



# Série d'exercices : Les Graphes

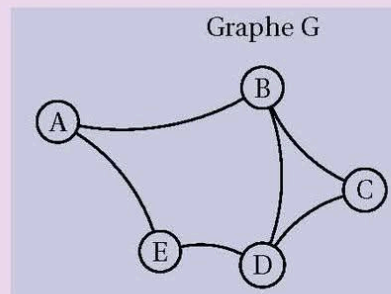
Prof :Maatallah

18 / 04 / 2023

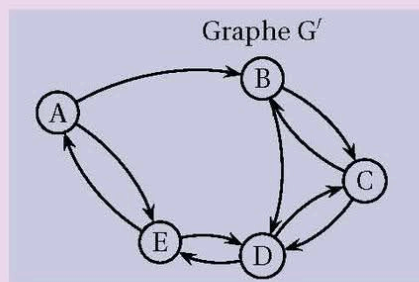
Classe : 4 Eco

## Exercice n 1

- 1 Dans un parc, il y a cinq bancs reliés entre eux par des allées.  
On modélise les bancs par les sommets A, B, C, D, E et les allées par les arêtes du graphe G ci-dessous :



- a On désire peindre les bancs de façon que deux bancs reliés par une allée soient toujours de couleurs différentes.  
Donner un encadrement du nombre minimal de couleurs nécessaires et justifier. Déterminer ce nombre.
- b Est-il possible de parcourir toutes les allées de ce parc sans passer deux fois par la même allée?
- 2 Une exposition est organisée dans le parc. La fréquentation devenant trop importante, on décide d'instaurer un plan de circulation : certaines allées deviennent à sens unique, d'autres restent à double sens. Par exemple la circulation dans l'allée située entre les bancs B et C pourra se faire de B vers C et de C vers B, alors que la circulation dans l'allée située entre les bancs A et B ne pourra se faire que de A vers B. Le graphe G' ci-dessous modélise cette nouvelle situation :



- a Donner la matrice  $M$  associée au graphe G'. (On ordonnera les sommets par ordre alphabétique).

b On donne  $M^5 =$

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 9 & 6 & 10 \\ 4 & 5 & 7 & 11 & 5 \\ 4 & 6 & 6 & 11 & 5 \\ 1 & 5 & 10 & 6 & 10 \\ 6 & 5 & 5 & 14 & 2 \end{pmatrix}$$

Combien y a-t-il de chemins de longueur 5 permettant de se rendre du sommet D au sommet B?  
Les donner tous.

- c Montrer qu'il existe un seul cycle de longueur 5 passant par le sommet A. Quel est ce cycle?  
En est-il de même pour le sommet B?

### Exercice n 2

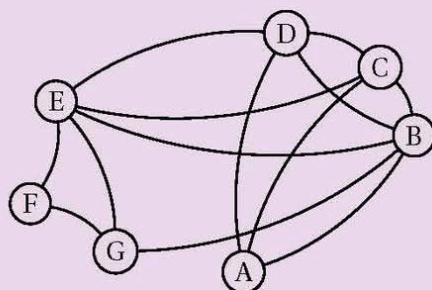
Un jardinier doit décorer un jardin privatif en répartissant 10 variétés de fleurs notées  $V_1$  à  $V_{10}$  dans différents parterres. Certaines de ces variétés ne peuvent pas être plantées ensemble pour des raisons diverses (tailles, couleurs, conditions climatiques, ...) et ces incompatibilités sont résumées dans le tableau ci-dessous (une croix indique qu'il y a incompatibilité entre deux variétés).

| Fleur    | $V_1$ | $V_2$ | $V_3$ | $V_4$ | $V_5$ | $V_6$ | $V_7$ | $V_8$ | $V_9$ | $V_{10}$ |
|----------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| $V_1$    |       |       | ×     |       |       | ×     |       |       |       | ×        |
| $V_2$    |       |       | ×     | ×     | ×     |       |       | ×     |       |          |
| $V_3$    | ×     | ×     |       | ×     |       | ×     |       |       |       |          |
| $V_4$    |       | ×     | ×     |       | ×     |       |       | ×     | ×     |          |
| $V_5$    |       | ×     |       | ×     |       |       | ×     | ×     |       |          |
| $V_6$    | ×     |       | ×     |       |       |       | ×     |       |       |          |
| $V_7$    |       |       |       |       | ×     | ×     |       |       |       |          |
| $V_8$    |       | ×     |       | ×     | ×     |       |       |       |       |          |
| $V_9$    |       |       |       | ×     |       |       |       |       |       | ×        |
| $V_{10}$ | ×     |       |       |       |       |       |       |       | ×     |          |

