

ENONCES



L'ensemble $\mathcal{W}$ est muni d'une base $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Dans chacun des cas suivants, dire si les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$ sont coplanaires :

$$1) \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$2) \vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ -3/2 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$3) \vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$



L'espace ζ est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(4, -5, 1)$; $B(0, 4, 3)$; $C(-2, 7, 0)$ et $D(0, 0, 7)$.

Etudier la position relative des droites (AB) et (CD) dans l'espace.



L'espace ζ est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne les points $A(0, 2, 1)$; $B(-1, 1, 2)$ et $C(3, 4, 0)$

1) a) Montrer que les points A , B et C ne sont pas alignés.

b) Donner une représentation paramétrique du plan $P(A, \overline{AB}, \overline{AC})$.

c) Déterminer une équation cartésienne du plan $P(A, \overline{AB}, \overline{AC})$.

2) Soit le point $D(0, 2, 5)$.

a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AD)

b) Etudier la position relative de la droite (AD) et du plan $P(A, \overline{AB}, \overline{AC})$



Soit la droite $D : \begin{cases} x = -3 + 4\alpha \\ y = 4 - \alpha \\ z = -9 - 5\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$

1) Etudier l'intersection de la droite D avec le plan $P : 2x + 3y + z + 3 = 0$.

- 2) Etudier la position de la droite D avec le plan $P' : x - z = 0$
puis déterminer $\Delta \cap P'$.



Soient les plans P, Q et R d'équation respectives $\frac{x}{2} + \frac{y}{5} - \frac{z}{7} - 3 = 0$;

$$x + y + z + 1 = 0 \text{ et } 35x + 14y - 10z - 210 = 0$$

- 1) Déterminer a pour que le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ a \\ 0 \end{pmatrix}$ soit un vecteur de P.
- 2) On considère le vecteur $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$. $\vec{v}$ est il un vecteur de P ? de Q ? Conclure.
- 3) a) $\vec{v}$ est il un vecteur de R ?
- b) Soit $\vec{w} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -21 \end{pmatrix}$, montrer que $(\vec{v}, \vec{w})$ est un base de P.
- c) $\vec{w}$ est il un vecteur de R ? Conclure.



Soient P, Q et R trois plans tels que :

$$P : x + 10y - 3z - 5 = 0$$

$$Q : 2x - y + 2z - 2 = 0$$

$$R : 3x + 6y + z + \frac{3}{7} = 0$$

- 1) Déterminer l'intersection deux à deux des trois plans.
- 2) Déterminer l'intersection des plans P, Q et R.



$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère ; $A(1,1,2)$; $B(1,2,-1)$; $C(0,-1,2)$ et $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$.

- 1) Déterminer les représentations paramétriques des droites suivantes (AC)
et de la droite D passant par B de vecteurs directeur $\vec{u}$.
- 2) Déterminer la position de D et (AC).
- 3) Soit P le plan d'équation $2x - y + z + 1 = 0$. Déterminer les intersections
suivantes: $P \cap D$ et $P \cap (AC)$.



L'espace étant rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère

le plan P d'équation : $x-y+2z-12=0$, la droite Δ contenant le point

$\Omega(1,1,p)$ et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$ où p et m sont des réels. Alors:

- 1) Si $m \neq 1$ alors pour tout point $p \in \mathbb{R}$, l'intersection de Δ et P est un point.
- 2) Si $p=6$ alors pour tout $m \in \mathbb{R}$, l'intersection de Δ et P est un point.
- 3) Si $p \neq 6$ alors pour tout $m \in \mathbb{R}$, $\Delta \cap P = \emptyset$.
- 4) Si $m=1$ et $p=6$ alors $\Delta \cap P = \Delta$.
- 5) Si $m=1$ et $p \neq 6$ alors $\Delta \cap P = \emptyset$.

Répondre par vrai ou faux chacune des assertions précédentes en justifiant votre réponse.



