

ENONCES

1 Déterminer les racines carrées des nombres complexes suivants :

a) $Z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$; b) $Z = 15$; c) $Z = \beta i$ ($\beta \in \mathbb{R}^*$) ;

d) $Z = 1 + \cos t + i \sin t$ où $t \in]0, \pi[$.

2 Résoudre dans $\mathbb{C}$ les équations suivantes :

a) $z^2 - 5z + 6 = 0$.

b) $z^2 \sin^2 \alpha + z \sin 2\alpha + 1 = 0$; (avec $\alpha \in]0, \pi[$).

c) $z^2 - (1 - 2i)z + 1 - 7i = 0$.

d) $(-4 - 2i)z^2 + (7 - i)z + 1 + 3i = 0$.

3 $z^2 + 2(1 - \cos a)z + 2(1 - \cos a) = 0$ avec $a \in [0, \pi]$.
Préciser le module et un argument de chaque solution.

4 Résoudre dans $\mathbb{C}$:

a) $-iz^2 + 2(1 + i)z + 5(2 + i) = 0$.

b) $(1 + i)z^2 + 2iz - 3i - 1 = 0$.

c) $(1 + \operatorname{tg}^2(\frac{\theta}{2}))z^2 + 4iz \operatorname{tg}(\frac{\theta}{2}) - 4 = 0$ avec $0 < \theta < \pi$.

d) $z^2 - (1 + m)(1 + i)z + i(m^2 + 1) = 0$ avec $m \in \mathbb{C}$.

5 Résoudre les équations dans $\mathbb{C}$:

a) $z^2 + \bar{z} - 1 = 0$.

b) $z^2 - 2\bar{z} + 1 = 0$.

6 Résoudre dans $\mathbb{C}$:

1) $z^4 + (3 - 6i)z^2 + 2(16 - 63i) = 0$.

2) $z^6 + (2i - 1)z^3 - 1 - i = 0$.

7 Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^8 + z^4 + 1 = 0$; $z^6 + z^3 + 1 = 0$.

8 Résoudre chaque équation sachant qu'elle admet une solution réelle :

1) $2z^3 - (1 + 2i)z^2 + (25i - 1)z + 13i = 0$.

2) $z^3 + (6i - 5)z + 12 + 18i = 0$.

9 Résoudre chaque équation sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure :

1) $(i - 1)z^3 - (5i - 11)z^2 - (43 + i)z + 9 + 37i = 0$.

2) $iz^3 + (2i - 1)z^2 - (i + 4)z + 3(2i - 1) = 0$.

3) $z^4 + 6z^3 + 17z^2 + 24z + 52 = 0$.

10 Résoudre chaque équation sachant qu'elle admet une solution imaginaire pure et une solution réelle :

1) $z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 - 8i(1+i)z - 5 = 0$.

2) $z^4 + 2iz^2 + 12(1+i)z - 45 = 0$.

11 1) Résoudre dans $\mathbb{C}$, $z^n = 1$.

2) En déduire les solutions des équations suivantes :

$(z+i)^n = (z-i)^n$ et $(z+1)^n = (z-1)^n$.

12 Résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^4 - 1 = 0$ et $z^4 + 1 = 0$.

13 1) Déterminer la racine 6^{ème} de 1 sous forme trigonométrique puis algébrique.

2) Résoudre l'équation : $Z^6 = 8i$.

3) Déduire $\cos \frac{\pi}{12}$ et $\sin \frac{\pi}{12}$.

14 1) On pose $Z = 1 + z + z^2 + z^3 + z^4$. Montrer que $Z = \frac{1-z^5}{1-z}$.

2) On pose $z = e^{\frac{2i\pi}{5}}$.

a) Calculer Z .

b) En déduire $S = 1 + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5}$.

3) a) Montrer que : $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} = 4 \cos^2 \frac{\pi}{5} - 2$

$\cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} = -2 \cos \frac{\pi}{5}$.

b) Déduire $\cos \frac{\pi}{5}$.