- 1 Représenter par son graphe  $G$  la situation
- 2
  - a Trouver un sous-graphe complet d'ordre 4 et le dessiner.
  - b Que peut-on en déduire pour la coloration du graphe  $G$ ?  
Quel est le nombre minimum de parterres que le jardinier doit décorer?
- 3
  - a Classer les sommets de  $G$  par ordre de degré décroissant.
  - b En déduire un encadrement de  $C$ , nombre chromatique de  $G$ .
- 4
  - a Procéder à la coloration du graphe  $G$ .
  - b Que peut-on en déduire pour le nombre  $C$ ? Justifier avec soin.
  - c Proposer un ensemble de parterres avec une répartition adaptée des variétés de fleurs.

### Exercice n 3

Une compagnie aérienne propose des vols directs entre certaines villes, notées A, B, C, D, E, F et G. Cela conduit au graphe  $\mathcal{G}$  suivant, dont les sommets sont les villes et les arêtes représentent les liaisons aériennes :



- 1 Le graphe  $\mathcal{G}$  est-il complet? Quel est l'ordre de  $\mathcal{G}$ ?
- 2
  - a Sur les cartes d'embarquement, la compagnie attribue à chaque aéroport une couleur, de sorte que deux aéroports liés par un vol direct aient des couleurs différentes. Proposer un coloriage adapté à cette condition.
  - b Que peut-on en déduire sur le nombre chromatique de  $\mathcal{G}$ ?



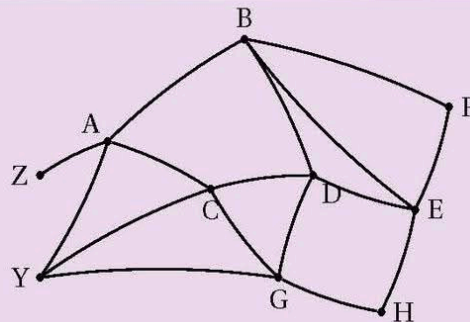
- 3 a Quelle est la nature du sous graphe formé par les sommets A, B, C et D?  
 b Quel est le nombre minimal de couleurs que la compagnie doit utiliser pour pouvoir attribuer une couleur à chaque aéroport en respectant les conditions du 2.?
- 4 a En considérant les sommets dans l'ordre alphabétique, construire la matrice  $M$  associée à  $\mathcal{G}$ .  
 b On donne :

$$M^8 = \begin{pmatrix} 6945 & 9924 & 8764 & 8764 & 9358 & 3766 & 5786 \\ 9924 & 14345 & 12636 & 12636 & 13390 & 5486 & 8310 \\ 8764 & 12636 & 11178 & 11177 & 11807 & 4829 & 7369 \\ 8764 & 12636 & 11177 & 11178 & 11807 & 4829 & 7369 \\ 9358 & 13390 & 11807 & 11807 & 12634 & 5095 & 7807 \\ 3766 & 5486 & 4829 & 4829 & 5095 & 2116 & 3181 \\ 5786 & 8310 & 7369 & 7369 & 7807 & 3181 & 4890 \end{pmatrix}$$

Combien y a-t-il de chemins de longueurs 8 qui relient B à D?

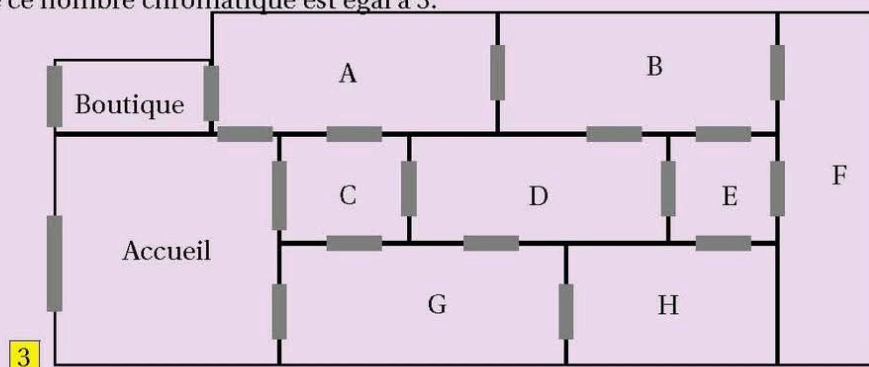
- 5 a Pourquoi est-il impossible pour un voyageur de construire un itinéraire qui utilise chaque liaison aérienne une et une seule fois?  
 b Montrer qu'il est possible de construire un tel itinéraire en ajoutant une seule liaison qui n'existe pas déjà et que l'on précisera.

