

ENONCES



QCM

Pour chacune des questions suivantes indiquer la bonne réponse.

- 1) L'ensemble des solutions de l'équation $\text{Log}(x^2 - 4) = \text{Log}(2 + x)$
☐ a) $]0, +\infty[$ ☐ b) $\{-2, 3\}$ ☐ c) 3
- 2) La fonction $f(x) = x^2 \text{Log } x$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ le nombre dérivé en e est :
☐ a) $3e$ ☐ b) e^2 ☐ c) 0
- 3) La fonction définie par $f(x) = \text{Log}(2x^2 + 1)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $f'(x)$ est égale à :
☐ a) $\frac{1}{2x^2 + 1}$ ☐ b) $\frac{4x}{2x^2 + 1}$ ☐ c) $\frac{2x^2 + 1}{4x}$
- 4) L'ensemble des solutions de l'équation $\text{Log } x < 0$:
☐ a) $\emptyset$ ☐ b) $] -\infty, 0[$ ☐ c) $]0, 1[$
- 5) La limite au $+\infty$ de $f(x) = \frac{\text{Log}(4x^2 + x + 1)}{x^2}$
☐ a) 4 ☐ b) $\text{Log } 4$ ☐ c) 0



Vrai - Faux

Chacune des affirmations suivantes elle est vraie ou fausse ? justifier votre réponse.

- 1) $\text{Log } x$ est positif.
- 2) La fonction $\text{Log}|x + 3|$ est croissante sur $] -\infty, -3[$.
- 3) L'approximation affine de $\text{Log}(x + 1)$ pour x proche de 0 est x .



Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

- 1) $\text{Log } x = -2$
- 2) $\text{Log}\left(\frac{1+x}{x}\right) = 3$
- 3) $\text{Log}(x^2 - x) = \text{Log}(x + 1)$
- 4) $\text{Log}(x^2 + x - 2) = \text{Log}(x + 3)$



Simplifier les écritures.

$$A = \text{Log}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Log}\left(\frac{2}{3}\right) + \text{Log}\left(\frac{3}{4}\right) + \dots + \text{Log}\left(\frac{98}{99}\right) + \text{Log}\left(\frac{99}{100}\right)$$

$$B = \frac{\text{Log}(\sqrt{5} - 1) + \text{Log}(\sqrt{5} + 1)}{2} ; C = \text{Log}(e^3) + \text{Log}(e^2) + \text{Log}(e^2 \sqrt{e}) - \text{Log}\left[\left(\frac{1}{e}\right)^3\right]$$



Sans chercher à les calculer, comparer les intégrales suivantes :

- a) $\int_{\frac{1}{3}}^1 \text{Log } x \, dx$ et $\int_{\frac{1}{3}}^1 \text{Log} \frac{1}{x} \, dx$; b) $\int_{\frac{1}{2}}^1 x^5 (\text{Log } x)^4 \, dx$ et $\int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{x} (\text{Log } x)^4 \, dx$



Résoudre dans $\mathbb{R}$; les inéquations suivantes :

- 1) $\text{Log } x > 4$.
- 2) $\text{Log}(x + 2) + \text{Log}(x + 4) \geq \text{Log}(x + 8)$.

$$3) \operatorname{Log}(2x^2 + 3x + 1) < 0. \quad 4) \quad (\operatorname{Log} x)^2 + 3\operatorname{Log} x + 2 > 0.$$



Calculer les limites suivantes :

$$\begin{array}{lll} 1) \lim_{0^+} x \operatorname{Log} x^3 & 2) \lim_{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x^{10}}{x} & 3) \lim_{+\infty} \frac{x^2}{\operatorname{Log}(\sqrt{x})} \\ 4) \lim_{+\infty} \operatorname{Log}\left(\frac{2x-1}{x+1}\right) & 5) \lim_0 \frac{\operatorname{Log}(x+2) - \operatorname{Log} 2}{x} & 6) \lim_{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x}{x^n} \text{ et } n \in \mathbb{N} \\ 7) \lim_{+\infty} 3x - \operatorname{Log} x & 8) \lim_{+\infty} \frac{\sin(\operatorname{Log} x)}{x} & 9) \lim_{+\infty} x \operatorname{Log}\left(1 + \frac{1}{x}\right) \end{array}$$

$$10) \lim_{\left(\frac{1}{2}\right)^+} \operatorname{Log}\left(\frac{2x-1}{x+2}\right) \quad 11) \lim_{0^+} x \operatorname{Log}\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$12) \lim_{\operatorname{Log} x \rightarrow -1} \frac{\operatorname{Log} x + 2}{\operatorname{Log} x - 1} \text{ en } +\infty \text{ et en } 0 \quad 13) \lim_{1^+} \frac{2x+1}{x-1} - \operatorname{Log}(x-1)$$

$$14) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\operatorname{Log}(1+x)}{(\sqrt{x})^3} \quad 15) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\operatorname{Log}(1+x)}{\sqrt{x}} \quad 16) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Log}(1+\sin x)}{\sin 2x}.$$



Calculer $f'(x)$ en précisant sur quels intervalles ce calcul est valable :

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = x - 4 + \frac{\operatorname{Log} x}{4} & ; \quad b) f(x) = \operatorname{Log}(3x+1) - \operatorname{Log} x + \frac{1}{3x+1} \\ c) f(x) = x \operatorname{Log} x - x & ; \quad d) f(x) = \frac{1 + \operatorname{Log} x}{1 - \operatorname{Log} x} \end{array}$$

$$i) f(x) = \operatorname{Log}\left|\frac{x+1}{x}\right| \quad ; \quad j) f(x) = \operatorname{Log}(\operatorname{Log} x)$$



Déterminer la forme générale des primitives de chacune des fonctions suivantes sur l'intervalle proposé :

$$\begin{array}{ll} a) f(x) = \frac{x}{x^2-1} \text{ sur }]1, +\infty[& b) f(x) = x - 1 + \frac{\operatorname{Log} x}{x} \text{ sur } [1, +\infty[\\ c) f(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x} \text{ sur }]0, +\infty[& d) f(x) = \operatorname{tg} x \text{ sur } \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\\ e) f(x) = \frac{1+x}{1-x} \text{ sur }]1, +\infty[& f) f_n(x) = \frac{1}{x \operatorname{Log}^n x} ; n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}. \end{array}$$



Soit f la fonction de la variable réelle x définie par :
 $f(x) = \operatorname{Log} k(x)$ avec $k(x) > 0$.

1) si $k(x) = x$, montrer en appliquant la formule des accroissements finis à f

$$\text{que : } \frac{1}{1+x} < \text{Log}(1+x) - \text{Log} x < \frac{1}{x} ; \quad \forall x \in \mathbb{R}_+^*.$$

En déduire la limite de la suite S_n définie par :

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \quad \text{ou } n \in \mathbb{N}^*.$$

2) Si $k(x) = \left| x \right|^{\frac{1}{x-1}}$ avec $x \neq 0$ et $x \neq 1$.

a) Calculer la dérivée $f'(x)$. En déduire $k'(x)$.

b) Calculer $f'(-4)$ et $f'(-2)$. En déduire qu'il existe

11 A/ Soit $g : x \mapsto x^2 - 2 + \text{Log} x$ définie sur $]0, +\infty[$

1) Etudier les variations de g .

2) En déduire que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α ;

$$1,3 < \alpha < 1,4.$$

3) Déduire le signe de $g(x)$ selon x .

B/ Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x}(x^2 + 1 - \text{Log} x)$.

1) Etudier les variations de f .

2) Montrer que $f(\alpha) = 2\alpha - \frac{1}{\alpha}$, puis donner un encadrement de $f(\alpha)$.

3) a) Montrer que la courbe de f admet deux asymptotes.

b) Préciser la position de C la courbe de f par rapport à $D : y = x$.

c) Construire C en précisant la tangente à C en son point de rencontre avec son asymptote.

4) Soit h la restriction de f à $[e, +\infty[$.

a) Montrer que h admet une fonction réciproque h^{-1} définie sur $[e, +\infty[$.

b) Ecrire l'équation de Δ' , la demi tangente à $C_{h^{-1}}$ au point d'abscisse e .

c) Représenter $C_{h^{-1}}$ et tracer Δ' .

12 1) Soit g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = 1 + x - x \text{Log} x$.

a) Etudier les variations de g et dresser son tableau de variation.

b) Prouver que l'équation $g(x) = 0$ admet une solution unique β dans $]0, +\infty[$; vérifier que $3 < \beta < 4$.

c) Déterminer alors le signe de $g(x)$.

2) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = 2 + \frac{\text{Log} x}{x+1}$.

- a) Etudier les limites de f aux bornes de son domaine de définition.
- b) Exprimer la fonction dérivée de f à l'aide de g en déduire les variations de f .
- c) Soit D la droite d'équation $y = 2$, déterminer les coordonnées du point A d'intersection de D et de C et la position de C et D .
- d) Tracer C et D .
- 3) Soit h définie sur $[1, +\infty[$ par $h(x) = f(x) - x$.
- a) Montrer que h est strictement décroissante sur $] \beta, +\infty [$.
- b) Etablir que pour tout $x \in [1, \beta]$, $0 \leq f'(x) \leq \frac{g(1)}{4}$.
- c) En déduire les variations de h sur $[1, \beta]$.
- 4) Prouver que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α sur $[1, +\infty[$, montrer que $2 < \alpha < 3$.
- 5) Prouver que pour tout $x \in [2, 3]$, $f(x) \in [2, 3]$
- 13** 1) Soit la fonction $g(x) = \frac{-2}{x+2} + \text{Log}\left(\frac{x+2}{x}\right)$ avec $x \in]0, +\infty[$.
Etudier les variations de g . En déduire que pour tout $x \in]0, +\infty[$ on a : $g(x) > 0$.
- 2) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par
$$\begin{cases} f(x) = x \text{Log}\left(\frac{x+2}{x}\right) & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 0 \end{cases}$$
- a) Etudier la continuité et la dérivabilité de f en 0.
- b) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ (on pourra poser $X = \frac{2}{x}$).
- 3) a) Dresser le tableau de variation de f .
b) Tracer C la courbe de f dans un repère orthonormé.
- 4) Soit $h(x) = \frac{x^2}{2} \text{Log}\left(\frac{x+2}{x}\right)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.
- a) Calculer $h'(x)$.
- b) En déduire la primitive de f sur $[0, +\infty[$, qui s'annule en 0.
- 5) Soit k un réel strictement négatif, soit f_k la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f_k(x) = f(x) + kx$.
- a) En utilisant les variations de g sur $]0, +\infty[$, montrer que l'équation $f'_k(x) = 0$ admet dans $]0, +\infty[$ une unique solution notée α_k .
- b) Dresser le tableau de variation de f_k sur $[0, +\infty[$ et déduire le signe

de $f_k(\alpha_k)$.

14 Soit f définie par $f(x) = x^2 \sqrt{|\text{Log } x|}$.

- 1) Déterminer le domaine de définition de f .
- 2) Etudier la dérivabilité de f en 1.
- 3) a) Résoudre l'inéquation dans $]0, +\infty[$; $4 \text{Log } x + 1 \geq 0$.
b) Déterminer $f'(x)$.
- 4) Déterminer le tableau de variation de f .
- 5) Etudier les Branches infinies de f et construire sa courbe dans un repère orthonormé (Unité 4 cm).

15 Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. On considère la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\text{Log}(1+x)}{x}$ pour $x > 0$ et $f(0) = 1$.

La fonction h définie sur $[0, +\infty[$ par $h(x) = \frac{x}{x+1} - \text{Log}(1+x)$ et la

fonction φ définie sur $[0, +\infty[$ par $\varphi(x) = f(x) - x$

- 1) a) Montrer que f est continue sur $[0, +\infty[$.
b) Etudier le sens de variation de g définie sur $\mathbb{R}_+$;

$$\text{par } g(x) = \text{Log}(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right).$$

Calculer $g(0)$ et en déduire que sur $\mathbb{R}_+$, on a :

$$\text{Log}(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

c) Par une étude analogue, montrer que si $x \geq 0$: $\text{Log}(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}$.

d) Etablir que quelque soit $x \in \mathbb{R}_+$, on a : $-\frac{1}{2} \leq \frac{\text{Log}(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$.

En déduire que f est dérivable à droite en 0 et que $f'_d(0) = -\frac{1}{2}$.

- 2) a) Etudier le sens de variation de h et en déduire le signe de h sur $\mathbb{R}_+$.
b) Montrer que sur $]0, +\infty[$, $f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}$ et dresser le tableau de variation de f .

- 3) Etudier les variations de φ et construire sa courbe dans $(O, \vec{i}, \vec{j})$ et la demi-tangente au point d'abscisse 0.

4) a) Démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution sur

$$]0, +\infty[\text{ que l'on notera } \alpha. \text{ Montrer que } \alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

b) Montrer que si $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ alors $f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$.

c) Montrer que si $x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ alors $h(1) \leq h(x) \leq h\left(\frac{1}{2}\right)$ et que $|h(x)| \leq \frac{1}{5}$.

d) En déduire que sur $\left[\frac{1}{2}, 1\right]$ on a : $|f'(x)| \leq \frac{4}{5}$.

5) Soit la suite U définie sur $\mathbb{N}$ par $U_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$;

$$U_{n+1} = f(U_n).$$

a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $|U_{n+1} - U_n| \leq \frac{4}{5} |U_n - U_{n-1}|$.