L'espace $\mathcal{E}$ est rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

$A(1,-2,-4)$; $B(2,-5,5)$ et les vecteurs $\vec{u}=2\vec{i}+(m+3)\vec{j}+(9-m)\vec{k}$;

$\vec{v}=\vec{i}+(m+1)\vec{j}+4m\vec{k}$. Soit D et D' les droites $(A, \vec{u})$ et $(B, \vec{v})$.

Indiquer pour quelles valeurs du paramètre m :

- 1) Les deux droites D et D' sont parallèles (on précisera si D et D' sont strictement parallèles ou confondues).
- 2) Les deux droites D et D' sont sécantes.
- 3) Les deux droites D et D' ne sont pas coplanaires



L'espace $\mathcal{E}$ est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère

les vecteurs $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\cos \alpha \end{pmatrix}$; $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ et le point $A(0,0,\cos \alpha)$ où α désigne un paramètre réel.

- 1) Vérifier que pour tout réel α , $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires. Ecrire une équation cartésienne du plan P dont un repère est $(A, \vec{u}, \vec{v})$.
- 2) Soit Δ la droite dont un repère est $(O, \vec{w})$ où $\vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

- a) Etudier suivant les valeurs de α l'intersection de P et Δ .
 b) Lorsque P et Δ sont sécants, déterminer les coordonnées de leur point d'intersection



L'espace $\mathcal{E}$ rapporté au repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on donne l'ensemble

$$E_\alpha = \{M(x, y, z) \in \mathcal{E} \text{ tel que } (\cos 2\alpha)x + (\cos \alpha)y + (2\cos \alpha - 1)z = 0 \text{ où } \alpha \in [0, 2\pi]\}$$

- 1) Montrer que pour tout $\alpha \in [0, 2\pi]$, E_α est un plan.
- 2) Déterminer α pour que E_α contient le point $A(1, -1, 0)$.
- 3) Soit (D) la droite d'équations cartésiennes
$$\begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$
 - a) Etudier la position relative de E_0 et de (D) (E_0 étant E_α pour $\alpha = 0$).
 - b) Etudier la position relative de $E_{\frac{\pi}{3}}$ et de (D) .
- 4) Soit Q le plan passant par $B(0, 0, 1)$ et contenant la droite (D) définie dans 3) Déterminer l'ensemble des réels α pour les quels E_α est parallèle au plan Q .



L'espace est muni d'un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soit P_1 le plan

d'équation: $x - y\sqrt{3} + \sqrt{3}z = 0$ et le plan $P_2 : x\sqrt{3} - y + 1 = 0$.

- 1) Montrer que l'axe (Oz) est parallèle à P_1 et à P_2 . En déduire la position relative de P_1 et de P_2 par rapport au plan (xoy) .
- 2) Déterminer les droites D_1 et D_2 , intersections respectives de P_1 et P_2 avec (xoy) . Donner pour chaque droite un système d'équation paramétriques.
- 3) Le plan (xoy) est muni du repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Déterminer une mesure de

l'angle des droites D_1 et D_2 où $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ sont deux vecteurs directeurs de D_1 et D_2 .

CORRIGES

$$\nabla 1) \det (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 24 + 8 = -12 \neq 0$$

donc $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont non coplanaires.

$$2) \det (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & -\frac{3}{2} & -1 \\ 4 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -\frac{3}{2} & -1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} + 4 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -\frac{3}{2} & -1 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-\frac{3}{2} - 2) - 3(-1 + 2) + 4(1 + \frac{3}{2}) = -3 - 4 + 3 - 6 + 4 + 6 = 0$$

donc $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires.

$$3) \det (\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & -2 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= (-2) \cdot (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + 1 \cdot (-1) \cdot 2 - 1 \cdot (-1) \cdot 1 - (-2) \cdot 2 \cdot 2 - 1(-1) \cdot 1$$

$$= 2 + 2 - 2 + 1 + 8 + 1 = 12 \neq 0 \text{ donc } \vec{u}, \vec{v}, \vec{w} \text{ non coplanaires.}$$

$$\nabla 2) \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -4 \\ 9 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ directeur de (AB) et } \overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ directeur de (CD)}$$

$$\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 9 & -7 \end{vmatrix} = 28 - 18 = 10 \neq 0 \text{ alors } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CD} \text{ sont non colinéaires}$$