#### Exercice n 4



On considère le graphe ci-dessus.

- 1 a Ce graphe est-il connexe?  
 b Déterminer le degré de chacun des sommets. On pourra donner le résultat sous forme de tableau.  
 c Justifier l'existence d'une chaîne eulérienne.
- 2 a Déterminer un encadrement du nombre chromatique de ce graphe.  
 b Montrer que ce nombre chromatique est égal à 3.



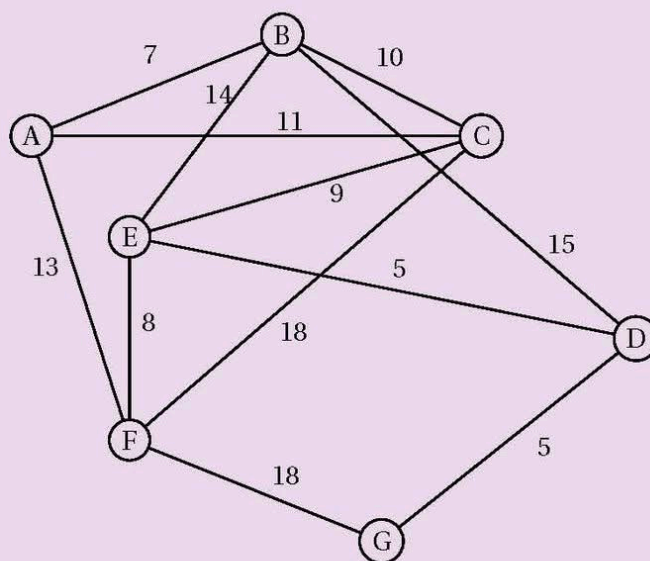
Voici le plan d'un musée : les parties grisées matérialisent les portes et les visiteurs partent de l'accueil, visitent le musée et doivent terminer leur visite la boutique.

- a Représenter la situation à l'aide d'un graphe en précisant ce que représentent arêtes et sommets.
- b Pourquoi est-il possible de trouver un circuit où les visiteurs passent une fois et une seule par toutes les portes?
- c Donner un exemple d'un tel circuit.
- d Comment colorier les salles y compris l'accueil et la boutique, en utilisant un minimum de couleurs, pour que deux salles qui communiquent par une porte aient des couleurs différentes?

### Exercice n 5

Une grande ville a mis en place un système de location de bicyclettes en libre service. Un abonné peut ainsi louer une bicyclette dans une station puis la déposer dans n'importe quelle station de son choix. la ville comporte sept stations de location nommées A, B, C, D, E, F et G.

Les stations sont reliées entre elles par une piste cyclable et les temps de parcours en minutes sont indiqués sur le graphe ci-contre.



- 1 Ali, cycliste très prudent, décide de visiter cette ville en n'empruntant que des pistes cyclables.
  - a A-t-il la possibilité d'effectuer un parcours empruntant une fois et une seule toutes les pistes cyclables. Justifier la réponse.
  - b A la fin de ce parcours, pourra-t-il rendre sa bicyclette dans la station de départ? Justifier la réponse.
- 2 On appelle  $M$  la matrice associée à ce graphe. on donne deux matrices  $N$  et  $T$  :

$$N = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 & 5 & 5 & 9 & 2 \\ 9 & 6 & 10 & 7 & 10 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 8 & 5 & 10 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 2 & 8 & 4 & 5 \\ 5 & 10 & 10 & 8 & 6 & 11 & 2 \\ 9 & 6 & 9 & 4 & 11 & 4 & 6 \\ 2 & 4 & 4 & 5 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } T = \begin{pmatrix} 4 & 9 & 8 & 4 & 5 & 9 & 1 \\ 9 & 6 & 10 & 6 & 10 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 8 & 4 & 10 & 9 & 4 \\ 5 & 7 & 5 & 2 & 8 & 4 & 5 \\ 5 & 8 & 10 & 8 & 6 & 11 & 0 \\ 9 & 6 & 9 & 4 & 11 & 4 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 5 & 0 & 6 & 0 \end{pmatrix}$$