En déduire que $\lim_{n \rightarrow +\infty} |U_{n+1} - U_n| = 0$.

b) Montrer par récurrence que la suite V définie par $V_p = U_{2p}$ est décroissante et que la suite W définie par $W_p = U_{2p+1}$ est croissante.

c) Montrer que la suite V est convergente et déduire que la suite W est convergente et que les deux suites V et W ont la même limite.

16 Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on pose $U_n = \int_0^1 x^n \text{Log}(1+x) dx$ et

$$V_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^n}{n+1}$$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $0 \leq U_n \leq \frac{\text{Log } 2}{n+1}$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

b) Calculer $\int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx$ puis calculer U_1 .

2) On pose $S_n(x) = 1 - x + x^2 - \dots + (-1)^n x^n$ avec $x \in [0, 1]$ et $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $S_n(x) = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$

$$\text{et que } V_n = \text{Log } 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx.$$

b) En déduire que $|V_n - \text{Log } 2| \leq \frac{1}{n+2}$ puis calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$.

3) a) En utilisant une intégration par parties pour U_n montrer que :

$$U_n = \frac{\text{Log } 2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1} [\text{Log } 2 - V_n].$$

- b) En déduire que la suite (ω_n) définie par $\omega_n = (n+1)U_n$ est convergente et calculer sa limite.

17 1) Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\text{Log } x}{x^2}$

Etudier le sens de variation de f .

- 2) a) Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ on a :

$$\frac{\text{Log}(k+1)}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\text{Log } x}{x^2} dx \leq \frac{\text{Log } k}{k^2}$$

- b) Par une intégration par parties, calculer $\int_a^b \frac{\text{Log } x}{x^2} dx$.

- 3) Pour tout $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$ on pose $S_n = \frac{\text{Log } 2}{2^2} + \frac{\text{Log } 3}{3^2} + \dots + \frac{\text{Log } n}{n^2}$

- a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^* - \{1\}$, on a :

$$S_n - \frac{\text{Log } 2}{2^2} \leq \int_2^n \frac{\text{Log } x}{x^2} dx \leq S_n - \frac{\text{Log } n}{n^2}$$

- b) En déduire que :

$$\frac{1 + \text{Log } 2}{2} - \frac{n + (n-1)\text{Log } n}{n^2} \leq S_n \leq \frac{2 + 3\text{Log } 2}{4} - \frac{1 + \text{Log } n}{n}.$$

- c) Donner un encadrement de S_{100} à 10^{-2} près.

18 Soit f la fonction définie sur $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ par :

$$f(x) = \int_x^{2x} \frac{1}{\text{Log } t} dt \quad \text{si } x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[\quad \text{et } f(0) = 0.$$

- 1) Justifier l'existence de $f(x)$ pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$.

- 2) Montrer que f est dérivable sur $\left[0, \frac{1}{2}\right[$ et déterminer $f'(x)$ pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$.

- 3) En utilisant le théorème de la moyenne, montrer que pour tout $x \in \left[0, \frac{1}{2}\right[$

on a : $\frac{x}{\text{Log} 2 x} \leq f(x) \leq \frac{x}{\text{Log} x}$.

4) a) Montrer que f est continue et dérivable en 0.

b) Donner le sens de variation de f .

19 Soient les suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}^*$ par :

$$U_1 = 1 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, U_n = U_{n-1} + \frac{1}{n} \text{ pour } n \geq 2 \text{ et } V_n = U_n - \text{Log } n$$

1) a) Calculer U_2 , U_3 et U_4 .

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$.

2) a) Montrer que $\forall k \in \mathbb{N}^*, \frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$

b) En déduire que pour tout entier $n \geq 2$

$$\text{On a } U_{n-1} - 1 \leq \text{Log } n \leq U_n - \frac{1}{n} \text{ et } 0 \leq V_n \leq 1$$

3) a) Montrer que V_n converge vers une limite δ (on ne cherchera pas à calculer δ).

b) Quelle est la limite de (U_n) ?

20 1) Représenter graphiquement la fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ sur $]0, +\infty[$.

2) Subdiviser l'intervalle $[1, 2]$ en n intervalle de longueur $\frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}^*$).

En déduire un encadrement de $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$ par les sommes

$$U_n = \frac{1}{n} \cdot \left[1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{1 + \frac{n-1}{n}} \right]$$

$$\text{Et } V_n = \frac{1}{n} \cdot \left[\frac{1}{1 + \frac{1}{n}} + \frac{1}{1 + \frac{2}{n}} + \dots + \frac{1}{1 + \frac{n-1}{n}} + \frac{1}{2} \right]$$

3) a) Calculer $\int_1^2 \frac{1}{x} dx$.

b) Obtenir des encadrements de $\text{Log } 2$ en calculant U_5 et V_5 puis U_{10} et V_{10} .

21 On considère la fonction numérique f définie sur $]0, +\infty[$

par $f(x) = x + \frac{\text{Log } x}{x}$.

Soit (ζ) sa courbe représentative dans le plan $\mathcal{P}$ muni du repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 3 cm.

1) Calculer à l'aide d'une intégration par parties $I = \int_1^e \text{Log } x \, dx$.

2) Soit H la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$

par $H(x) = -\frac{1}{x}(\text{Log } x)^2 - \frac{2}{x}\text{Log } x - \frac{2}{x}$.

Démontrer que sur l'intervalle considéré, la fonction H est une primitive de la fonction h définie par $h(x) = \frac{(\text{Log } x)^2}{x^2}$.

On considère l'espace rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Le solide S est engendré par la rotation autour de l'axe $(O, \vec{i})$ de la surface délimitée par la courbe (ζ) , et les droites d'équations respectives $x = 1$ et $x = e$, et l'axe $(x'x)$.

Calculer le volume V du solide S .

22 On pose pour $x > 0$, $f(x) = \frac{(\text{Log } x)^2}{x}$.

1) Déterminer les limites de f en $+\infty$ et 0 .

2) Déterminer le sens de variation de f sur $]0, +\infty[$.

3) Tracer la représentation graphique (ζ) de f dans le plan.

4) On pose pour $p \geq 1$, $I_p = \int_1^{e^2} \frac{(\text{Log } x)^p}{x^2} dx$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, Calculer : $I_1 = \int_1^{e^2} \left(\frac{\text{Log } x}{x^2}\right) dx$.

b) Montrer que, pour tout $p \geq 1$: $I_{p+1} = -\frac{2^{p+1}}{e^2} + (p+1)I_p$.

c) En déduire I_2 , I_3 et I_4 .

d) On fait tourner autour de l'axe des abscisses l'arc de courbe constitué des points de (ζ) d'abscisses comprises entre 1 et e^2 . Le point M de (ζ) d'abscisses x , décrit alors un cercle de rayon $f(x)$.

Calculer le volume du solide ainsi engendré, en unités de volume.

CORRIGES



1) La réponse est c : car $\text{Log}(x^2 - 4) = \text{Log}(2 + x)$ définie que pour $x > 2$
 $\text{Log}(x^2 - 4) = \text{Log}(2 + x) \Leftrightarrow (x + 2)(x - 2) = (x + 2) \Leftrightarrow (x + 2)(x - 3) = 0$
 $\Leftrightarrow x = -2$ ou $x = 3$ or $x > 2$ d'où $S_{\mathbb{R}} = \{3\}$

2) La réponse est a : $f'(x) = 2x \text{Log} x + x$
 $f'(e) = 2e + e = 3e$

3) La réponse est b : $f'(x) = \frac{(2x^2 + 1)'}{2x^2 + 1} = \frac{4x}{2x^2 + 1}$.

4) La réponse est c : $\text{Log} x < 0 \Leftrightarrow x < e^0 = 1$ or $x > 0$ d'où $S_{\mathbb{R}} =]0, 1[$

5) La réponse est c : $f(x) = \frac{\text{Log}(4x^2 + x + 1)}{x^2} = \frac{\text{Log}\left[x^2\left(4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)\right]}{x^2}$
 $= \frac{\text{Log} x^2 + \text{Log}\left(4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2}$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log} x^2}{x^2} + \frac{\text{Log}\left(4 + \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}\right)}{x^2} = 0$$



1) Faux : $\text{Log} \frac{1}{2} = -0,69$.

2) Faux : car $f'(x) = \frac{1}{x+3} < 0$ si $x < -3$.

3) Vrai : on a $(\text{Log}(1 + x))' = \frac{1}{1+x}$ alors l'approximation affine de f voisin de

$$0 \text{ est } f'(0)x + f(0) = 1 \times x \text{ donc } \text{Log}(1 + x) \approx x.$$



1) $\text{Log} x = -2 \Leftrightarrow \text{Log} x = -2 \text{Log} e \Leftrightarrow \text{Log} x = \text{Log} e^{-2}$
 $S_{\mathbb{R}} = \{e^{-2}\}$.

2) $\text{Log}\left(\frac{1+x}{x}\right) = 3$ définie que pour $x \in \mathbb{R} - [-1, 0]$

$$\text{Log}\left(\frac{1+x}{x}\right) = 3 \text{Log} e = \text{Log} e^3$$

$$\frac{1+x}{x} = e^3 \Leftrightarrow 1 + x = xe^3$$

$$x = \frac{1}{e^3 - 1} > 0 \quad \text{d'où} \quad S_{\text{IR}} = \left\{ \frac{1}{e^3 - 1} \right\}$$

$$3) \text{Log}(x^2 - x) = \text{Log}(x + 1) \text{ définie que pour } \begin{cases} x > -1 \\ x(x-1) > 0 \end{cases}$$

$$\text{sig } x \in]-1, +\infty[\setminus [0, 1]$$

$$x^2 - x = x + 1$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \quad \text{or} \quad \Delta' = 2$$

$$x' = 1 - \sqrt{2} \quad \text{et} \quad x'' = 1 + \sqrt{2}$$

$$S_{\text{IR}} = \{1 - \sqrt{2}, 1 + \sqrt{2}\}$$

$$\begin{aligned} \nabla 4) A &= \text{Log}\left(\frac{1}{2}\right) + \text{Log}\left(\frac{2}{3}\right) + \dots + \text{Log}\left(\frac{98}{99}\right) + \text{Log}\left(\frac{99}{100}\right) \\ &= \text{Log}\left(\frac{1}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{\cancel{3}} \times \dots \times \frac{\cancel{98}}{99} \times \frac{99}{100}\right) = \text{Log}\left(\frac{1}{100}\right) = -2\text{Log} 10 \end{aligned}$$

$$B = \frac{\text{Log}\left[(\sqrt{5}-1)(\sqrt{5}+1)\right]}{2} = \frac{\text{Log} 4}{2} = \frac{2\text{Log} 2}{2} = \text{Log} 2$$

$$\begin{aligned} C &= \text{Log}(e^3) + \text{Log}(e^{-2}) + \text{Log}(e^2 \sqrt{e}) - \text{Log}\left(\frac{1}{e}\right)^3 \\ &= 3\text{Log} e - 2\text{Log} e + \text{Log} e^2 + \text{Log} \sqrt{e} + 3\text{Log} e = 6 + \frac{1}{2} = \frac{13}{2} \end{aligned}$$

$$\nabla 5) a) \frac{1}{3} \leq x \leq 1 \text{ alors } \text{Log} x < 0$$

$$3 \geq \frac{1}{x} \geq 1 \text{ alors } \text{Log} \frac{1}{x} > 0$$

$$\text{d'où } \forall x \in \left[\frac{1}{3}, 1\right] \text{ on a } \text{Log} x < \text{Log} \frac{1}{x}$$

$$\text{par suite } \int_{\frac{1}{3}}^1 \text{Log} x \, dx < \int_{\frac{1}{3}}^1 \text{Log} \frac{1}{x} \, dx.$$

$$b) \text{ Pour tout } x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right] \text{ on a } x^5 \leq \sqrt{x} \text{ et comme } (\text{Log} x)^4 \geq 0$$

$$\text{d'où } x^5 (\text{Log} x)^4 \leq \sqrt{x} (\text{Log} x)^4$$

$$\text{donc } \int_{\frac{1}{2}}^1 x^5 (\text{Log} x)^4 \, dx \leq \int_{\frac{1}{2}}^1 \sqrt{x} (\text{Log} x)^4 \, dx$$

$$\nabla 6) 1) \text{ L'inéquation a un sens si } x > 0$$

$$\text{Log} x > 4 \Leftrightarrow \text{Log} x > 4\text{Log} e \Leftrightarrow \text{Log} x > \text{Log} e^4 \Leftrightarrow x > e^4$$

d'où $S =]e^4, +\infty[$.

- 2) L'inéquation a un sens si $x+2 > 0$ et $x+4 > 0$ et $x+8 > 0$
 ou encore : $x > -2$ et $x > -4$ et $x > -8$ donc définie sur $]-2, +\infty[$
 dans ces conditions :

$\text{Log}(x+2) + \text{Log}(x+4) \geq \text{Log}(x+8)$ équivaut successivement à :

$\text{Log}((x+2)(x+4)) \geq \text{Log}(x+8)$

$(x+2)(x+4) \geq x+8 \Leftrightarrow x^2 + 5x \geq 0 \Leftrightarrow x(x+5) \geq 0$.

x	$-\infty$	-5	0	$+\infty$	
$x(x+5)$	+	$\emptyset$	-	$\emptyset$	+

$x(x+5) \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -5] \cup [0, +\infty[$ or $x \in]-2, +\infty[$

d'où $S = [0, +\infty[$.