Donc (AB) et (CD) soient elles sont sécantes soient non coplanaires.

$$* M(x, y, z) \in (AB) \cap (CD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{CM} = \beta \overrightarrow{CD}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -4\alpha + 4 \\ y = 9\alpha - 5 \\ z = 2\alpha + 1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} x = 2\beta \\ y = -7\beta \\ z = 7\beta + 7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -4\alpha + 4 = 2\beta & (1) \\ y = 9\alpha - 5 = -7\beta & (2) \\ z = 2\alpha + 1 = 7\beta + 7 & (3) \end{cases}$$

$$(1) \begin{cases} -4\alpha + 4 = 2\beta \\ 9\alpha - 5 = -7\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\alpha + 2 = \beta \\ 9\alpha - 5 = -7(-2\alpha + 2) \end{cases}$$

$$9\alpha - 5 = 14\alpha - 14 \text{ donc } 5\alpha = 9$$

$$\alpha = \frac{9}{5} \text{ donc } \beta = -2\alpha + 2 = -\frac{18}{5} + 2 = -\frac{8}{5} \text{ or } 2\alpha + 1 = 7\beta + 7$$

$$\frac{18}{5} + 1 = -\frac{56}{5} + 7$$

$$\frac{23}{5} = -\frac{21}{5} \text{ impossible}$$

$$\text{donc } (AB) \cap (CD) = \emptyset$$

Conclusion: $(AB) \cap (CD) = \emptyset$ et $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}$ non colinéaires

Donc (AB) et (CD) non coplanaires



$$1) a) \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 3 = 1 \neq 0 \text{ donc } \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ non colinéaires}$$

d'où A, B, C non alignés.

$$b) M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$$

$$\text{d'où } P : \begin{cases} x = -\alpha + 3\beta \\ y = -\alpha + 2\beta + 2 \\ z = \alpha - \beta + 1 \end{cases}, (\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$$

$$c) M \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ sont coplanaires} \Leftrightarrow \det(\overrightarrow{AM}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x & -1 & 3 \\ y-2 & -1 & 2 \\ z-1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} - (y-2) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + (z-1) \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow x(1-2) - (y-2)(1-3) + (z-1)(-2+3) = 0$$

$$\Leftrightarrow -x + 2y + z - 5 = 0 \text{ équation cartésienne de } P.$$

$$2) a) \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 0-0 \\ 2-2 \\ 5-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$M \in (AD) \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AD} \text{ d'où } (AD): \begin{cases} x=0 \\ y=2 \\ z=4\alpha+1 \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$b) -x_D + 2y_D + z_D - 5 = 4 \neq 0 \Rightarrow D \notin P \text{ et comme } A \in P \cap (DA)$$

$$\text{alors } P \cap (AD) = \{A\}$$

ainsi P et (AD) sont sécants.

$$\begin{array}{l} \nabla 4 \quad 1) M(x, y, z) \in D \cap P \\ \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + 4\alpha \\ y = 4 - \alpha \quad \text{et } 2x + 3y + z + 3 = 0 \\ z = -9 - 5\alpha \end{cases} \end{array}$$

On remplace x par $-3 + 4\alpha$ et y par $4 - \alpha$ et z par $-9 - 5\alpha$ dans $2x + 3y + z + 3 = 0$

