\infty, \frac{1}{2} \right[ = K.$$

$$\forall x \in \left] -\infty, \frac{1}{2} \right[ g'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))} \text{ on pose } f^{-1}(x) = y$$

$$g'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{(1 + \sin \pi y)^2}{\pi \cos \pi y} \text{ et } f(y) = x$$

$$f(y) = x \Leftrightarrow 1 - \frac{1}{1 + \sin \pi y} = x \Leftrightarrow 1 - x = \frac{1}{1 + \sin \pi y}$$

$$\text{ou encore } 1 + \sin \pi y = \frac{1}{1 - x} \text{ d'où } \sin \pi y = \frac{1}{1 - x} - 1 = \frac{x}{1 - x}$$

$$\text{comme } \cos^2 \pi y + \sin^2 \pi y = 1 \text{ alors } \cos^2 \pi y = 1 - \left( \frac{x}{1 - x} \right)^2$$

$$\text{On sait que } \pi y \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right], \cos \pi y \geq 0$$

$$\text{Donc } \cos \pi y = \sqrt{1 - \left(\frac{x}{1-x}\right)^2} = \sqrt{\frac{1-2x}{(1-x)^2}}$$

$$\text{Par suite } g'(x) = \frac{\left(\frac{1}{1-x}\right)^2}{\pi \cdot \frac{\sqrt{1-2x}}{(1-x)}} = \frac{1}{\pi \sqrt{1-2x}(1-x)}, \quad \forall x \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$$

b) On pose  $U(x) = \cos x$ ,  $h(x) = g \circ U(x)$

•  $U$  est dérivable sur  $\left]\frac{\pi}{3}, \pi\right]$ ,  $g$  est dérivable sur  $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$ .

•  $\forall x \in \left]\frac{\pi}{3}, \pi\right]$  on a  $-1 \leq \cos x \leq \frac{1}{2}$  d'où  $U(x) \in \left]-\infty, \frac{1}{2}\right[$

par suite  $h$  est dérivable sur  $\left]\frac{\pi}{3}, \pi\right]$

$$\text{et } h'(x) = U'(x) \cdot g'(U(x)) = -\frac{\sin x}{\pi \sqrt{1-2\cos x}(1-\cos x)}$$

3) a) •  $f$  est continue sur  $\left]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$  alors  $g$  est continue sur  $\left]-\infty, \frac{1}{2}\right]$

Donc  $g$  est continue sur  $\left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right]$ . et  $g$  est dérivable sur  $\left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[$

$$\text{Alors il existe un réel } \alpha \in \left]\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right[ \text{ tel que } g'(\alpha) = \frac{g\left(\frac{1}{2}\right) - g\left(\frac{1}{3}\right)}{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}} = 2$$

$$\text{Car } g\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \text{ et } g\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{\pi \sqrt{1-2\alpha}(1-\alpha)} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{1-2\alpha}(1-\alpha) = \frac{1}{2\pi} \Leftrightarrow (1-2\alpha)(1-\alpha)^2 = \frac{1}{4\pi^2}$$

$$\text{b) } \lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(\alpha+t) - g(\alpha-t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \left[ \frac{g(\alpha+t) - g(\alpha)}{t} + \frac{g(\alpha-t) - g(\alpha)}{-t} \right]$$

$$= g'(\alpha) + g'(\alpha) = 2g'(\alpha) = 4$$