- 3) Il faut que $2x^2 + 3x + 1 > 0$

$2x^2 + 3x + 1 = 0$ admet pour racines -1 et $-\frac{1}{2}$

donc l'expression est strictement positive « à l'extérieur » des racines ;

d'où $D =]-\infty, -1[\cup]-\frac{1}{2}, +\infty[$

L'inéquation est donc équivalente successivement à :

$\text{Log}(2x^2 + 3x + 1) < \text{Log} 1$

$2x^2 + 3x + 1 < 1$ ou encore $2x^2 + 3x < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{3}{2}$	0	$+\infty$	
$2x^2 + 3x$	+	$\emptyset$	-	$\emptyset$	+

* $2x^2 + 3x < 0 \Leftrightarrow x \in]-\frac{3}{2}, 0[$ or $x \in D$

d'où $S =]-\frac{1}{2}, 0[\cup]-\frac{3}{2}, -1[$

- 4) Ici $D =]0, +\infty[$; car l'inéquation ne comporte que des « $\text{Log } x$ ».

Nous allons procéder par changement de variable en posant : $X = \text{Log } x$.

Donc : $(\text{Log } x)^2 + 3\text{Log } x + 2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Log } x = X \\ X^2 + 3X + 2 > 0 \end{cases}$

$X^2 + 3X + 2 = 0$ admet deux racines : -1 et -2

Alors $X^2 + 3X + 2 > 0 \Leftrightarrow X \in]-\infty, -2[\cup]-1, +\infty[$

L'inéquation est équivalente à : $\begin{cases} x > 0 \\ \text{Log } x < -2 \text{ ou } \text{Log } x > -1 \end{cases}$

ou encore : $\begin{cases} x > 0 \\ \text{Log } x < -2 \text{Log } e \text{ ou } \text{Log } x > -\text{Log } e \end{cases}$

c'est-à-dire $\begin{cases} x > 0 \\ \text{Log } x < \text{Log} \left(\frac{1}{e^2} \right) \text{ ou } \text{Log } x > \text{Log } \frac{1}{e} \end{cases}$

ou encore $\begin{cases} x > 0 \\ x < \frac{1}{e^2} \text{ ou } x > \frac{1}{e} \end{cases}$ finalement $S =]0, \frac{1}{e^2} [\cup] \frac{1}{e}, +\infty [$.

7 1) $\lim_{0^+} x \text{Log } x^3 = \lim_{0^+} 3x \text{Log } x = 0$.

2) $\lim_{+\infty} \frac{\text{Log } x^{10}}{x} = \lim_{+\infty} \frac{10 \text{Log } x}{x} = 0$.

3) $\lim_{+\infty} \frac{x^2}{\text{Log } \sqrt{x}} = \lim_{+\infty} \frac{x^2}{\frac{1}{2} \text{Log } x} = \lim_{+\infty} \frac{2x^2}{\text{Log } x} = \lim_{+\infty} \frac{2}{\frac{\text{Log } x}{x} \cdot \frac{1}{x}} = +\infty$.

4) On sait que $\lim_{+\infty} \frac{2x-1}{x+1} = 2$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \text{Log} \left(\frac{2x-1}{x+1} \right) = \text{Log } 2$.

5) $\lim_0 \frac{\text{Log}(x+2) - \text{Log } 2}{x}$ représente le nombre dérivé de $f(x) = \text{Log}(x+2)$

en $x_0 = 0$, comme $f'(x) = \frac{1}{x+2}$ alors $f'(0) = \frac{1}{2}$

d'où $\lim_0 \frac{\text{Log}(x+2) - \text{Log } 2}{x} = \frac{1}{2}$.

6) $n = 1$ on a $\lim_{+\infty} \frac{\text{Log } x}{x} = 0$

$n > 1$; $\lim_{+\infty} \frac{\text{Log } x}{x^n} = \lim_{+\infty} \frac{\text{Log } x}{x} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} = 0$

7) $\lim_{+\infty} 3x - \text{Log } x = \lim_{+\infty} x \left(3 - \frac{\text{Log } x}{x} \right) = +\infty$.

8) Pour tout $x > 0$ on a $0 \leq |\sin(\text{Log } x)| \leq 1$ donc $0 \leq \left| \frac{\sin(\text{Log } x)}{x} \right| \leq \frac{1}{x}$

Comme $\lim_{+\infty} \frac{1}{x} = 0$ donc $\lim_{+\infty} \left| \frac{\sin(\text{Log } x)}{x} \right| = 0$ d'où $\lim_{+\infty} \frac{\sin(\text{Log } x)}{x} = 0$

9) On pose $X = \frac{1}{x}$, il suffit alors de chercher la limite quand X tend vers 0

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \operatorname{Log} \left(1 + \frac{1}{x} \right) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{1}{X} \operatorname{Log} (1 + X) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\operatorname{Log} (1 + X)}{X} = 1$$

$$10) \lim_{\left(\frac{1}{2}\right)^+} \frac{2x-1}{x+2} = 0^+ \text{ d'où } \lim_{\left(\frac{1}{2}\right)^+} \operatorname{Log} \left(\frac{2x-1}{x+2} \right) = -\infty.$$

$$11) \lim_{0^+} x \operatorname{Log} \left(\frac{x+1}{x} \right) = \lim_{0^+} x \operatorname{Log} (x+1) - x \operatorname{Log} x$$

$$\text{Or } \lim_{0^+} \operatorname{Log} (x+1) = \operatorname{Log} 1 = 0 \text{ donc } \lim_{0^+} x \operatorname{Log} (x+1) = 0$$

$$\text{et } \lim_{0^+} x \operatorname{Log} x = 0 \text{ d'où } \lim_{0^+} x \operatorname{Log} \left(\frac{x+1}{x} \right) = 0.$$

$$12) * \lim_{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x + 2}{\operatorname{Log} x - 1} = \lim_{+\infty} \frac{\operatorname{Log} x \left(1 + \frac{2}{\operatorname{Log} x} \right)}{\operatorname{Log} x \left(1 - \frac{1}{\operatorname{Log} x} \right)} = \lim_{+\infty} \frac{1 + \frac{2}{\operatorname{Log} x}}{1 - \frac{1}{\operatorname{Log} x}} = 1$$

$$\text{Car } \lim_{+\infty} \frac{1}{\operatorname{Log} x} = 0.$$

$$* \lim_{0^+} \frac{\operatorname{Log} x + 2}{\operatorname{Log} x - 1} = 1 \text{ en utilisant la même méthode.}$$

$$13) \frac{2x+1}{x-1} - \operatorname{Log} (x-1) = \frac{2x+1 - (x-1) \operatorname{Log} (x-1)}{x-1}$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{1^+} x-1 = 0^+ \\ \lim_{0^+} t \operatorname{Log} t = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \lim_{1^+} (x-1) \operatorname{Log} (x-1) = 0$$

$$\text{d'où } \lim_{1^+} 2x+1 - (x-1) \operatorname{Log} (x-1) = 3$$

$$\text{et } \lim_{1^+} x-1 = 0^+ \text{ donc } \lim_{1^+} \frac{2x+1 - (x-1) \operatorname{Log} (x-1)}{x-1} = +\infty.$$

$$14) \lim_{0^+} \frac{\operatorname{Log}(1+x)}{(\sqrt{x})^3} = \lim_{0^+} \frac{\operatorname{Log}(1+x)}{x\sqrt{x}}$$

$$= \lim_{0^+} \frac{\operatorname{Log}(1+x)}{x} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{0^+} \frac{\operatorname{Log}(1+x)}{x} = 1 \text{ et } \lim_{0^+} \sqrt{x} = 0^+.$$

$$\begin{aligned}
 15) \lim_{+\infty} \frac{\text{Log}(1+x)}{\sqrt{x}} &= \lim_{0^+} \frac{\text{Log}\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\sqrt{\frac{1}{x}}} \\
 &= \lim_{0^+} \sqrt{x} \text{Log}\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{0^+} \sqrt{x} \text{Log}(1+x) - \sqrt{x} \text{Log} x \\
 &= \lim_{0^+} \sqrt{x} \text{Log}(1+x) - 2\sqrt{x} \text{Log} \sqrt{x} = 0
 \end{aligned}$$

$$16) \lim_0 \frac{\text{Log}(1+\sin x)}{\sin 2x} = \lim_0 \frac{\text{Log}(1+\sin x)}{\sin x} \cdot \frac{1}{2 \cos x}$$

Lorsque $x \longrightarrow 0$ alors $\sin x \longrightarrow 0$ on pose $X = \sin x$

$$\lim_0 \frac{\text{Log}(1+\sin x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{Log}(1+X)}{X} = 1$$

$$\text{et } \lim_0 \frac{1}{2 \cos x} = \frac{1}{2} \text{ par suite la limite recherchée est } \frac{1}{2}.$$

8 a) f est dérivable sur $]0, +\infty[$, $f'(x) = 1 + \frac{1}{4x} = \frac{4x+1}{4x}$

b) f est définie que pour $3x+1 > 0$ et $x > 0$ ou encore $x > 0$
d'où f est dérivable sur $]0, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{3}{3x+1} - \frac{1}{x} - \frac{3}{(3x+1)^2} = \frac{-6x-1}{x(3x+1)^2}$$

c) f est dérivable sur $]0, +\infty[$, $f'(x) = x \cdot \frac{1}{x} + 1 \cdot \text{Log} x - 1 = \text{Log} x$.

d) f est dérivable sur $]0, e[\cup]e, +\infty[$ ($x > 0$ et $\text{Log} x \neq 1$).

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{\frac{1}{x}(1 - \text{Log} x) - (1 + \text{Log} x)\left(-\frac{1}{x}\right)}{(1 - \text{Log} x)^2} \\
 &= \frac{\frac{1}{x} - \frac{\text{Log} x}{x} + \frac{1}{x} + \frac{\text{Log} x}{x}}{(1 - \text{Log} x)^2} = \frac{2}{x(1 - \text{Log} x)^2}
 \end{aligned}$$

i) $f(x) = \text{Log} \left| \frac{x+1}{x} \right|$; comme la valeur absolue est un réel positif il suffit

que $\frac{x+1}{x} \neq 0$ c'est-à-dire $x \neq 0$ et $x \neq -1$ donc f est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.

$U(x) = \frac{x+1}{x}$ est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{0, -1\}$.

$$f'(x) = \left(\text{Log} \left| U(x) \right| \right)' = \frac{U'(x)}{U(x)} = \frac{\frac{x - (x+1)}{x^2}}{\frac{x+1}{x}} = \frac{-1}{x(x+1)}.$$

Remarque : On aurait aussi pu calculer la dérivée de cette fonction en écrivant : $f(x) = \text{Log}|x+1| - \text{Log}|x|$ on obtient beaucoup plus rapidement :

$$f'(x) = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x} = \frac{x - x - 1}{x(x+1)} = -\frac{1}{x(x+1)}$$

j) $f(x) = \text{Log}(\text{Log } x)$, f est définie que lorsque $\text{Log } x > 0 \Leftrightarrow x > 1$
donc f est dérivable sur $]1, +\infty[$.

$$f'(x) = (\text{Log}(\text{Log } x))' = \frac{(\text{Log } x)'}{\text{Log } x} = \frac{1}{x \text{Log } x}.$$



a) La dérivée de $U: x \mapsto x^2 - 1$ c'est : $U': x \mapsto 2x$.

En écrivant $f(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2x}{x^2 - 1}$ on fait apparaître la forme $\frac{U'(x)}{U(x)}$

Les primitives de f sont F définies par $F(x) = \frac{1}{2} \text{Log}|x^2 - 1| + c$ avec

$c \in \mathbb{R}$ sur $]1, +\infty[$ on a $x^2 - 1 > 0$ donc $f(x) = \frac{1}{2} \text{Log}(x^2 - 1) + c$.

b) $f(x) = x - 1 + \frac{1}{x} \text{Log } x$, or $\frac{1}{x} \text{Log } x$ est de la forme $\frac{U'(x)}{U(x)}$

avec $U(x) = \text{Log } x$ qui admet pour primitive $\frac{1}{2} U^2(x)$

d'où les primitives de f s'écrivent :

$$F(x) = \frac{1}{2} x^2 - x + \frac{1}{2} (\text{Log } x)^2 + c ; c \in \mathbb{R}.$$

c) $f(x) = \frac{1}{x+2} - \frac{1}{x}$ dans ce cas les primitives de f sont :

$$F(x) = \text{Log}|x+2| - \text{Log}|x| + c, c \in \mathbb{R} ; \text{ sur }]0, +\infty[$$

on a $x > 0$ et $x+2 > 0$

$$\text{d'où } F(x) = \text{Log}(x+2) - \text{Log } x + c = \text{Log}\left(\frac{x+2}{x}\right) + c ; c \in \mathbb{R}.$$

$$d) f(x) = \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{c'est la forme} \quad \frac{U'(x)}{U(x)}$$

$$\text{avec } U(x) = \cos x \quad \text{et } U'(x) = -\sin x$$

$$f(x) = -\frac{\sin x}{\cos x} \quad \text{donc } F \text{ les primitives de } f \text{ s'écrivent :}$$

$$F(x) = -\operatorname{Log}|\cos x| + c \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$

$$\text{or sur } \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[\quad \text{on a } \cos x > 0 \text{ d'où } F(x) = -\operatorname{Log}(\cos x) + c.$$

$$e) f(x) = \frac{1+x}{1-x} = \frac{-(1-x)+2}{1-x} = -\frac{(1-x)}{1-x} + \frac{2}{1-x} = -1 + \frac{2}{1-x}, \text{ dans ce cas}$$

les primitives F de f sont définies sur $]1, +\infty[$ par :

$$F(x) = -x - 2\operatorname{Log}|1-x| + c ; c \in \mathbb{R}.$$

$$f) f_n(x) = \frac{1}{x \operatorname{Log}^n x} = \frac{1}{x} \cdot (\operatorname{Log} x)^{-n} \text{ on pose } U(x) = \operatorname{Log} x$$

$$U \text{ dérivable sur }]0, +\infty[\quad \text{et} \quad U'(x) = \frac{1}{x}.$$

$$\text{d'où } f_n(x) \text{ est de la forme } U' \cdot U^{-n}.$$

$$\text{par suite les primitives sont : } F_n(x) = \frac{1}{1-n} U^{-n+1}(x) + c$$

$$F_n(x) = \frac{1}{1-n} \operatorname{Log}^{1-n}(x) + c \quad \text{avec } c \in \mathbb{R}.$$