On obtient $-6 + 8\alpha + 12 - 3\alpha - 9 - 5\alpha + 3 = 0 \Leftrightarrow 0 = 0$

donc pour toute valeur de α

ainsi $P \cap D = D$

$$2) M(x, y, z) \in D \cap P' \Leftrightarrow \begin{cases} x = -3 + 4\alpha \\ y = 4 - \alpha \quad \text{et } x - z = 0 \\ z = -9 - 5\alpha \end{cases}$$

$$x - z = 0$$

$$(-3 + 4\alpha) - (-9 - 5\alpha) = 0$$

$$9\alpha + 6 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{2}{3}$$

donc D et P' sont sécants

$$* \alpha = -\frac{2}{3} \text{ alors } x = -3 + 4 \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{17}{3}$$

$$\text{et } y = 4 + \frac{2}{3} = \frac{14}{3} \text{ et } z = -9 + \frac{10}{3} = -\frac{17}{3}$$

$$\text{donc } D \cap P' = \left\{ \left(-\frac{17}{3}, \frac{14}{3}, -\frac{17}{3} \right) \right\}$$

$$\nabla 5 \quad 1) \vec{u} \begin{pmatrix} 4 \\ a \\ 0 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur de } P \Leftrightarrow \frac{4}{2} + \frac{a}{5} - 3 = 0 \Leftrightarrow \frac{a}{5} = 1 \Leftrightarrow a = 5$$

$$2) \vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ alors } \vec{U} = \vec{V}$$

donc $\vec{V}$ est un vecteur de P.

$4 + 5 + 1 = 10 \neq 0 \Rightarrow \vec{V}$ n'est pas un vecteur de Q

ainsi P et Q sont sécants

$$3) a) 35 \times 4 + 14 \times 5 - 210 = 140 + 70 - 210 = 0$$

donc $\vec{v}$ est un vecteur de R.

$$b) \vec{w} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \\ -21 \end{pmatrix} \vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ -21 & 0 \end{vmatrix} = -5 \times (-21) \neq 0$$

donc $\vec{w}$, $\vec{v}$ non colinéaires or $\vec{v}$ est un vecteur de P.

$$\text{pour } \vec{w} : \frac{-6}{2} + \frac{0}{5} - \frac{-21}{7} = -3 + 3 = 0$$

donc $\vec{w}$ est un vecteur de P

par suite $(\vec{v}, \vec{w})$ est une base de P.

$$c) 35 \times (-6) + 14 \times 0 - 10 \times (-21) = -210 + 210 = 0$$

donc $\vec{w}$ est un vecteur de R or $\vec{v}$ est un vecteur de R

donc $(\vec{v}, \vec{w})$ est une base de R or $(\vec{v}, \vec{w})$ est une base de P.

par suite $R \parallel P$ or le point $(0, 0, -21)$ vérifie les deux équations de P et de R.

donc $P = R$



$$1) * \frac{1}{2} \neq \frac{10}{-1} \text{ donc P et Q sont sécants}$$

$$\text{selon une droite } \Delta : \begin{cases} x + 10y - 3z - 5 = 0 \\ 2x - y + 2z - 2 = 0 \end{cases}$$

$$* \frac{1}{3} \neq \frac{10}{6} \text{ donc P et R sont sécants}$$

$$\text{selon une droite } \Delta' : \begin{cases} x + 10y - 3z - 5 = 0 \\ 3x + 6y + z + \frac{3}{7} = 0 \end{cases}$$

$$* \frac{2}{3} \neq \frac{-1}{6} \text{ donc Q et R sont sécants}$$

$$\text{selon une droite } \Delta'' : \begin{cases} 2x - y + 2z - 2 = 0 \\ 3x + 6y + z + \frac{3}{7} = 0 \end{cases}$$

2) Soit $M \in P \cap Q \cap R$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x + 10y - 3z - 5 = 0 \\ 2x - y + 2z - 2 = 0 \\ 3x + 6y + z + \frac{3}{7} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 10y = 3z + 5 & (1) \\ 2x - y = -2z + 2 & (2) \\ 3x + 6y + z + \frac{3}{7} = 0 & (3) \end{cases}$$

$$2 \times (1) - (2) \Rightarrow 21y = 8z + 8$$

$$y = \frac{8z + 8}{21}$$

$$(1) \Rightarrow x = 3z + 5 - 10y = 3z + 5 - 10 \frac{8z + 8}{21}$$

$$x = \frac{-17z - 25}{21}$$

on remplace dans (3) on obtient : $\frac{-17z - 25}{7} + \frac{16z + 16}{7} + z + \frac{3}{7} = 0$

$$\frac{6}{7}z - \frac{6}{7} = 0 \text{ donc } z = 1 \text{ d'où } x = \frac{-17 - 25}{21} = -2 \text{ et } y = \frac{8 + 8}{21} = \frac{16}{21}$$

$$\text{Ainsi } P \cap Q \cap R = \{A(-2, \frac{16}{21}, 1)\}$$

$$\nabla 7 \quad A(1, 1, 2); B(1, 2, -1); C(0, -1, 2); \vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