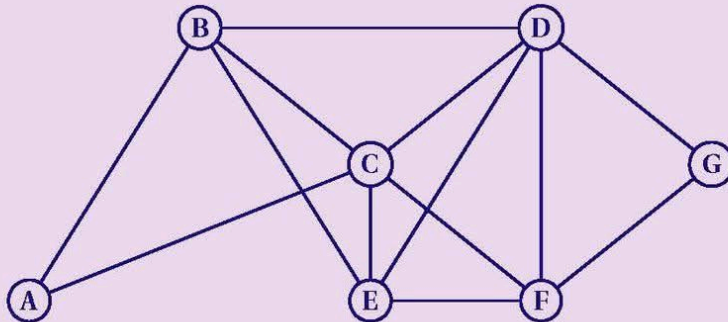
- a Une des deux matrices  $N$  ou  $T$  est la matrice  $M^3$ . Sans calcul, indiquer quelle est la matrice  $M^3$ . Justifier la réponse.
- b Ali a loué une bicyclette à la station F et l'a rendue à la station E. Au cours de son déplacement, il est passé exactement deux fois devant une station. Combien de trajets différents a-t-il pu suivre? Expliquer.



- 3 Le lendemain, il envisage de rejoindre le plus rapidement possible la station G en partant de la station A. à l'aide d'un algorithme, déterminer un tel parcours et donner le temps nécessaire pour l'effectuer.

### Exercice n 6

Dans le graphe ci-dessous, les sommets représentent différentes zones de résidence ou d'activités d'une municipalité. Une arête reliant deux de ces sommets indique l'existence d'une voie d'accès principale entre deux lieux correspondants.



- 1 Donner, sans justifier, le degré de chacun des sommets (la réponse pourra être présentée sous forme de tableau ou les sommets seront mis dans l'ordre alphabétique).
- 2 a Donner la matrice  $M$  associée au graphe (les sommets seront mis dans l'ordre alphabétique).

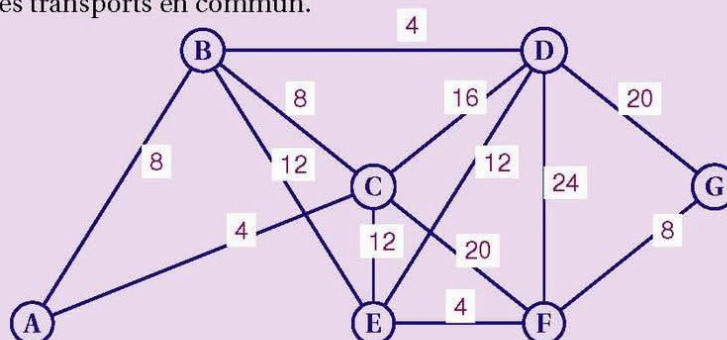
b On donne la matrice  $M^3 =$

$$\begin{pmatrix} 2 & 7 & 8 & 5 & 5 & 5 & 3 \\ 7 & 8 & 12 & 13 & 12 & 8 & 5 \\ 8 & 12 & 12 & 15 & 13 & 13 & 5 \\ 5 & 13 & 15 & 12 & 13 & 12 & 8 \\ 5 & 12 & 13 & 13 & 10 & 12 & 5 \\ 5 & 8 & 13 & 12 & 12 & 8 & 7 \\ 3 & 5 & 5 & 8 & 5 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Déterminer, en justifiant, le nombre de chemins de longueur 3 reliant A et F puis donner leur liste.

- 3 Pour sa campagne électorale, un candidat souhaite parcourir toutes les voies d'accès principales de ce quartier sans emprunter plusieurs fois la même voie. Montrer qu'un tel parcours est possible.

- 4 Dans le graphe ci-dessous, les valeurs indiquent, en minutes, les durées moyennes des trajets entre les différents lieux via les transports en commun.



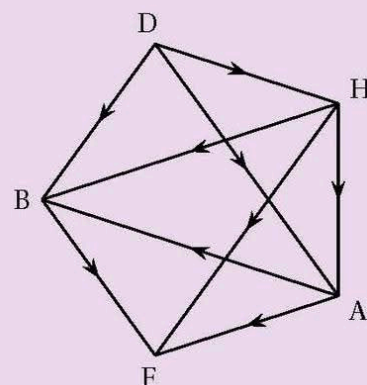
Ce même candidat se trouve à la mairie (A) quand on lui rappelle qu'il a un rendez-vous avec le responsable de l'hôpital situé en zone G.

- a En utilisant l'algorithme de Dijkstra, déterminer le chemin de durée minimale que ce candidat devra emprunter pour arriver à son rendez-vous.
- b Combien de temps faut-il prévoir pour effectuer ce trajet?

## Exercice n 7

Un parcours sportif est composé d'un banc pour abdominaux, de haies et d'anneaux. Le graphe orienté ci-contre indique les différents parcours conseillés partant de D et terminant à F.