1) La fonction $f(x) = \operatorname{Log} x$ est continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ en particulier sur tout intervalle de la forme $[x, x+1]$ avec $x > 0$ donc il existe un réel $C \in]x, x+1[$ tel que $\operatorname{Log}(1+x) - \operatorname{Log} x = \frac{1}{C}$.

$$\text{On a : } x < C < x+1 \text{ alors } \frac{1}{x} > \frac{1}{C} > \frac{1}{x+1}$$

$$\text{En remplaçant } \frac{1}{C} \text{ par sa valeur on obtient : } \frac{1}{x} > \operatorname{Log}(1+x) - \operatorname{Log} x > \frac{1}{x+1}$$

On écrit l'inégalité pour $x \in \{1, 2, \dots, n-1, n\}$

$$\frac{1}{n+1} < \operatorname{Log}(1+n) - \operatorname{Log} n < \frac{1}{n}$$

$$\frac{1}{n} < \operatorname{Log} n - \operatorname{Log}(n-1) < \frac{1}{n-1}$$

⋮

$$\frac{1}{2} < \text{Log} 2 - \text{Log} 1 < 1$$

En sommant ces n inégalités, on obtient :

$$\frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} < \text{Log}(1+n) < 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} = S_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Log}(1+n) = +\infty \quad \text{alors} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = +\infty.$$

$$2) f(x) = \text{Log} \left| x \right|^{\frac{1}{x-1}} = \frac{1}{x-1} \text{Log} \left| x \right|.$$

$$a) f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R}^* \setminus \{1\}; f'(x) = \frac{1}{x-1} \cdot \frac{1}{x} - \frac{1}{(x-1)^2} \text{Log} \left| x \right|$$

$$f'(x) = \frac{1}{(x-1)^2} \left(\frac{x-1}{x} - \text{Log} \left| x \right| \right)$$

$$\text{or } f'(x) = \frac{k'(x)}{k(x)} \quad \text{d'où} \quad k'(x) = f'(x) \cdot k(x) = \frac{\left| x \right|^{\frac{1}{x-1}}}{(x-1)^2} \left(\frac{x-1}{x} - \text{Log} \left| x \right| \right)$$

$$b) f'(-4) = -0,00544 \quad \text{et} \quad f'(-2) = 0,0896.$$

f' est continue sur $[-4, -2]$ telle que $f'(-4) \cdot f'(-2) < 0$.

Alors il existe $x_0 \in]-4, -2[$ tel que $f'(x_0) = 0$.

11 ∇ A/ 1) g est dérivable sur $]0, +\infty[$; $g'(x) = 2x + \frac{1}{x} = \frac{2x^2 + 1}{x} > 0$

d'où g est strictement croissante sur $]0, +\infty[$.

2) g est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$ alors g réalise une

$$\text{bijection de }]0, +\infty[\text{ sur } g(]0, +\infty[) = \left] \lim_{0^+} g(x); \lim_{+\infty} g(x) \right[= \mathbb{R}$$

or $0 \in \mathbb{R}$, alors 0 admet qu'un seul antécédent: $\alpha \in]0, +\infty[$

Comme $g(1,3) \cong -0,047$ et $g(1,4) \cong 0,296$ et g est strictement croissante donc $1,3 < \alpha < 1,4$.

3) - Si $x > \alpha$ et g strictement croissante alors $g(x) > g(\alpha)$ d'où $g(x) > 0$.

- Si $0 < x < \alpha$ et g strictement croissante alors $g(x) < g(\alpha)$ donc $g(x) < 0$.

B/ 1) f est dérivable sur $]0, +\infty[$; $f'(x) = -\frac{1}{x^2} (x^2 + 1 - \text{Log} x) + \frac{1}{x} \left(2x - \frac{1}{x} \right)$

$$f'(x) = -1 - \frac{1}{x^2} + \frac{\text{Log} x}{x^2} + 2 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2 + \text{Log} x - 2}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}$$

x	0	α	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$f(\alpha)$	$+\infty$

$$\lim_{0^+} f(x) = \lim_{0^+} x + \frac{1}{x} - \frac{\text{Log } x}{x} = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} x + \frac{1}{x} - \frac{\text{Log } x}{x} = +\infty$$

2) On sait que $g(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \text{Log } \alpha = 2 - \alpha^2$

$$f(\alpha) = \frac{1}{\alpha}(\alpha^2 + 1 - \text{Log } \alpha) = \frac{1}{\alpha}(\alpha^2 + 1 - 2 + \alpha^2) = \frac{2\alpha^2 - 1}{\alpha} = 2\alpha - \frac{1}{\alpha}$$

on a: $1,3 < \alpha < 1,4$

$$\frac{1}{1,4} < \frac{1}{\alpha} < \frac{1}{1,3} \Leftrightarrow -\frac{1}{1,3} < -\frac{1}{\alpha} < -\frac{1}{1,4}$$

$$\text{Comme } 2,6 < 2\alpha < 2,8 \text{ d'où } 2,6 - \frac{1}{1,3} < 2\alpha - \frac{1}{\alpha} < 2,8 - \frac{1}{1,4}$$

$$1,83 < f(\alpha) < 2,086.$$

3) a) $\lim_{+\infty} f(x) = +\infty$

$$\lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} 1 + \frac{1}{x^2} - \frac{\text{Log } x}{x^2} = 1$$

$$\lim_{+\infty} [f(x) - x] = \lim_{+\infty} \frac{1}{x} - \frac{\text{Log } x}{x} = 0$$

Donc $y = x$ est une asymptote au voisinage de $+\infty$.

$\lim_{0^+} f(x) = +\infty$ donc $x = 0$ est une asymptote.

$$\text{b) } f(x) - x = \frac{1}{x}(1 - \text{Log } x)$$

$$1 - \text{Log } x \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq \text{Log } x \Leftrightarrow \text{Log } e \geq \text{Log } x \Leftrightarrow e \geq x$$

x	0	e	$+\infty$
$f(x) - x$		+	-

Si $x \in]0, e[$ alors C est au dessus de D.

Si $x \in]e, +\infty[$ alors C est au dessous de D.

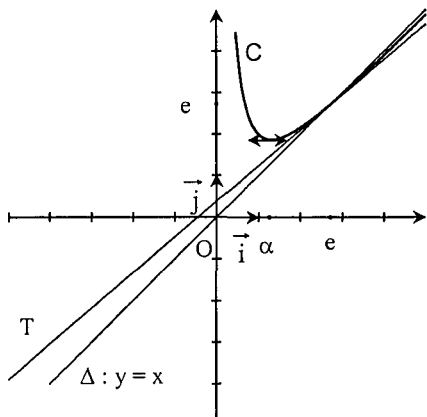
Si $x = e$ alors C et D coïncident au point (e, e) .

c) $T: y = f'(e)(x - e) + f(e)$ or $f(e) = e$ et

$$f'(e) = \frac{e^2 - 1}{e^2} = 1 - \frac{1}{e^2}$$

$$\text{d'où } T: y = \left(\frac{e^2 - 1}{e^2} \right) x - e + \frac{1}{e} + e$$

$$\text{donc } T: y = \left(\frac{e^2 - 1}{e^2} \right) x + \frac{1}{e}.$$



4) a) Comme $[e, +\infty[\subset [\alpha, +\infty[$,

donc h est continue et

strictement croissante sur $[e, +\infty[$

d'où h réalise une bijection de $[e, +\infty[$ sur $h([e, +\infty[) = [e, +\infty[$.

b) On a: $h(e) = e \Leftrightarrow h^{-1}(e) = e$

h est dérivable en e $\left\{ \begin{array}{l} h^{-1} \text{ est dérivable en } e \end{array} \right.$

$$h'(e) = \frac{e^2 - 1}{e^2} \neq 0 \Rightarrow \text{et } (h^{-1})'(e) = \frac{1}{h'(e)} = \frac{e^2}{e^2 - 1}$$

$$\Delta': y = (h^{-1})'(e)(x - e) + h^{-1}(e)$$

$$\Delta': y = \frac{e^2}{e^2 - 1}(x - e) + e \quad \text{d'où } \Delta': y = \frac{e^2}{e^2 - 1}x - \frac{e}{e^2 - 1}.$$

c) Pour $x \in]e, +\infty[$; $S_D(\mathbb{C}) = C_{h^{-1}}$ avec $D: y = x$.

12 1) a) g est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$

$$g'(x) = 1 - \text{Log } x - x \cdot \frac{1}{x} = -\text{Log } x$$

$$* -\text{Log } x \geq 0 \Leftrightarrow \text{Log } x \leq 0 \Leftrightarrow 0 < x \leq 1.$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
$g(x)$		1	$-\infty$

$$* \lim_{0^+} 1 + x - x \text{Log } x = 1; \lim_{+\infty} 1 + x(1 - \text{Log } x) = -\infty \text{ et } f(1) = 2.$$

b) * Sur $]0, 1]$, g est continue et strictement croissante donc g réalise une bijection de $]0, 1]$ sur $]1, 2]$ or $0 \notin]1, 2]$ donc 0 n'a pas d'antécédent dans $]0, 1]$.

* Sur $]1, +\infty[$, g continue et strictement décroissante donc g réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $]-\infty, 2[$ or $0 \in]-\infty, 2[$ donc 0 admet qu'un seul antécédent β dans $]1, +\infty[$.

donc l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution sur $]0, +\infty[$.

* $g(3) \approx 0,63$ et $g(4) \approx -0,54$ et g strictement décroissante sur $]1, +\infty[$
donc $3 < \beta < 4$.

c) Si $x \in]0, \beta[$ alors $g(x) > 0$

Si $x \in]\beta, +\infty[$ alors $g(x) < 0$

Si $x = \beta$ alors $g(\beta) = 0$.

$$2) a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 + \frac{\text{Log } x}{x} \cdot \frac{x}{x+1} = 2 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 + \frac{\text{Log } x}{x+1} = -\infty$$

b) f est dérivable sur $]0, +\infty[$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}(x+1) - \text{Log } x}{(x+1)^2} = \frac{x+1 - x \text{Log } x}{x(1+x)^2} = \frac{g(x)}{x(1+x)^2}$$

or $x > 0$ et $(x+1)^2 > 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$ d'où:

x	0	β	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	$f(\beta)$	2

$$f(\beta) = 2 + \frac{\text{Log } \beta}{\beta+1} \text{ or } g(\beta) = 0 \Leftrightarrow \text{Log } \beta = \frac{1+\beta}{\beta} \text{ d'où } f(\beta) = 2 + \frac{1}{\beta}.$$

$$c) M(x, y) \in C \cap D \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ y = f(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ f(x) = 2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ 2 + \frac{\text{Log } x}{1+x} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ \text{Log } x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \text{ d'où } A(1, 2)$$

$$* f(x) - 2 = \frac{\text{Log } x}{1+x} \text{ comme } 1+x > 0$$

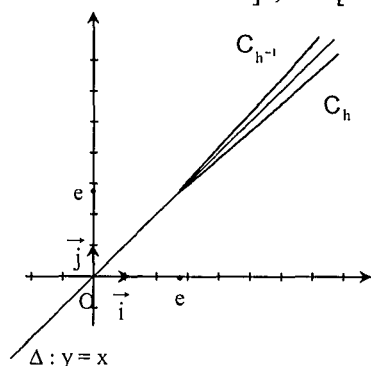
donc le signe de $(f(x) - 2)$ est celui de $\text{Log } x$ d'où:

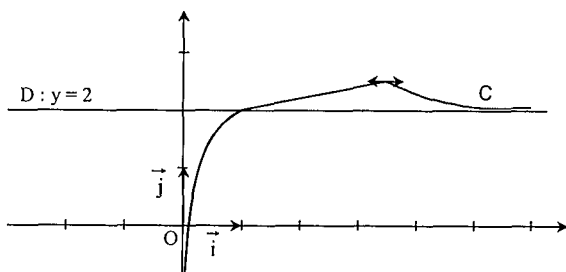
Si $x \in]0, 1[$ alors C est au dessous de D .

Si $x \in]1, +\infty[$ alors C est au dessus de D .

Si $x = 1$ alors C et D coïncident.

d) on a: $x = 0$ asymptote et $y = 2$ asymptote au voisinage de $+\infty$.





3) a) $h(x) = f(x) - x$, h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $h'(x) = f'(x) - 1$.