*Soit $M(x, y, z) \in (AC)$ signifie qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que:

$$\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AC} \text{ or } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ d'où } \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 1 - 2\alpha \\ z = 2 \end{cases}$$

*Soit $M(x, y, z) \in D(\vec{B}, \vec{u})$ signifie qu'il existe $\beta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\overrightarrow{BM} = \beta \vec{u} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\beta + 1 \\ y = -5\beta + 2 \\ z = 2\beta - 1 \end{cases} \text{ d'où } D: \begin{cases} x = 3\beta + 1 \\ y = -5\beta + 2 \\ z = 2\beta - 1 \end{cases} \text{ avec } \beta \in \mathbb{R}$$

2) $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ est le vecteur directeur de la droite de la droite (AC)

$\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ est le vecteur directeur de la droite de la droite D.

$$\begin{vmatrix} -2 & -5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \text{ donc les vecteurs } \overrightarrow{AC} \text{ et } \vec{u} \text{ sont non colinéaires et par}$$

suite les droites D et (AC) ne sont pas parallèles.

$$\text{Soit } M(x, y, z) \in (AC) \cap D \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\alpha + 1 = 3\beta + 1 & (1) \\ y = -2\alpha + 1 = -5\beta + 2 & (2) \\ z = 2 = 2\beta - 1 & (3) \end{cases}$$

L'équation (3) donne $\beta = \frac{3}{2}$ et (1) donne $\alpha = -3\beta = -\frac{9}{2}$.

En remplaçant dans (2): $9 + 1 = -5 \times \frac{3}{2} + 2 \Leftrightarrow 10 = -\frac{11}{2}$ impossible d'où $D \cap (AC) = \emptyset$.

Conclusion :

$$D \cap (AC) = \emptyset$$

D et (AC) sont non parallèles

donc les droites D et (AC)
ne sont pas coplanaires.

$$3) P: 2x - y + z + 1 = 0.$$

$$\text{Soit } M(x, y, z) \in P \cap (AC) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\alpha + 1 & (1) \\ y = -2\alpha + 1 & (2) \\ z = 2 & (3) \\ 2x - y + z + 1 = 0 & (4) \end{cases}$$

En remplaçant (1), (2) et (3) dans (4) on obtient :

$$-2\alpha + 2 + 2\alpha - 1 + 2 + 1 = 0 \Leftrightarrow 4 = 0 \text{ impossible. Donc } P \cap (AC) = \emptyset.$$

$$\text{Soit } M(x, y, z) \in P \cap D \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3\beta + 1 & (1) \\ y = -5\beta + 2 & (2) \\ z = 2\beta - 1 & (3) \\ 2x - y + z + 1 = 0 & (4) \end{cases}$$

En remplaçant (1), (2) et (3) dans (4) on obtient :

$$6\beta + 2 + 5\beta - 2 + 2\beta - 1 + 1 = 0 \Leftrightarrow 13\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 0 \text{ d'où } P \cap D = \{B(1, 2, -1)\}$$



Dans L'espace ξ étant rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère

le plan P d'équation : $x - y + 2z - 12 = 0$ et la droite Δ contenant le point

$$\Omega(1, 1, p) \text{ et de vecteur directeur } \vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}.$$

* L'intersection de P et de Δ est un point si Δ et P ne sont pas parallèles.

$\vec{u} \begin{pmatrix} -1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur de P si et seulement si: $-1 - m + 2 = 0$ c'est à dire $m = 1$

et par suite Δ est parallèle à P .