Les sommets sont : D (départ), B (banc pour abdominaux), H (haies), A (anneaux) et F (fin du parcours). Les arêtes représentent les différents sentiers reliant les sommets.



1 Quel est l'ordre du graphe?

2 On note  $M$  la matrice d'adjacence de ce graphe où les sommets sont rangés dans l'ordre alphabétique.

a Déterminer  $M$ .

b On donne  $M^3 =$

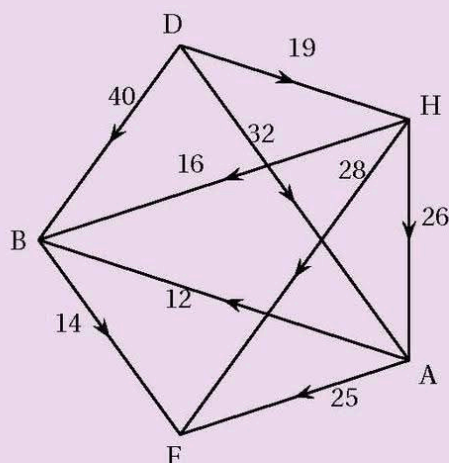
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Assia souhaite aller de D à F en faisant un parcours constitué de 3 arêtes.

Est-ce possible? Si oui, combien de parcours différents pourra-t-elle emprunter? Préciser ces trajets.

3 Assia a relevé ses temps de course en minute entre les différents sommets. Ces durées sont portées sur le graphe ci-dessous.

Lors d'un entraînement, Assia souhaite courir le moins longtemps possible en allant de D à F. Déterminer le trajet pour lequel le temps de course est minimal et préciser la durée de sa course.

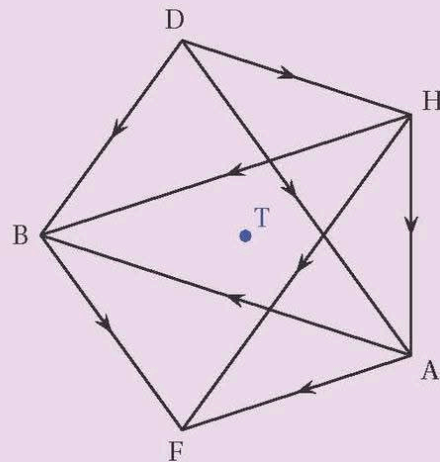


4 Le responsable souhaite ajouter une barre de traction notée T. De nouveaux sentiers sont construits et de nouveaux parcours sont possibles.

La matrice d'adjacence  $N$  associée au graphe représentant les nouveaux parcours, dans lequel les sommets sont classés en ordre alphabétique, est

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Compléter, en ajoutant les arêtes nécessaires au graphe orienté correspondant à la matrice  $N$ .



### Correction d'exercice n 1

- 1 a Soit  $\gamma$  le nombre chromatique de ce graphe.

Comme il y a un sommet de plus haut degré 3, on a  $\gamma \leq 4$ .

Mais  $\{B, C, D\}$  est un sous-graphe complet d'ordre 3, donc  $\gamma \geq 3$ .

Conclusion :  $3 \leq \gamma \leq 4$ .

Il suffit colorer A et D de la même couleur, ainsi que B et E, et enfin C d'une troisième couleur : donc  $\gamma = 3$ .

- b Le graphe contient-il une chaîne eulérienne? : il est évident que la chaîne A-B-C-D-E contient tous les sommets; pour toute paire de sommets distincts il existe une chaîne les reliant; le graphe est connexe.

Il y a deux sommets de degré impair (3) : B et D, donc d'après le théorème d'Euler il existe une chaîne eulérienne.

Exemple de parcours : D-B-C-D-E-A-B

2 a On a  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- b Le nombre de chemins de longueur 5 permettant de se rendre du sommet D au sommet B est à la ligne 5 et à la colonne 2 : il y a donc 5 chemins :

D-C-B-D-C-B; D-C-D-E-A-B; D-E-D-E-A-B; D-E-A-E-A-B;

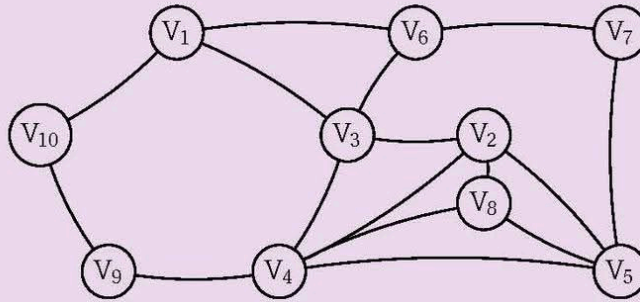


D-E-A-B-C-B.