Si $x \in]\beta, +\infty[$ alors $f'(x) < 0$ donc $h'(x) < 0$

d'où h est strictement décroissante sur $]\beta, +\infty[$

b) * $x \in [1, \beta]$, on a $f'(x) \geq 0$.

$$* \frac{g(1)}{4} = \frac{1}{2}.$$

* $x > 1$ et g est strictement décroissante sur $]1, +\infty[$ donc $g(x) < g(1)$

* $x > 1 \Leftrightarrow 1+x > 2 \Leftrightarrow (1+x)^2 > 4$ donc $x(1+x)^2 > 4$

$$\text{d'où } \frac{1}{x(1+x)^2} < \frac{1}{4}$$

Si $x \in [1, \beta]$ on a $0 \leq g(x) < g(1)$ donc $\frac{g(x)}{x(1+x)^2} < \frac{g(1)}{4}$

d'où $f'(x) < \frac{g(1)}{4}$. Finalement $0 \leq f'(x) \leq \frac{g(1)}{4}$.

c) Sur $[1, \beta]$ on a $f'(x) \leq \frac{1}{2}$ d'où $f'(x) - 1 \leq -\frac{1}{2}$ donc $h'(x) < 0$

d'où h est strictement décroissante sur $[1, \beta]$.

4) $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow h(x) = 0$.

h est continue et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ donc h réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $h([1, +\infty[) =]-\infty, 1]$ car:

$$\lim_{1^+} h(x) = \lim_{1^+} 2 + \frac{\text{Log } x}{x+1} - x = 1 \text{ et } \lim_{+\infty} h(x) = \lim_{+\infty} 2 + \frac{\text{Log } x}{x} \cdot \frac{x}{x+1} - x = -\infty$$

Or $0 \in]-\infty, 1]$ donc 0 admet un seul antécédent $\alpha \in [1, +\infty[$ tel que $h(\alpha) = 0$

$\Leftrightarrow f(\alpha) = \alpha$ donc l'équation: $f(x) = x$ admet une unique solution

$$\alpha \in [1, +\infty[$$

$h(2) \approx 0,23$ et $h(3) \approx -0,72$ donc $\alpha \in]2, 3[$.

5) $2 \leq x \leq 3$ et f est strictement croissante sur $]-\infty, \beta]$ donc $f(2) \leq f(x) \leq f(3)$

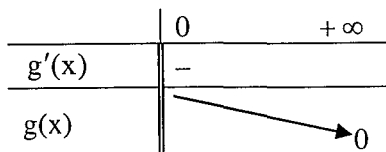
$$2 < 2 + \frac{\text{Log } 2}{3} \leq f(x) \leq 2 + \frac{\text{Log } 3}{4} < 3 \quad \text{d'où} \quad f(x) \in [2, 3].$$

13) g définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$g'(x) = \frac{2}{(x+2)^2} + \frac{-\frac{2}{x^2}}{x+2} = \frac{2}{(x+2)^2} - \frac{2}{x(x+2)} = \frac{-4}{x(x+2)^2} < 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2}{x+2} + \text{Log}\left(\frac{x+2}{x}\right) = 0$$

Alors $\forall x \in]0, +\infty[$,



$$2) a) \bullet \lim_{0^+} f(x) = \lim_{0^+} x \text{Log}\left(\frac{x+2}{x}\right) = \lim_{0^+} x \text{Log}(x+2) - x \text{Log } x = 0$$

$$\text{car } \lim_{0^+} x \text{Log } x = 0 \text{ et } \lim_{0^+} x \text{Log}(x+2) = 0 \times \text{Log } 2 = 0$$

d'où $\lim_{0^+} f(x) = f(0)$ par suite f est continue en 0.

$$\bullet \lim_{0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{0^+} \text{Log}\left(\frac{x+2}{x}\right) = +\infty \quad \text{car } \lim_{0^+} \frac{x+2}{x} = +\infty$$

Alors f n'est pas dérivable en 0.

$$b) \lim_{+\infty} f(x) = \lim_{0^+} f\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{0^+} \frac{1}{x} \text{Log}\left(\frac{\frac{1}{x}+2}{\frac{1}{x}}\right)$$

$$= \lim_{0^+} \frac{1}{x} \text{Log}(1+2x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\text{Log}(1+2x)}{2x} \cdot 2 = 2$$

$$\text{car } \lim_{0^+} \frac{\text{Log}(1+X)}{X} = 1$$

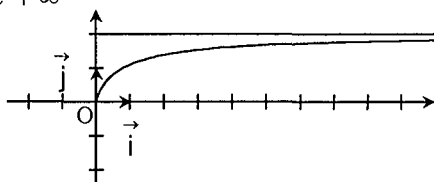
$$3) a) x \mapsto \frac{x+2}{x} \text{ est dérivable et positive sur }]0, +\infty[.$$

Alors $x \mapsto \text{Log}\left(\frac{x+2}{x}\right)$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ par suite f est dérivable sur $]0, +\infty[$.

$$f'(x) = \text{Log}\left(\frac{x+2}{x}\right) + x \cdot \frac{-\frac{2}{x^2}}{\frac{x+2}{x}} = \text{Log}\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{2}{x+2} = g(x)$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	2

b) $y = 2$ est une asymptote au voisinage de $+\infty$
 au point $(0,0)$ la courbe de f admet une
 demi-tangente verticale dirigée vers le
 haut.



$$4) h(x) = \frac{x^2}{2} \operatorname{Log}\left(\frac{x+2}{x}\right)$$

a) h est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $h'(x) = x \operatorname{Log}\left(\frac{x+2}{x}\right) + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{(-2)}{x(x+2)}$

d'où $h'(x) = x \operatorname{Log}\left(\frac{x+2}{x}\right) - \frac{x}{x+2}$

b) $h'(x) = f(x) - \frac{x}{x+2}$ alors $f(x) = h'(x) + \frac{x}{x+2}$

$$f(x) = h'(x) + \frac{x+2-2}{x+2} = h'(x) + 1 - \frac{2}{x+2}$$

Soit F une primitive de f qui s'annule en 0.

$$F(x) = h(x) + x - 2 \cdot \operatorname{Log}(x+2) + C \text{ et } F(0) = 0$$

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \operatorname{Log}\left(\frac{x+2}{x}\right) + x - 2 \operatorname{Log}(x+2) + C$$

$$F(x) = \frac{1}{2} x f(x) + x - 2 \operatorname{Log}(x+2) + C$$

$$\lim_0 F(x) = \lim_0 \frac{1}{2} x f(x) + x - 2 \operatorname{Log}(x+2) + C = 0$$

d'où $-2 \operatorname{Log} 2 + C = 0$ ou encore $C = 2 \operatorname{Log} 2$.

$$F(x) = \frac{x^2}{2} \operatorname{Log}\left(\frac{x+2}{x}\right) + x - 2 \operatorname{Log}(x+2) + 2 \operatorname{Log} 2$$

5) $k < 0$; $f_k(x) = f(x) + kx$.

a) f_k est dérivable sur $]0, +\infty[$, $f'_k(x) = f'(x) + k = g(x) + k$

$$f'_k(x) = 0 \Leftrightarrow g(x) = -k \text{ avec } k \in \mathbb{R}_+^*$$

On a g est continue et strictement décroissante sur $]0, +\infty[$

Alors g réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $]0, +\infty[$.

or $(-k) \in]0, +\infty[$ alors $(-k)$ admet un seul antécédent

$\alpha_k \in]0, +\infty[$ tq $g(\alpha_k) = -k$

d'où $f'_k(x) = 0 \Leftrightarrow x = \alpha_k$

b) Pour $x < \alpha_k$ et on a g est décroissante alors $g(x) > g(\alpha_k)$

d'où $g(x) + k > 0$

pour $x > \alpha_k$ et g est décroissante alors $g(x) < g(\alpha_k)$

d'où $g(x) + k < 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) + kx = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_k(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) + kx = -\infty$$

x	0	α_k	$+\infty$
$f'_k(x)$	$+$	ϕ	$-$
$f_k(x)$	0	$f_k(\alpha_k)$	$-\infty$

pour $0 < x \leq \alpha_k$ on a: f_k est croissante sur $]0, \alpha_k]$

d'où $0 < f_k(x) < f_k(\alpha_k)$ donc $0 < f_k(\alpha_k)$



1) f est définie lorsque $x > 0$ et $|\text{Log } x| \geq 0$ d'où $D_f =]0, +\infty[$.

$$\begin{aligned} 2) \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 \sqrt{|\text{Log } x|}}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{x^2 \sqrt{-\text{Log } x}}{x - 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{-x^2 \text{Log } x}{(x - 1) \cdot \sqrt{-\text{Log } x}} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\text{Log } x}{x - 1} \cdot \frac{-x^2}{\sqrt{-\text{Log } x}} = 1 \times (-\infty) = -\infty. \end{aligned}$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en 1 d'où f n'est pas dérivable en 1.

3) a) L'inéquation est définie sur $]0, +\infty[$.

$$4\text{Log } x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow \text{Log } x^4 \geq -1 \Leftrightarrow \text{Log } x^4 \geq -\text{Log } e \Leftrightarrow x^4 \geq \frac{1}{e} \Leftrightarrow x^2 \geq \sqrt{\frac{1}{e}}$$

$$\Leftrightarrow x \geq \sqrt{\frac{1}{\sqrt{e}}} \text{ ou encore } x \geq \frac{1}{e^{\frac{1}{4}}} \text{ d'où } S = \left[\frac{1}{e^{\frac{1}{4}}}, +\infty \right[.$$

b) f est dérivable sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

Si $x \in]0, 1[$ alors $\text{Log } x < 0$ donc $f(x) = x^2 \sqrt{-\text{Log } x}$

$$\begin{aligned} \text{d'où } f'(x) &= 2x \sqrt{-\text{Log } x} - \frac{x}{2\sqrt{-\text{Log } x}} \\ &= \frac{-4x \text{Log } x - x}{2\sqrt{-\text{Log } x}} = \frac{-x(4\text{Log } x + 1)}{2\sqrt{-\text{Log } x}}. \end{aligned}$$

Si $x \in]1, +\infty[$ alors $\text{Log } x > 0$ d'où $f(x) = x^2 \sqrt{\text{Log } x}$

$$\text{par suite } f'(x) = 2x\sqrt{\text{Log } x} + \frac{x}{2\sqrt{\text{Log } x}} = \frac{x(4\text{Log } x + 1)}{2\sqrt{\text{Log } x}}.$$

4)

x	0	$\frac{1}{e^4}$	$+\infty$
$4\text{Log } x + 1$	-	0	+
x	+	+	+
-x	-	-	-

x	0	$\frac{1}{e^4}$	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	0	$\frac{1}{2\sqrt{e}}$	0	$+\infty$

$$f\left(\frac{1}{e^4}\right) = \frac{1}{e^2} \cdot \sqrt{\text{Log}\left(\frac{1}{e^4}\right)} = \frac{1}{\sqrt{e}} \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2\sqrt{e}}$$

$$\lim_{0^+} f(x) = \lim_{0^+} x^2 \sqrt{\text{Log } x} = \lim_{0^+} \sqrt{x |\text{Log } x|} = \lim_{0^+} \sqrt{x \text{Log } x} = 0$$

$$\lim_{+\infty} f(x) = \lim_{+\infty} x^2 \sqrt{\text{Log } x} = +\infty.$$

$$5) * \lim_{+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{+\infty} x \sqrt{\text{Log } x} = +\infty$$

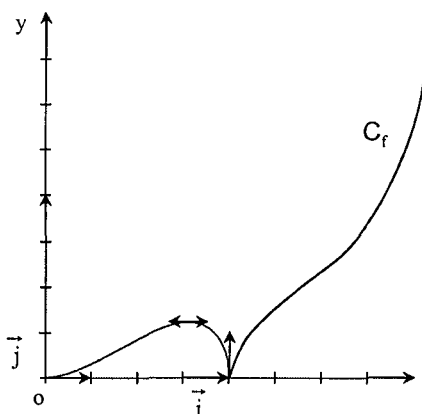
donc C_1 admet une branche
parabolique

de direction l'axe des ordonnées au
voisinage de $+\infty$.

$$* \lim_{1^-} f'(x) = -\infty \text{ et } \lim_{1^+} f'(x) = +\infty$$

donc au point d'abscisse 1 la C_f

admet une demi-tangente verticale
dirigée vers le haut.