On déduit que si $m \neq 1$, Δ n'est pas parallèle à P

donc l'intersection de Δ et de P est un point. Donc l'assertion (1) est exacte.

* Par contre si $P = 6$ et $m = 1$, Δ est parallèle à P ; l'intersection de Δ et P n'est pas un point.

Donc l'assertion (2) est fausse.

* Si $p \neq 6$ et $m \neq 1$, alors Δ coupe P en un point. On n'a donc pas, si $p \neq 6$,

$\Delta \cap P = \emptyset$ pour tout point m donc l'assertion (3) est fausse.

* Etudions le cas $m=1$, où Δ et P sont parallèles alors on a soit

$\Delta \cap P = \emptyset$, soit $\Delta \subset P$ or $\Delta \subset P$ correspond au cas où $\Omega \in P$.

On sait que: $\Omega \in P \Leftrightarrow 1-1-2p-12=0 \Leftrightarrow p=6$.

On déduit que $\begin{cases} \text{si } m=1 \text{ et } p=6 \text{ alors } \Delta \subset P \\ \text{si } m=1 \text{ et } p \neq 6 \text{ alors } \Delta \cap P = \emptyset \end{cases}$

Donc les assertions (4) et (5) sont exactes.



1) D et D' sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ m+3 & m+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 9-m & 4m \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} m+3 & m+1 \\ 9-m & 4m \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow m-1=0 \text{ et } 9m-9=0 \text{ et } 4m(m+3)-(m+1)(9-m)=0 \Leftrightarrow m=1.$$

$$* A \in D \text{ a-t-on } A \in D'? ; A \in D' \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha+2=1 \\ 2\alpha-5=-2 \\ 4\alpha+5=-4 \end{cases} \Leftrightarrow \alpha=-1=\frac{3}{2} \text{ impossible}$$

donc $A \notin D'$ d'où D et D' sont strictement parallèles.

2) D et D' sont sécantes si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont non colinéaires et $D \cap D' \neq \emptyset$.

$$\vec{u} \text{ et } \vec{v} \text{ non colinéaires} \Leftrightarrow m \neq 1$$

$$D: \begin{cases} x=1+2\alpha \\ y=-2+(m+3)\alpha \\ z=-4+(9-m)\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} ; D': \begin{cases} x=2+\beta \\ y=-5+(m+1)\beta \\ z=5+4m\beta \end{cases} \beta \in \mathbb{R}$$

$$M \in D \cap D' \Leftrightarrow \begin{cases} x=1+2\alpha=2+\beta & (1) \\ y=-2+(m+3)\alpha=-5+(m+1)\beta & (2) \\ z=-4+(9-m)\alpha=5+4m\beta & (3) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow \beta = 2\alpha - 1$$

$$(2) \Leftrightarrow -2+(m+3)\alpha = -5+(m+1)(2\alpha-1) \Leftrightarrow \alpha = \frac{m+4}{m-1}$$

$$\text{d'où } \beta = \frac{2m+8}{m-1} - 1 = \frac{m+9}{m-1}$$

Pour avoir une intersection il suffit que α et β vérifie l'équation (3) :

$$-4 + (9-m) \frac{m+4}{m-1} = 5 + 4m \left(\frac{m+9}{m-1} \right)$$

$$\Leftrightarrow 5m^2 + 40m - 45 = 0 \Leftrightarrow m^2 + 8m - 9 = 0 \Leftrightarrow m = 1 \text{ ou } m = -9$$

comme $m \neq 1$ donc $m = -9$.

Finalement D et D' sont sécantes si et seulement si $m = -9$.

3) D et D' ne sont pas coplanaires si et seulement si $m \neq -9$ et $m \neq 1$.