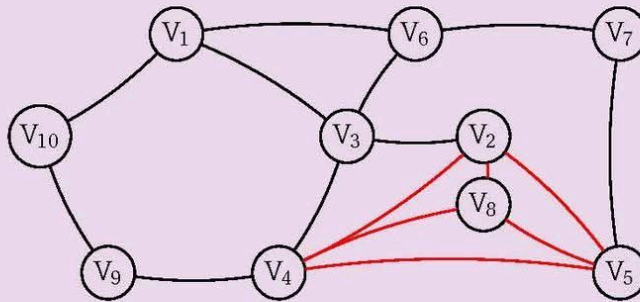
- c Il faut trouver un cycle partant de A; d'après  $M^5$  il n'existe qu'un chemin fermé de longueur 5 partant de A et arrivant en A, le chemin : A-B-C-D-E-A : c'est bien un cycle et c'est le seul.  
Le même raisonnement pour B donne 5 chemins passant par B et parmi ceux-ci B-C-D-E-A-B et B-D-E-D-C-B ont des arcs orientés distincts : il y a donc pour B deux cycles de longueur 5.

## Correction d'exercice n 2

1



- 2 a Un sous-graphe complet d'ordre 4 est  $V_2, V_4, V_5, V_8$ . Dessin :



- b Le graphe ayant un sous-graphe complet d'ordre 4, son nombre chromatique est supérieur ou égal à 4. Le jardinier doit donc décorer au moins 4 parterres.

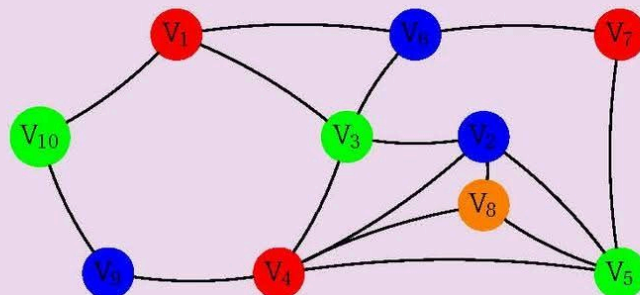
- 3 a

| sommets | $V_4$ | $V_2$ | $V_3$ | $V_5$ | $V_1$ | $V_6$ | $V_8$ | $V_7$ | $V_9$ | $V_{10}$ |
|---------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|----------|
| degré   | 5     | 4     | 4     | 4     | 3     | 3     | 3     | 2     | 2     | 2        |

- b Le plus grand degré est 5, donc  $C \leq 6$ .

ON a finalement :  $4 \leq C \leq 6$ .

- 4 a En utilisant l'algorithme « glouton » on obtient la coloration suivante du graphe :



- b On a pu utiliser un minimum de quatre couleurs, donc  $C = 4$ .

- c D'après la coloration précédente, on peut proposer les quatre parterres suivants :

$V_1, V_4, V_7$ ;  $V_2, V_6, V_9$ ;  $V_3, V_5, V_{10}$  et  $V_8$ .



### Correction d'exercice n 3

- 1 Il n'y a pas d'arête entre A et G : le graphe n'est pas complet.

L'ordre de  $\mathcal{G}$  est égal au nombre des sommets : 7.

| Sommet  | B | E | C | D | A | G | F |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|
| 2 a     | 5 | 5 | 4 | 4 | 3 | 3 | 2 |
| Couleur | R | B | V | J | B | V | R |

On prend une couleur (Rouge), on prend le premier sommet d'ordre la plus élevé (B) et on colorie avec la même couleur en descendant les ordres le ou les sommets non adjacents : ici il n'y a que E. On recommence avec E en bleu et on colorie en bleu également A, etc.

- b Il faut 4 couleurs, donc le nombre chromatique est inférieur ou égal à 4.

- 3 a Le sous graphe formé par les sommets A, B, C et D est lui complet.

- b Si  $\gamma$  est le nombre chromatique du graphe, comme celui-ci a 5 sommets, on a  $\gamma \leq 6$ .

Comme le sous graphe formé par les sommets A, B, C et D est complet, on a  $\gamma \geq 4$ , donc  $4 \leq \gamma \leq 6$ .

Mais on a vu à la question 2 que le nombre chromatique est inférieur ou égal à 4.

Finalement le nombre minimal de couleurs est 4.

4 a La matrice associée au graphe est  $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ .

- b Le nombre de chemins de longueurs 8 qui relient B à D est dans la matrice  $M^8$  le terme situé à la ligne 2 et à la colonne 4, soit 2 636.

- 5 a Il y a deux sommets de degré 5 et deux sommets de degré 3, soit quatre sommets de degré impair ; d'après le théorème d'Euler il n'existe pas de chaîne eulérienne, donc pas d'itinéraire utilisant chaque liaison une et une seule fois.

- b Tous les termes de  $M^8$  sont positifs, donc le graphe est connexe. Pour avoir une chaîne eulérienne, il suffit de rajouter une liaison de façon à n'avoir que deux sommets de degré impair. B et E sont de degré impair mais adjacents, alors que A et G de degré impair ne le sont pas : il suffit donc de rajouter une liaison entre A et G. On aura ainsi la liaison : A-B-C-D-E-F-G.

### Correction d'exercice n 4

- 1 a Le graphe est connexe car la chaîne Z-A-B-F-E-H-G-D-C-Y contient tous les sommets : il existe donc toujours un chemin reliant deux points quelconques du graphe.

- b On a le tableau suivant

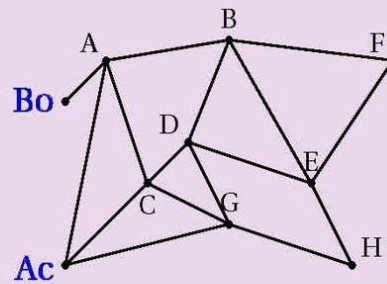
| sommets | A | B | C | D | E | F | G | H | Y | Z |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| degré   | 4 | 4 | 4 | 4 | 4 | 2 | 4 | 2 | 3 | 1 |

- c On sait qu'un graphe connexe admet une chaîne eulérienne si et seulement si le nombre de ses sommets de degré impair est 0 ou 2. Le graphe a deux sommets (Y et Z) de degré impair, donc il existe une chaîne eulérienne.

- 2 a Soit  $\gamma$  le nombre chromatique. Comme le plus haut degré est 4, on a  $\gamma \leq 5$ . De plus {A, C, Y} est un sous-graphe complet d'ordre 3, donc  $\gamma \geq 3$ . Finalement :  $3 \leq \gamma \leq 5$ .

- b On peut en fait trouver une coloration avec trois couleurs : Couleur 1 : Z, B, C; Couleur 2 : A, E, G; Couleur 3 : D, F, Y. Donc  $\gamma = 3$ .

3 a



- b On a vu qu'il existe une chaîne eulérienne, donc il est possible de passer chaque porte une seule fois.
- c Ac-C-G-Ac-A-B-F-E-B-D-G-H-E-D-C-A-Bo
- d Le nombre chromatique est égal à 3, donc 3 couleurs suffisent. Couleur 1 : Bo-B-C-H; Couleur 2 : A-E-G; Couleur 3 : Ac-D-F.

### Correction d'exercice n 5

- 1 On regarde s'il existe une chaîne eulérienne.

La chaîne A-B-C-E-D-G-F contient tous les sommets : pour toute paire de sommets différents il existe donc une chaîne démarrant à l'un et se terminant à l'autre.

Les sommets ont dans l'ordre alphabétique pour ordre : 3, 4, 4, 3, 4, 4, 2.

Dans ce graphe connexe il y a deux sommets de degré impair : il existe donc une chaîne eulérienne commençant par A ou D et finissant par D ou A.

Comme il y a deux sommets de degré impair il n'existe pas de cycle eulérien; il est donc impossible d'emprunter une seule fois chaque voie en revenant au point de départ.

- 2 a Les sommets sont rangés dans l'ordre alphabétique. ,  $M^3$  est la matrice dont les termes donnent le nombre de chaînes de longueur 3 reliant deux sommets.

Ainsi il y a deux chaînes de longueur 3 reliant E et G. Or les termes de  $T$  à la cinquième ligne septième colonne ou septième ligne cinquième colonne sont nuls, donc  $T$  ne peut être égale à  $M^3$ . C'est donc  $M^3 = N$ .

- b De F à E en passant par deux sommets exactement est un chemin de longueur 3 : le nombre de chemins est situé dans  $M^3$  à la cinquième ligne, sixième colonne, soit 11 chemins différents.