15

$$1) a) \begin{cases} f(x) = \frac{\text{Log}(1+x)}{x} & \text{si } x > 0 \\ f(0) = 1 \end{cases}$$

$$\lim_{0^+} f(x) = \lim_{0^+} \frac{\text{Log}(1+x) - \text{Log}(1+0)}{x-0}$$

c'est le nombre dérivée de la fonction $U : x \mapsto \text{Log}(1+x)$ en 0

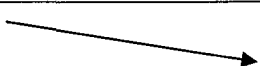
$$\text{or } U'(x) = \frac{1}{1+x} \quad \text{d'où } U'(0) = 1$$

par suite $\lim_{0^+} f(x) = 1 = f(0)$ donc f est continue en 0.

comme f est continue sur $]0, +\infty[$ donc f continue sur $[0, +\infty[$.

$$b) g(x) = \text{Log}(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right)$$

$$g \text{ est dérivable sur } [0, +\infty[\text{ et } g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x - x^2 = \frac{-x^3}{1+x} \leq 0.$$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$	0	-
$g(x)$	0	

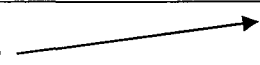
$$g(0) = \text{Log}(1+0) - 0 = 0$$

0 est un maximum absolu de g donc pour tout $x \in [0, +\infty[$, $g(x) \leq 0$

$$\text{d'où } \text{Log}(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

$$c) \text{ On pose : } p(x) = \text{Log}(1+x) - \left(x - \frac{x^2}{2} \right)$$

$$p \text{ est dérivable sur } [0, +\infty[\text{ et } p'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x = \frac{x^2}{1+x} \geq 0$$

x	0	$+\infty$
$p'(x)$	0	+
$p(x)$	0	

0 est un minimum absolu pour p donc pour tout $x \geq 0$, on a : $p(x) \geq 0$

$$\text{d'où } \text{Log}(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2}.$$

$$d) \text{ On a : pour tout } x \geq 0 : \text{Log}(1+x) \geq x - \frac{x^2}{2} \text{ et}$$

$$\text{Log}(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \quad \text{d'où} \quad x - \frac{x^2}{2} \leq \text{Log}(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\text{Log}(1+x)}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(1+x) - x}{x^2}$$

$$\text{on a : } x - \frac{x^2}{2} \leq \text{Log}(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

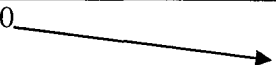
$$\text{d'où} \quad -\frac{1}{2} \leq \frac{\text{Log}(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} \quad \text{comme} \quad \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\text{Log}(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2} \quad \text{par suite } f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et}$$

$$f'(0) = -\frac{1}{2}.$$

2) a) h est dérivable sur $[0, +\infty[$,

$$h'(x) = \frac{1}{(x+1)^2} - \frac{1}{x+1} = \frac{1-x-1}{(x+1)^2} = \frac{-x}{(x+1)^2} \leq 0.$$

x	0	$+\infty$
$h'(x)$	0	-
$h(x)$	0	

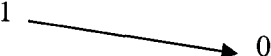
0 est maximum absolu pour h , donc pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ on a $h(x) \leq 0$.

b) f est dérivable sur $[0, +\infty[$.

$$* \quad f'(0) = -\frac{1}{2}$$

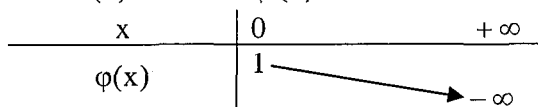
$$* \quad \text{Pour tout } x > 0 \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2} \text{Log}(1+x) + \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x+1}$$

$$f'(x) = \frac{-\text{Log}(1+x) + \frac{x}{x+1}}{x^2} = \frac{h(x)}{x^2} \leq 0$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-\frac{1}{2}$	-
$f(x)$	1	

3) $\varphi(x) = f(x) - x$, φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+$

$$\varphi'(x) = f'(x) - 1 \text{ or } f'(x) < 0 \text{ donc } \varphi'(x) < 0$$



$$\lim_{+\infty} \varphi(x) = \lim_{+\infty} \frac{\text{Log}(1+x)}{1+x} \cdot \frac{1+x}{x} - x = -\infty; \quad \varphi'(0) = f'(0) - 1 = \frac{-3}{2}$$

$$\varphi(0) = 1 \text{ d'où } \Delta: \begin{cases} y = \frac{-3}{2}x + 1 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

C'est l'équation de la demi tangente au point d'abscisse 0.

Construction :

$$\begin{aligned} \lim_{+\infty} \frac{\varphi(x)}{x} &= \lim_{+\infty} \frac{\text{Log}(1+x)}{x^2} - 1 \\ &= \lim_{+\infty} \frac{\text{Log}(1+x)}{1+x} \cdot \frac{1+x}{x^2} - 1 = -1 \end{aligned}$$

$$\lim_{+\infty} \varphi(x) + x = \lim_{+\infty} f(x) = 0$$

donc $y = -x$ asymptote au voisinage de $+\infty$.

4)a) $f(x) = x \Leftrightarrow f(x) - x = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) = 0$.

φ est continue et strictement décroissante sur

$]0, +\infty[$ donc φ réalise une bijection de

$]0, +\infty[$ sur $] -\infty, 1[$ or $0 \in] -\infty, 1[$ d'où 0

admet un seul antécédent $\alpha \in]0, +\infty[$

d'où l'équation $f(x) = x$ admet une seule solution $\alpha \in]0, +\infty[$

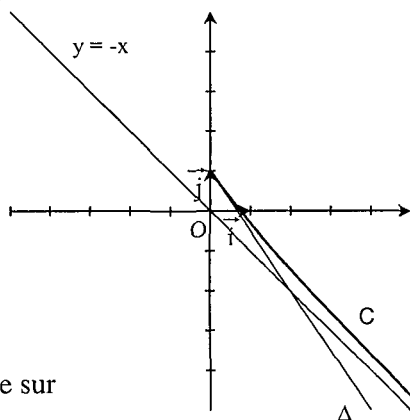
$$\text{or } \varphi\left(\frac{1}{2}\right) \approx 0,310 \text{ et } \varphi(1) \approx -0,306 \text{ d'où } \alpha \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

b) $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ et f est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$

$$\text{donc } f\left(\frac{1}{2}\right) \geq f(x) \geq f(1) \text{ ou encore } 2\text{Log } 3 - 2\text{Log } 2 \geq f(x) \geq \text{Log } 2$$

$$1 > 0,81 \geq f(x) \geq 0,69 > 0,5 \text{ d'où } f(x) \in \left[\frac{1}{2}, 1\right].$$

c) $\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ et h est strictement décroissante, donc $h\left(\frac{1}{2}\right) \geq h(x) \geq h(1)$



$$\frac{1}{2} \operatorname{Log} \frac{3}{2} \geq h(x) \geq \frac{1}{2} - \operatorname{Log} 2 \quad \text{d'où} \quad -0,2 \leq h(x) \leq 0,2 \quad \text{donc} \quad |h(x)| \leq \frac{1}{5}.$$

$$d) f'(x) = \frac{h(x)}{x^2}, \text{ on a : } |h(x)| \leq \frac{1}{5} \Leftrightarrow \left| \frac{h(x)}{x^2} \right| \leq \frac{1}{5x^2} \Leftrightarrow |f'(x)| \leq \frac{1}{5x^2}$$

$$\text{comme } \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \Leftrightarrow \frac{1}{4} \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow 4 \geq \frac{1}{x^2} \geq 1 \quad \text{d'où} \quad |f'(x)| \leq \frac{4}{5}.$$

5) a) $\forall n \in \mathbb{N}$, f est continue sur $[U_{n-1}, U_n]$ dérivable sur $]U_{n-1}, U_n[$

et on a : $\forall x \in \mathbb{R}_+, |f'(x)| \leq \frac{4}{5}$ donc et d'après le théorème des accroissements finis on a :

$$|f(U_n) - f(U_{n-1})| \leq \frac{4}{5} |U_n - U_{n-1}| \Leftrightarrow |U_{n+1} - U_n| \leq \frac{4}{5} |U_n - U_{n-1}|$$

Montrons par récurrence que $|U_{n+1} - U_n| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot |U_1 - U_0|$.

- Pour $n=0$, $|U_1 - U_0| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^0 \cdot |U_1 - U_0| \Leftrightarrow |U_1 - U_0| \leq |U_1 - U_0|$

- Supposons que $|U_{n+1} - U_n| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot |U_1 - U_0|$ et montrons que

$$|U_{n+2} - U_{n+1}| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} \cdot |U_1 - U_0|.$$

$$\text{d'après 5) a) } |U_{n+2} - U_{n+1}| \leq \frac{4}{5} |U_{n+1} - U_n| \leq \left(\frac{4}{5}\right) \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot |U_1 - U_0|$$

$$\text{d'où} \quad |U_{n+2} - U_{n+1}| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1} \cdot |U_1 - U_0|.$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N} \text{ on a : } |U_{n+1} - U_n| \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \cdot |U_1 - U_0|$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{4}{5}\right)^n = 0 \quad \text{donc} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |U_{n+1} - U_n| = 0$$

b) ♠ Montrons que la suite V définie par $V_p = U_{2p}$ est décroissante pour ça, montrons que, $\forall p \in \mathbb{N} \quad V_{p+1} < V_p$.

- Pour $p=0$ on a $V_1 = U_2$

$$U_0 = 5; U_1 = \frac{1}{5} \text{Log} 6; U_2 = \frac{1}{\frac{1}{5} \text{Log} 6} \text{Log} \left(1 + \frac{1}{5} \text{Log} 6 \right)$$

$$= \frac{5}{\text{Log} 6} \text{Log} \left(1 + \frac{1}{5} \text{Log} 6 \right) < U_0 = V_0$$

d'où $V_1 < V_0$.

• Supposons que $(V_{p+1} < V_p \Leftrightarrow U_{2p+2} < U_{2p})$ et montrons que

$$(V_{p+2} < V_{p+1} \Leftrightarrow U_{2p+4} < U_{2p+2})$$

On a : $U_{2p+2} < U_{2p}$ et f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$

$$\text{donc } f(U_{2p+2}) > f(U_{2p}) \Leftrightarrow U_{2p+3} > U_{2p+1}.$$

or f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$ d'où

$$f(U_{2p+3}) < f(U_{2p+1}) \Leftrightarrow U_{2p+4} < U_{2p+2} \Leftrightarrow V_{p+2} < V_{p+1}$$

• **Conclusion** : $\forall p \in \mathbb{N}, V_{p+1} < V_p$. Donc V est une suite décroissante.

❖ Montrons par récurrence que : $\forall p \in \mathbb{N} : W_{p+1} > W_p$

• Pour $p = 0$, $W_1 = U_3 = \frac{1}{U_2} \text{Log}(1 + U_2)$

$$= \frac{\text{Log} 6}{5 \text{Log} \left(1 + \frac{1}{5} \text{Log} 6 \right)} \text{Log} \left[1 + \frac{5}{\text{Log} 6} \text{Log} \left(1 + \frac{1}{5} \text{Log} 6 \right) \right] > \frac{\text{Log} 6}{5} = U_1 = W_0$$

d'où $W_1 > W_0$

• Supposons que $(W_{p+1} > W_p \Leftrightarrow U_{2p+3} > U_{2p+1})$ et montrons que

$$(W_{p+2} > W_{p+1} \Leftrightarrow U_{2p+5} > U_{2p+3}).$$

On a : $U_{2p+3} > U_{2p+1}$ et f est strictement décroissante sur $[0, +\infty[$

$$\text{donc } f(U_{2p+3}) < f(U_{2p+1}) \Leftrightarrow U_{2p+4} < U_{2p+2}$$

$$f(U_{2p+4}) > f(U_{2p+2}) \Leftrightarrow U_{2p+5} > U_{2p+3} \Leftrightarrow W_{p+2} > W_{p+1}$$

• **Conclusion** : $\forall p \in \mathbb{N}; W_{p+1} > W_p$ Donc W est une suite croissante.

c) Montrons que $U_n \in [0, +\infty[$.

• Pour $n = 0$, $U_0 = 5 > 0$

• Supposons que $U_n \in [0, +\infty[$, montrons que $U_{n+1} \in [0, +\infty[$

$$U_{n+1} = \frac{1}{U_n} \text{Log}(1 + U_n) > 0 \text{ d'où } U_{n+1} \in [0, +\infty[$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}; U_n \in [0, +\infty[$.

❖ La suite V est décroissante minorée par 0 car $V_p = U_{2p} \in [0, +\infty[$ donc elle est convergente.

❖ On a : $W_p = U_{2p+1} = f(U_{2p}) = f(V_p)$

puisque V est convergente et f est continue sur $[0, +\infty[$ donc W est convergente.