1) $\begin{vmatrix} 10 \\ 1 \\ 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ donc $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -\cos \alpha \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \sin \alpha \end{pmatrix}$ ne sont pas colinéaires.

$$M(x, y, z) \in P \Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = t \vec{u} + t' \vec{v}.$$

$$P : \begin{cases} x = t \\ y = t' \\ z = -t \cos \alpha + t' \sin \alpha + \cos \alpha \end{cases}; (t, t') \in \mathbb{R}^2.$$

$$P : z = -x \cos \alpha + y \sin \alpha + \cos \alpha. \text{ Ou encore } P : -x \cos \alpha + y \sin \alpha - z + \cos \alpha = 0.$$

$$2)a) \Delta = \Delta \left(O, \vec{w} \right); \vec{w} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Delta // P \Leftrightarrow \vec{w} \text{ est un vecteur de } P \Leftrightarrow -\cos \alpha + \sin \alpha - 1 = 0 \Leftrightarrow \cos \alpha - \sin \alpha = -1$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2} \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = -1 \Leftrightarrow \cos \left(\alpha + \frac{\pi}{4} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Leftrightarrow \alpha + \frac{\pi}{4} \equiv \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \text{ ou } \alpha + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + 2k\pi$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ ou } \alpha = -\pi + 2k\pi.$$

$$\Delta // P \Leftrightarrow \alpha \in \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi; \pi + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

$$* \text{ 1}^{\text{ère}} \text{ cas : } \alpha \in \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

P : $y - z = 0$ comme $O \in P$ donc D est contenue dans P d'où $D \cap P = D$.

$$* \text{ 2}^{\text{ème}} \text{ cas : } \alpha \in \{\pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$$

P : $x - z - 1 = 0$ comme $O \notin P$

alors D et P sont strictement parallèles.

$$* \text{ 3}^{\text{ème}} \text{ cas : } \alpha \in \mathbb{R} - \left\{ \frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi + 2k\pi \text{ avec } k \in \mathbb{Z} \right\} \text{ dans ce cas D et P}$$

sont sécants.

b) Soit le point I ; $\{I\} = P \cap D$.

$$I \in D \Leftrightarrow I(t, t, t). \quad I \in P \text{ donc } -t \cos \alpha + t \sin \alpha - t + \cos \alpha = 0$$

$$t(-\cos \alpha + \sin \alpha - 1) + \cos \alpha = 0$$

$$t = \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha + 1} \quad (\cos \alpha - \sin \alpha + 1 \neq 0)$$

$$\text{donc } I \left(\frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha + 1}, \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha + 1}, \frac{\cos \alpha}{\cos \alpha - \sin \alpha + 1} \right).$$



1) L'équation de E_α est de la forme $ax + by + cz + d = 0$ équation cartésienne d'un plan si et seulement si $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$.

$$* (a, b, c) = (0, 0, 0) \quad a = b = c = 0 \text{ ou encore } \cos 2\alpha = \cos \alpha = 2\cos \alpha - 1 = 0$$

alors $\cos \alpha = 0$ et $-2\cos \alpha - 1 = 0$ ce qui est impossible

$$\text{donc } (\cos 2\alpha, \cos \alpha, 2\cos \alpha - 1) \neq (0, 0, 0)$$

d'où E_α est un plan pour tout $\alpha \in [0, 2\pi]$.

$$2) A \in E_\alpha \Leftrightarrow \cos 2\alpha - \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow \cos 2\alpha = \cos \alpha$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha = \alpha + 2k\pi \text{ ou } 2\alpha = -\alpha + 2k\pi ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = 2k\pi \text{ ou } \alpha = \frac{2k\pi}{3} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{comme } \alpha \in [0, 2\pi] \text{ donc } \alpha \in \left\{ 0, 2\pi, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3} \right\}.$$

$$3) a) D : \begin{cases} x - y = 0 \\ z = 0 \end{cases} \text{ on pose } y = t \text{ alors } D : \begin{cases} x = t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} (t \in \mathbb{R})$$

$$E_0 : x + y + z = 0$$

$$M(x, y, z) \in D \cap E_0 \Leftrightarrow M(t, t, 0) \text{ et } t + t + 0 = 0 \Leftrightarrow M(0, 0, 0)$$