- 3 Pour trouver le chemin le plus court reliant A à G on utilise l'algorithme de Dijkstra :

| A | B        | C        | D        | E        | F        | G        | Sommet choisi |
|---|----------|----------|----------|----------|----------|----------|---------------|
| 0 | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | $\infty$ | A 0           |
|   | A 7      | A 11     | $\infty$ | $\infty$ | A 13     | $\infty$ | B 7           |
|   |          | A 11     | B 23     | B 21     | A 13     | $\infty$ | C 11          |
|   |          |          | B 23     | C 20     | A 3      | $\infty$ | F 13          |
|   |          |          | B 23     | C 20     |          | F 31     | E 20          |
|   |          |          | B 23     |          |          | F 31     | D 23          |
|   |          |          |          |          |          | D 28     | G 28          |

A partir de G marqué on remonte D, B et A.

Le chemin le plus court est A-B-D-G; il prendra 28 minutes.



## Correction d'exercice n 6

1

| sommets | A | B | C | D | E | F | G |
|---------|---|---|---|---|---|---|---|
| degres  | 2 | 4 | 5 | 5 | 4 | 4 | 2 |

2

a La matrice  $M =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b Les chemins de longueur 3 qui relient un sommet à un autre sont comptés dans  $M^3$  donc ici on calcule  $M^3_{1;6} = 5$ ; il y a donc 5 tels chemins :  $ABCF$  ;  $ABEF$  ;  $ABDF$  ;  $ACEF$  ;  $ACDF$ .

c Par le cours, vu qu'il y a exactement deux sommets de degré impair, il y a une chaîne eulérienne commençant et finissant par ces deux sommets  $C$  et  $D$  ( ce n'est pas une chaîne fermée), elle aura 13 arêtes car la somme des degrés vaut 26 :  $CDGFDEFCEBACBD$ .

3

a La matrice de routage  $R =$

$$\begin{pmatrix} & A & B & C & D & E & F & G \\ A & & 8 & 4 & & & & \\ B & 8 & & 8 & 4 & 12 & & \\ C & 4 & 8 & & 16 & 12 & 20 & \\ D & & 4 & 16 & & 12 & 24 & 20 \\ E & & 12 & 12 & 12 & & 12 & \\ F & & & 20 & 24 & 4 & & 8 \\ G & & & & 20 & & 8 & \end{pmatrix}$$

| A | B               | C              | D               | E               | F               | G               | départ |
|---|-----------------|----------------|-----------------|-----------------|-----------------|-----------------|--------|
| 0 |                 |                |                 |                 |                 |                 |        |
|   | 8 <sub>A</sub>  | 4 <sub>A</sub> | ∞               | ∞               | ∞               | ∞               | A      |
|   | 12 <sub>C</sub> |                | 20 <sub>C</sub> | 16 <sub>C</sub> | 24 <sub>C</sub> | ∞               | C      |
|   |                 |                | 12 <sub>B</sub> | 20 <sub>B</sub> |                 |                 | B      |
|   |                 |                |                 | 24 <sub>D</sub> | 36 <sub>D</sub> | 32 <sub>D</sub> | D      |
|   |                 |                |                 |                 | 20 <sub>E</sub> | 32 <sub>D</sub> | E      |
|   |                 |                |                 |                 |                 | 28 <sub>F</sub> | F      |

b Finalement le candidat mettra 28 minutes, par le trajet : **ACEFG** car  $4 + 12 + 4 + 8 = 28$ .

## Correction d'exercice n 7

1 L'ordre de ce graphe est 5 car il possède 5 sommets.

2

a La matrice d'adjacence de ce graphe est :  $M =$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

b Pour trouver le nombre de chemin de longueur 3 allant de D à F, il faut lire le coefficient  $a_{3,4}$  de la matrice  $M^3 = (a_{i,j})$  : ici c'est 3. Il existe donc trois parcours.

Ce sont :  $D \rightarrow H \rightarrow A \rightarrow F$ ;  $D \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow F$  et  $D \rightarrow H \rightarrow B \rightarrow F$ .

3

En utilisant l'algorithme de Dijkstra :

| A      | B      | D | F         | H      | Sommet Choisi |
|--------|--------|---|-----------|--------|---------------|
| 28 (D) | 40 (D) | 0 | $+\infty$ | 19 (D) | H (19)        |
| 45 (H) | 35 (H) |   | 51 (H)    |        | A (28)        |
| 28 (D) | 40 (D) |   |           |        |               |
|        | 68 (D) |   | 51 (H)    |        | B (35)        |
|        | 35 (H) |   |           |        |               |
|        |        |   | 49 (B)    |        | F (49)        |
|        |        |   | 51 (H)    |        |               |

Le chemin le plus court sera :  $D \xrightarrow{19} H \xrightarrow{16} B \xrightarrow{14} F$  et aura pour longueur 49.

4

Le graphe complété des 3 nouveaux chemins :