❖ Puisque $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n - U_{n-1}) = 0$ donc $\lim_{p \rightarrow +\infty} (U_{2p+1} - U_{2p}) = 0$

et par suite $\lim_{p \rightarrow +\infty} (W_p - V_p) = 0$ d'où $\lim_{p \rightarrow +\infty} W_p = \lim_{p \rightarrow +\infty} V_p$

16 1) a) $0 \leq x \leq 1$ alors $1 \leq x+1 \leq 2$ donc $0 \leq \text{Log}(x+1) \leq \text{Log}2$
d'où $0 \leq x^n \text{Log}(x+1) \leq \text{Log}2 \cdot x^n$

$$\int_0^1 0 dx \leq \int_0^1 x^n \text{Log}(1+x) dx \leq \int_0^1 x^n \text{Log}2 dx$$

$$0 \leq U_n \leq \text{Log}2 \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \Leftrightarrow 0 \leq U_n \leq \frac{\text{Log}2}{n+1}$$

Comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\text{Log}2}{n+1} = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

$$\begin{aligned} \text{b) } \bullet \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} dx &= \int_0^1 \frac{x^2 - 1 + 1}{1+x} dx = \int_0^1 x - 1 + \frac{1}{1+x} dx \\ &= \left[\frac{1}{2} x^2 - x + \text{Log}|1+x| \right]_0^1 = -\frac{1}{2} + \text{Log}2 \end{aligned}$$

$$\bullet U_1 = \int_0^1 x \text{Log}(1+x) dx$$

$$\text{Posons } \begin{cases} U(x) = \text{Log}(1+x) \\ V'(x) = x \end{cases} \text{ alors } \begin{cases} U'(x) = \frac{1}{1+x} \\ V(x) = \frac{1}{2} x^2 \end{cases}$$

$$U_1 = \left[\frac{1}{2} x^2 \text{Log}(1+x) \right]_0^1 - \frac{1}{2} \int_0^1 \frac{x^2}{1+x} = \frac{1}{2} \text{Log}2 - \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2} + \text{Log}2 \right) = \frac{1}{4}$$

2) a) $S_n(x) = \sum_{k=0}^n (-x)^k$ somme des $(n+1)$ termes d'une suite géométrique de raison $q = -x \neq 1$.

$$\text{Alors } S_n(x) = \frac{1 - (-x)^{n+1}}{1+x} = \frac{1}{1+x} - \frac{(-x)^{n+1}}{1+x} = \frac{1}{1+x} + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{1+x}$$

d'une part:

$$\bullet \int_0^1 S_n(x) dx = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx + \int_0^1 (-1)^n \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$

$$= \left[\text{Log} |1+x| \right]_0^1 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$

$$\text{d'autre part: } \int_0^1 1 - x + x^2 + \dots + (-1)^n x^n dx$$

$$= \left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \dots + \frac{(-1)^n}{n+1} = V_n \quad \text{d'où } V_n = \text{Log} 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx.$$

$$\text{b) } 0 \leq x \leq 1 \quad \text{alors } 1 \leq x+1 \leq 2 \quad \text{d'où } 1 \geq \frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{2}$$

$$x^{n+1} \geq \frac{x^{n+1}}{1+x} \geq \frac{x^{n+1}}{2}$$

$$|V_n - \text{Log} 2| = \left| \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \right| \leq \int_0^1 x^{n+1} dx$$

$$\text{Comme } \int_0^1 x^{n+1} dx = \left[\frac{1}{n+2} x^{n+2} \right]_0^1 = \frac{1}{n+2} \quad \text{d'où } |V_n - \text{Log} 2| \leq \frac{1}{n+2}.$$

$$\text{et } \lim_{+\infty} \frac{1}{n+2} = 0 \quad \text{alors } \lim_{+\infty} |V_n - \text{Log} 2| = 0 \quad \text{d'où } \lim_{+\infty} V_n = \text{Log} 2.$$

$$3) \text{ a) Posons } \begin{cases} f'(x) = x^n \\ g(x) = \text{Log}(1+x) \end{cases} \quad \text{alors } \begin{cases} f(x) = \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ g'(x) = \frac{1}{1+x} \end{cases}$$

$$\text{d'où } U_n = \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \text{Log}(1+x) \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{n+1} \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$

$$U_n = \frac{1}{n+1} \text{Log} 2 - \frac{1}{n+1} \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx$$

$$\text{Comme } V_n = \text{Log} 2 + (-1)^n \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx \quad \text{alors } \int_0^1 \frac{x^{n+1}}{1+x} dx = \frac{V_n - \text{Log} 2}{(-1)^n}$$

$$\text{Ainsi } U_n = \frac{1}{n+1} \text{Log} 2 - \frac{1}{n+1} \left(\frac{V_n - \text{Log} 2}{(-1)^n} \right)$$

$$= \frac{\text{Log}2}{n+1} + \frac{(-1)^n}{n+1} (\text{Log}2 - V_n)$$

$$b) W_n = (n+1)U_n = \text{Log}2 + (-1)^n (\text{Log}2 - V_n)$$

$$W_n - \text{Log}2 = (-1)^n (\text{Log}2 - V_n)$$

$$|W_n - \text{Log}2| = |\text{Log}2 - V_n| \quad \text{Comme } \lim_{+\infty} |\text{Log}2 - V_n| = 0$$

$$\text{Alors } \lim_{+\infty} |W_n - \text{Log}2| = 0 \text{ d'où } \lim_{+\infty} W_n = \text{Log}2$$

donc W_n est convergente vers $\text{Log}2$.

17 1) On a : $f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot x^2 - 2x \text{Log}x}{x^4} = \frac{x(1 - 2\text{Log}x)}{x^4} = \frac{1 - 2\text{Log}x}{x^3}$

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*$$

$$1 - 2\text{Log}x > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2} > \text{Log}x \Leftrightarrow e^{\frac{1}{2}} > x$$

Donc f est strictement croissante sur $]0, \sqrt{e}[$ et strictement décroissante sur $[\sqrt{e}, +\infty[$.

2) a) Comme $\sqrt{e} < 2$, la fonction f est strictement décroissante sur $[2, +\infty[$
on a donc : $k \leq x \leq k+1 \Rightarrow f(k+1) \leq f(x) \leq f(k)$

$$\text{soit } \frac{\text{Log}(k+1)}{(k+1)^2} \leq \frac{\text{Log}x}{x^2} \leq \frac{\text{Log}k}{k^2} \quad (k \geq 2)$$

$$\int_k^{k+1} \frac{\text{Log}(k+1)}{(k+1)^2} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{\text{Log}x}{x^2} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{\text{Log}k}{k^2} dx$$

$$\text{Soit } \frac{\text{Log}(k+1)}{(k+1)^2} \int_k^{k+1} dx \leq \int_k^{k+1} \frac{\text{Log}x}{x^2} dx \leq \frac{\text{Log}k}{k^2} \int_k^{k+1} dx$$

$$\text{ou encore } \frac{\text{Log}(k+1)}{(k+1)^2} \leq \int_k^{k+1} \frac{\text{Log}x}{x^2} dx \leq \frac{\text{Log}k}{k^2}.$$

$$\text{Car } \int_k^{k+1} dx = [x]_k^{k+1} = k+1 - k = 1$$

$$\begin{aligned} b) \int_a^b \frac{1}{x^2} \text{Log}x dx &= \left[-\frac{1}{x} \text{Log}x \right]_a^b - \int_a^b -\frac{1}{x} \cdot \frac{1}{x} dx = \left[-\frac{1}{x} \text{Log}x \right]_a^b - \left[\frac{1}{x} \right]_a^b \\ &= \left[-\frac{\text{Log}x}{x} - \frac{1}{x} \right]_a^b \end{aligned}$$

3) a) En donnant successivement à k les valeurs 2, 3, ..., $n-1$ on obtient $n-2$

inégalités doubles ; ajoutons-les membre à membre on obtient :

$$\sum_{k=2}^{k=n-1} \frac{\text{Log}(k+1)}{(k+1)^2} \leq \sum_{k=2}^{k=n-1} \int_k^{k+1} \frac{\text{Log}x}{x^2} dx \leq \sum_{k=2}^{k=n-1} \frac{\text{Log}k}{k^2}$$

La première somme s'écrit $\frac{\text{Log}3}{3^2} + \frac{\text{Log}4}{4^2} + \dots + \frac{\text{Log}n}{n^2}$ et elle est bien égale à $S_n - \frac{\text{Log}2}{2^2}$.

La seconde somme s'écrit :

$$\int_2^3 \frac{\text{Log}x}{x^2} dx + \int_3^4 \frac{\text{Log}x}{x^2} dx + \dots + \int_{n-1}^n \frac{\text{Log}x}{x^2} dx = \int_2^n \frac{\text{Log}x}{x^2} dx$$

La troisième somme s'écrit $\frac{\text{Log}2}{2^2} + \frac{\text{Log}3}{3^2} + \dots + \frac{\text{Log}(n+1)}{(n+1)^2}$ et elle est

égale à : $S_n - \frac{\text{Log}n}{n^2}$.

d'où on a bien l'encadrement donné :

$$S_n - \frac{\text{Log}2}{2^2} \leq \int_2^n \frac{\text{Log}x}{x^2} dx \leq S_n - \frac{\text{Log}n}{n^2}$$

b) La première inégalité s'écrit : $S_n \leq \frac{\text{Log}2}{2^2} + \left[-\frac{\text{Log}x}{x} - \frac{1}{x} \right]_2^n$

d'après 2)b), soit $S_n \leq \frac{\text{Log}2}{2^2} - \frac{\text{Log}n}{n} - \frac{1}{n} + \frac{\text{Log}2}{2} + \frac{1}{2}$

ou encore $S_n \leq \frac{2+3\text{Log}2}{4} - \frac{1+\text{Log}n}{n}$.

La deuxième inégalité s'écrit $S_n \geq \frac{\text{Log}n}{n^2} + \left[-\frac{\text{Log}x}{x} - \frac{1}{x} \right]_2^n$

Soit $S_n \geq \frac{\text{Log}n}{n^2} - \frac{\text{Log}n}{n} - \frac{1}{n} + \frac{\text{Log}2}{2} + \frac{1}{2}$, ou encore

$S_n \geq \frac{1+\text{Log}2}{2} - \frac{n+n\text{Log}n-\text{Log}n}{n^2}$ d'où on a bien l'encadrement donné.

c) On a : $\frac{1+\text{Log}2}{2} - \frac{100+99\text{Log}100}{10^4} \leq S_{100} \leq \frac{2+3\text{Log}2}{4} - \frac{1+\text{Log}100}{100}$

On obtient avec la calculatrice : $0,79 \leq S_{100} \leq 0,97$.

1) f existe dès que $h:t \mapsto \frac{1}{\text{Log}t}$ soit continue sur $[x, 2x]$ ou $[2x, x]$

$$0 < x < \frac{1}{2} \quad \text{alors} \quad 0 < 2x < 1 \quad \text{et} \quad 2x > x.$$

$$\bullet h(t) = \frac{1}{\text{Log} t} \text{ continue sur }]0, 1[\text{ et comme } [x, 2x] \subset]0, 1[$$

Alors h est continue sur $[x, 2x]$ d'où l'existence de f .

2) h continue sur $]0, 1[$, soit H une primitive de h sur $]0, 1[$

$$\forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[, f(x) = [H(t)]_x^{2x} = H(2x) - H(x)$$

$$= H(U(x)) - H(x) \text{ avec } U(x) = 2x$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet U \text{ est dérivable sur } \left]0, \frac{1}{2}\right[\\ \bullet H \text{ est dérivable sur }]0, 1[\\ \bullet \forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[, U(x) = 2x \in]0, 1[\end{array} \right\} \Rightarrow H \circ U \text{ est dérivable sur } \left]0, \frac{1}{2}\right[$$

$$\text{par suite } f = H \circ U - H \text{ est dérivable sur } \left]0, \frac{1}{2}\right[$$

$$\text{et } f'(x) = U'(x) \cdot H'(U(x)) - H'(x)$$

$$f'(x) = 2 \cdot h(2x) - h(x) = \frac{2}{\text{Log} 2x} - \frac{1}{\text{Log} x}$$

$$= \frac{2\text{Log} x - \text{Log} 2x}{\text{Log} x \cdot \text{Log} 2x} = \frac{\text{Log}(x^2) - \text{Log} 2x}{\text{Log} x \cdot \text{Log} 2x} = \frac{\text{Log}\left(\frac{x}{2}\right)}{\text{Log} x \cdot \text{Log} 2x}$$

$$3) \forall x \in \left]0, \frac{1}{2}\right[\text{ on a } 2x > x$$

$$\text{La valeur moyenne de } h \text{ sur } [x, 2x] \text{ est } \overline{h} = \frac{1}{x} \int_x^{2x} h(t) dt \quad \overline{h} = \frac{1}{x} \cdot f(x)$$

D'après le théorème de la moyenne il existe $C \in [x, 2x]$

$$\text{tel que } h(C) = \overline{h} = \frac{f(x)}{x} \text{ or } h(C) = \frac{1}{\text{Log} C} \text{ d'où } \frac{1}{\text{Log} C} = \frac{f(x)}{x}$$

On a : $x \leq C \leq 2x$ alors $\text{Log} x \leq \text{Log} C \leq \text{Log} 2x$

$$\frac{1}{\text{Log} x} \geq \frac{1}{\text{Log} C} \geq \frac{1}{\text{Log} 2x}$$

$$\frac{1}{\text{Log} x} \geq \frac{f(x)}{x} \geq \frac{1}{\text{Log} 2x} \text{ comme } x > 0 \quad \frac{x}{\text{Log} x} \geq f(x) \geq \frac{x}{\text{Log} 2x}$$

$$4) a) \bullet \lim_{0^+} \frac{x}{\text{Log} x} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{0^+} \frac{x}{\text{Log} 2x} = 0$$

$$\text{et} \quad \frac{x}{\text{Log} 2x} \leq f(x) \leq \frac{x}{\text{Log} x} \quad \text{donc} \quad \lim_{0^+} f(x) = 0 = f(0)$$

par suite f est continue en 0.

$$\bullet \lim_{0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{0^+} \frac{f(x)}{x}$$

$$\text{Comme} \quad \frac{1}{\text{Log} 2x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{\text{Log} x} \quad \text{et} \quad \lim_{0^+} \frac{1}{\text{Log} x} = \lim_{0^+} \frac{1}{\text{Log} 2x} = 0$$

$$\text{d'où} \quad \lim_{0^+} \frac{f(x)}{x} = 0 \quad \text{donc} \quad f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = 0$$

$$b) x \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[\quad \text{alors} \quad 2x \in \left] 0, 1 \right[\quad \text{donc} \quad \text{Log} x < 0 \quad \text{et} \quad \text{Log} 2x < 0$$

$$\frac{x}{2} \in \left] 0, \frac{1}{4} \right[\quad \text{alors} \quad \text{Log} \frac{x}{2} < 0$$

$$\text{donc} \quad f'(x) < 0 \quad \text{par suite} \quad f \text{ est strictement décroissante sur } \left] 0, \frac{1}{2} \right[.$$