$$\text{donc } E_0 \cap D = \{O(0, 0, 0)\}.$$

$$b) E_{\frac{\pi}{3}} : -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y = 0 \text{ ou encore } E_{\frac{\pi}{3}} : x - y = 0 \text{ c'est l'une des équations de } D$$

$$\text{donc } D \subset E_{\frac{\pi}{3}} \text{ d'où } D \cap E_{\frac{\pi}{3}} = D.$$

$$4) B(0, 0, 1) \in Q \text{ et } D \subset Q \text{ alors } D \text{ passe par } O \text{ et de vecteur directeur } \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

donc $\vec{OB}$ et $\vec{u}$ sont deux vecteurs non colinéaires de Q

$$\left(\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \neq 0 \right) \text{ et } O \in Q \text{ d'où } Q \left(O, \vec{OB}, \vec{u} \right).$$

$Q // E_\alpha$ si et seulement si $\overrightarrow{OB}$ et $\vec{u}$ sont deux vecteurs de E_α

$$\text{ou encore } \begin{cases} 2 \cos \alpha - 1 = 0 \\ \cos 2\alpha + \cos \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ 2 \cos^2 \alpha - 1 + \cos \alpha = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ 2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos \alpha = \frac{1}{2} \\ \cos \alpha = -1 \text{ ou } \cos \alpha = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \cos \alpha = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ ou } \alpha = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi.$$

Comme $\alpha \in [0, 2\pi]$ donc $\alpha = \frac{\pi}{3}$ ou $\alpha = \frac{5\pi}{3}$.



1) L'axe (Oz) est représenté par le système $\begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$ or une droite dans

l'espace est parallèle à un plan fixé ou lui est sécante.

$$* M(x, y, z) \in (oz) \cap P_1 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x - y\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ 0 = \sqrt{3} \text{ impossible} \end{cases}$$

donc $(oz) \cap P_1 = \emptyset$ d'où (oz) est parallèle à P_1 .

$$* M(x, y, z) \in (oz) \cap P_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ x\sqrt{3} - y + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \\ 0 = 1 \text{ impossible} \end{cases}$$

donc $(oz) \cap P_2 = \emptyset$ d'où (oz) est parallèle à P_2 .

* Les plans P_1 et P_2 sont deux sécants au plan (xoy) car s'ils lui étaient parallèles, la droite (oz) perpendiculaire à (xoy) ne lui serait pas parallèles.

$$2) D_1 = P_1 \cap (xoy), M(x, y, z) \in D_1 \Leftrightarrow \begin{cases} z=0 \\ x - y\sqrt{3} + \sqrt{3} = 0 \end{cases}$$

$$\text{on pose } y = \lambda \text{ alors } D_1 : \begin{cases} x = \sqrt{3}\lambda - \sqrt{3} \\ y = \lambda \\ z = 0 \end{cases} (\lambda \in \mathbb{R})$$

$$D_2 = P_2 \cap (xOy),$$

$$* M(x, y, z) \in D_2 \Leftrightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x\sqrt{3} - y + 1 = 0 \end{cases}$$

on pose $x = \beta$ alors $D_2 : \begin{cases} x = \beta \\ y = \beta\sqrt{3} + 1 \\ z = 0 \end{cases} \quad (\beta \in \mathbb{R})$

3) D_1 et $D_2 \subset (xoy)$ et on a $\vec{u}_1 = \sqrt{3}\vec{i} + \vec{j}$ et $\vec{u}_2 = \vec{i} + \sqrt{3}\vec{j}$

donc $\vec{u}_1 \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ dans la base $\begin{pmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \end{pmatrix}$.

$$\vec{u}_1 \cdot \vec{u}_2 = 2\sqrt{3} = \|\vec{u}_1\| \cdot \|\vec{u}_2\| \cdot \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = 2 \times 2 \times \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$$

$$\text{par suite } \cos(\vec{u}_1, \vec{u}_2) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \cos \frac{\pi}{6}.$$

L'angle des droites D_1 et D_2 à pour mesure $\frac{\pi}{6}$.