18 ∇ 1) f existe dès que $h: t \mapsto \frac{1}{\text{Log} t}$ soit continue sur $[x, 2x]$ ou $[2x, x]$

$$0 < x < \frac{1}{2} \quad \text{alors} \quad 0 < 2x < 1 \quad \text{et} \quad 2x > x.$$

$$\bullet h(t) = \frac{1}{\text{Log} t} \quad \text{continue sur} \quad]0, 1[\quad \text{et comme} \quad [x, 2x] \subset]0, 1[$$

Alors h est continue sur $[x, 2x]$ d'où l'existence de f .

$$2) h \text{ continue sur }]0, 1[, \text{ soit } H \text{ une primitive de } h \text{ sur }]0, 1[$$

$$\forall x \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[, \quad f(x) = [H(t)]_x^{2x} = H(2x) - H(x)$$

$$= H(U(x)) - H(x) \quad \text{avec} \quad U(x) = 2x$$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet U \text{ est dérivable sur } \left] 0, \frac{1}{2} \right[\\ \bullet H \text{ est dérivable sur }]0, 1[\\ \bullet \forall x \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[, U(x) = 2x \in]0, 1[\end{array} \right\} \Rightarrow H \circ U \text{ est dérivable sur } \left] 0, \frac{1}{2} \right[$$

par suite $f = H \circ U - H$ est dérivable sur $\left] 0, \frac{1}{2} \right[$

$$\text{et } f'(x) = U'(x) \cdot H'(U(x)) - H'(x)$$

$$f'(x) = 2 \cdot h(2x) - h(x) = \frac{2}{\text{Log} 2x} - \frac{1}{\text{Log} x}$$

$$= \frac{2\text{Log} x - \text{Log} 2x}{\text{Log} x \cdot \text{Log} 2x} = \frac{\text{Log}(x^2) - \text{Log} 2x}{\text{Log} x \cdot \text{Log} 2x} = \frac{\text{Log}\left(\frac{x}{2}\right)}{\text{Log} x \cdot \text{Log} 2x}$$

$$3) \forall x \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[\text{ on a } 2x > x$$

La valeur moyenne de h sur $[x, 2x]$ est $\overline{h} = \frac{1}{x} \int_x^{2x} h(t) dt$ $\overline{h} = \frac{1}{x} \cdot f(x)$

D'après le théorème de la moyenne il existe $C \in [x, 2x]$

$$\text{tel que } h(C) = \overline{h} = \frac{f(x)}{x} \text{ or } h(C) = \frac{1}{\text{Log} C} \text{ d'où } \frac{1}{\text{Log} C} = \frac{f(x)}{x}$$

On a : $x \leq C \leq 2x$ alors $\text{Log} x \leq \text{Log} C \leq \text{Log} 2x$

$$\frac{1}{\text{Log} x} \geq \frac{1}{\text{Log} C} \geq \frac{1}{\text{Log} 2x}$$

$$\frac{1}{\text{Log} x} \geq \frac{f(x)}{x} \geq \frac{1}{\text{Log} 2x} \text{ comme } x > 0 \quad \frac{x}{\text{Log} x} \geq f(x) \geq \frac{x}{\text{Log} 2x}$$

$$4) a) \bullet \lim_{0^+} \frac{x}{\text{Log} x} = 0 \text{ et } \lim_{0^+} \frac{x}{\text{Log} 2x} = 0$$

$$\text{et } \frac{x}{\text{Log} 2x} \leq f(x) \leq \frac{x}{\text{Log} x} \text{ donc } \lim_{0^+} f(x) = 0 = f(0)$$

par suite f est continue en 0.

$$\bullet \lim_{0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{0^+} \frac{f(x)}{x}$$

$$\text{Comme } \frac{1}{\text{Log} 2x} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{1}{\text{Log} x} \text{ et } \lim_{0^+} \frac{1}{\text{Log} x} = \lim_{0^+} \frac{1}{\text{Log} 2x} = 0$$

$$\text{d'où } \lim_{0^+} \frac{f(x)}{x} = 0 \text{ donc } f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f'(0) = 0$$

$$b) x \in \left] 0, \frac{1}{2} \right[\text{ alors } 2x \in] 0, 1[\text{ donc } \text{Log} x < 0 \text{ et } \text{Log} 2x < 0$$

$$\frac{x}{2} \in \left] 0, \frac{1}{4} \right[\text{ alors } \operatorname{Log} \frac{x}{2} < 0$$

donc $f'(x) < 0$ par suite f est strictement décroissante sur $\left] 0, \frac{1}{2} \right[$.



1) a) $U_2 = U_1 + 1 = \frac{3}{2}$, $U_3 = U_2 + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}$, $U_4 = \frac{25}{12}$

b) $U_n = U_{n-1} + \frac{1}{n} \Leftrightarrow U_n - U_{n-1} = \frac{1}{n}$

$$\sum_{k=2}^n U_k - \sum_{k=2}^n U_{k-1} = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k}$$

$$U_n - U_1 = \sum_{k=2}^n \frac{1}{k} \text{ or } U_1 = 1 \text{ d'où } U_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

2) a) $k \geq 1$; $k \leq x \leq k+1 \Leftrightarrow \frac{1}{k+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{k}$ d'où $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$

b) $\frac{1}{k+1} \leq \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{k}$

alors $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_k^{k+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$

$$U_n - 1 \leq \int_1^n \frac{1}{x} dx \leq U_n - \frac{1}{n}$$

$$\text{D'où } U_n - 1 \leq \operatorname{Log} n \leq U_n - \frac{1}{n}$$

$$-U_n + \frac{1}{n} \leq -\operatorname{Log} n \leq -U_n + 1$$

$$\frac{1}{n} \leq U_n - \operatorname{Log} n \leq 1$$

$$0 < \frac{1}{n} \leq V_n \leq 1 \text{ d'où } 0 < V_n \leq 1.$$

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= U_{n+1} - \operatorname{Log}(n+1) - U_n + \operatorname{Log} n \\ &= U_{n+1} - U_n + [\operatorname{Log} n - \operatorname{Log}(n+1)] \\ &= \frac{1}{n+1} - \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \leq 0 \text{ Car } \int_n^{n+1} \frac{1}{x} dx \geq \frac{1}{n+1} \text{ d'après 2) a)} \end{aligned}$$

D'où (V_n) est décroissante et comme elle est minorée par 0 d'où (V_n) est convergente vers δ .

b) On a $V_n = U_n - \operatorname{Log} n \Leftrightarrow U_n = V_n + \operatorname{Log} n.$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n + \text{Log } n = +\infty. \text{ Car } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \delta \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \text{Log } n = +\infty.$$

20

1) Voir figure

2) U_n est la somme des aires des rectangles des cotés $\frac{1}{n}$ et $1 + \frac{1}{n}$ situés au

dessus de ζ donc $\int_1^2 \frac{1}{x} dx \leq U_n$

V_n est la somme des aires des rectangles situés au dessous de ζ

donc $\int_1^2 \frac{1}{x} dx \geq V_n$ d'où $V_n \leq \int_1^2 \frac{1}{x} dx \leq U_n$

3) a) $\int_1^2 \frac{1}{x} dx = \text{Log } 2$

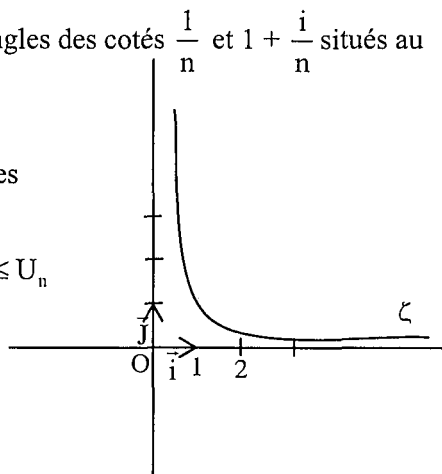
b) $U_5 = 0,7457$ et $V_5 = 0,6456$

$U_{10} = 0,71878$ et $V_{10} = 0,59245$

On sait que $\forall n, V_n \leq \int_1^2 \frac{1}{x} dx \leq U_n$ donc $V_n \leq \text{Log } 2 \leq U_n$

$V_{10} \leq \text{Log } 2 \leq U_{10}$ et $V_5 \leq \text{Log } 2 \leq U_5$

$0,59245 \leq \text{Log } 2 \leq 0,71878$ et $0,6456 \leq \text{Log } 2 \leq 0,7457$



21

1) On pose $\begin{cases} u(x) = \text{Log } x \\ V'(x) = 1 \end{cases} ; \begin{cases} u'(x) = \frac{1}{x} \\ V(x) = x \end{cases}$

$$I = [x \text{Log } x]_1^e - \int_1^e \frac{1}{x} \times x dx = e - [x]_1^e = e - (e - 1) = 1.$$

2) $H(x) = -\frac{1}{x} \text{Log}^2 x - \frac{2}{x} \text{Log } x - \frac{2}{x}$, avec $x \in]0, +\infty[$

$$H'(x) = \frac{1}{x^2} \text{Log}^2 x - \frac{1}{x} \times \frac{2}{x} \text{Log } x + \frac{2}{x^2} \text{Log } x - \frac{2}{x} \times \frac{1}{x} + \frac{2}{x^2}.$$

$$H'(x) = \frac{\text{Log}^2 x}{x^2}. H \text{ est donc bien une primitive de } h: x \mapsto \frac{\text{Log}^2 x}{x^2} \text{ sur }]0, +\infty[$$

$$D'ou : \int_1^e \frac{\text{Log}^2 x}{x^2} dx = [H(x)]_1^e = H(e) - H(1) = -\frac{5}{e} + 2 \text{ sur } [1; e], f(x) > 0.$$

$$\text{On a donc } V = \pi \int_1^e f^2(x) dx = \pi \int_1^e (x^2 + (\frac{\text{Log } x}{x})^2 + 2 \text{Log } x) dx$$

$$V = \pi \left(\left[\frac{x^3}{3} + H(x) \right]_1^e + 2 \right) = \pi \left(\frac{e^3}{3} - \frac{5}{e} + \frac{11}{3} \right) \text{ u.v d'où } V = 27\pi \left(\frac{e^3}{3} - \frac{5}{e} + \frac{11}{3} \right) \text{ cm}^3.$$

22) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = +\infty$ (facile) et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}} \right)^2 = 0$

2) $f'(x) = \frac{2 \ln x - (\ln x)^2}{x^2}$ du signe de $\ln x (2 - \ln x)$, d'où le tableau :

x	0	1	e^2	$+\infty$	
f'	-	0	+	0	-
f	$+\infty$			$\frac{4}{e^2}$	0

Diagram illustrating the function values and their derivatives at critical points:

- At $x=0$, $f' < 0$ and $f = +\infty$.
- At $x=1$, $f' = 0$ and $f = 0$.
- At $x=e^2$, $f' > 0$ and $f = \frac{4}{e^2}$.
- At $x \rightarrow +\infty$, $f' < 0$ and $f = 0$.

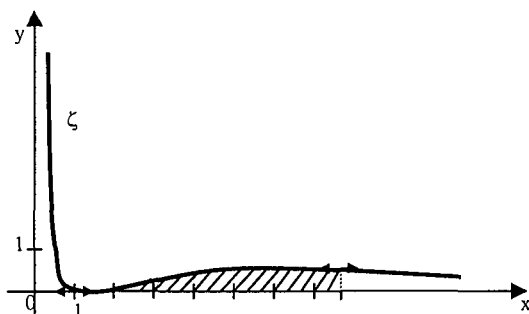
Arrows indicate the flow of the function: from $+\infty$ at $x=0$ down to 0 at $x=1$, then up to $\frac{4}{e^2}$ at $x=e^2$, and finally down to 0 at $x \rightarrow +\infty$.

4) a)
$$\begin{cases} u(x) = \ln x & u'(x) = \frac{1}{x} \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} & v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

$$I_1 = \left[-\frac{1}{x} \ln x \right]_1^{e^2} + \int_1^{e^2} \frac{1}{x^2} dx$$

$$= -\frac{2}{e^2} + \left[-\frac{1}{x} \right]_1^{e^2} = -\frac{2}{e^2} - \frac{1}{e^2} + 1,$$

soit $I_1 = 1 - \frac{3}{e^2}$ (environ 0,594).



b)
$$\begin{cases} u(x) = (\ln x)^{p+1} & u'(x) = (p+1) \times \frac{1}{x} \times (\ln x)^p \\ v'(x) = \frac{1}{x^2} & v(x) = -\frac{1}{x} \end{cases}$$

d'où $I_{p+1} = \left[-\frac{1}{x} (\ln x)^{p+1} \right]_1^{e^2} + (p+1) \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^p}{x^2} dx,$

c'est-à-dire $I_{p+1} = -\frac{2^{p+1}}{e^2} + (p+1)I_p.$

c) $I_2 = \frac{2^2}{e^2} + 2(1 - \frac{3}{e^2}) = 2 - \frac{10}{e^2} \approx 0,64$, et $I_3 = -\frac{2^3}{e^2} + 3(2 - \frac{10}{e^2}) = 6 - \frac{38}{e^2} \approx 0,857$;

$I_4 = -\frac{2^4}{e^2} + 4(6 - \frac{38}{e^2}) = 24 - \frac{168}{e^2} \approx 1,264.$

d) $V = \int_1^{e^2} \pi [f(x)]^2 dx = \pi \int_1^{e^2} \frac{(\ln x)^4}{x^2} dx = \pi I_4$ donc $V = \pi(24 - \frac{168}{e^2}) \approx 3,970$ u.v.