15 On considère l'application f de $\mathbb{C}$ dans $\mathbb{C}$, définie par :

$f(z) = z^3 + (-5+i)z^2 + (6-6i)z + 8i - 8$.

1) Démontrer que l'équation $f(z) = 0$ admet une solution réelle z_0 que l'on calculera.

2) Déterminer un polynôme du second degré P à coefficients complexes tel que : pour tout $z \in \mathbb{C}$, $f(z) = (z - z_0) \cdot p(z)$.

3) a) Démontrer que l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure z_2 .

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $f(z) = 0$

(on notera z_1 la solution différente de z_0 et z_2).

4) Dans le plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

On désigne par M_0 , M_1 et M_2 les points d'affixes respectives z_0 , z_1 et z_2 .

- Placer les points M_0 , M_1 et M_2 . Quelle est la nature du triangle $M_0M_1M_2$.
- Déterminer l'affixe du point M_3 tel que $M_0M_1M_2M_3$ soit un carré.

16

Soit θ un réel de l'ensemble de l'intervalle $]-\pi, \pi]$.

On pose $u = 3 \cos \theta - 5i \sin \theta$; $v = 5 \cos \theta - 3i \sin \theta$.

- Montrer que $v^2 - u^2$ est une constante que l'on précisera.
- Soit l'équation (E) : $2z^2 + (3\cos\theta - 5i \sin\theta)z - 2 = 0$.

On note z' et z'' les solutions de (E).

- Sans calculer z' et z'' , montrer que $\text{Arg } z' + \text{Arg } z'' \equiv \pi[2\pi]$.
 - Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) et donner les solutions sous forme exponentielle.
- Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points M' et M'' d'affixes respectives z' et z'' . Trouver les valeurs de θ pour les quels $OM'M''$ est un triangle rectangle en O.

17

1) Montrer que pour tout réel θ on a : $e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}} = 2 \cos(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}) \cdot e^{i(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4})}$.

- Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) :

$$z^2 - (2\cos\alpha + i)z + 1 - \sin\alpha + i\cos\alpha = 0 \text{ où } \alpha \in [0, \frac{\pi}{2}].$$

- Ecrire les solutions de (E) sous la forme exponentielle.
- On désigne par M_1 et M_2 les points d'affixes respectives $z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha$ et $z_2 = \cos\alpha + i(1 - \sin\alpha)$.
 - Montrer que M_2 appartient à un cercle ζ dont on précisera le centre et le rayon.
 - Soit M le symétrique de M_1 par rapport à l'axe des réels. Montrer que M_2 est l'image de M'' par une translation dont on précisera l'affixe du vecteur.

18

- Vérifier pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a : $1 + \sin 2\theta = (\cos\theta + \sin\theta)^2$.
- On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation $E_\theta : (1 + i)z^2 - 2(\cos\theta - \sin\theta)z + 1 - i = 0$ avec $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On notera z' et z'' les solutions de l'équations E_θ .
 - Sans calculer z' et z'' , montrer que $z' \cdot z'' = -i$. En déduire une relation entre $\text{Arg } z'$ et $\text{Arg } z''$.
 - Résoudre l'équation E_θ et écrire z' et z'' sous forme exponentielle.
- Soit A et B deux points du plan complexe muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ d'affixes respectives $z_A = \cos\theta + i\sin\theta$ et $z_B = -\sin\theta - i\cos\theta$

avec $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Déterminer θ pour que $(\overline{OA}, \overline{OB}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$.

En déduire alors la nature du triangle OAB.



- A) 1) Montrer que l'équation $z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = 0$ admet une solution imaginaire pure notée z_A , que l'on déterminera.
 2) Déterminer les autres racines z_B et z_C (z_B étant la racine ayant une partie imaginaire positive).
 3) Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$.

On note A, B et C les points d'affixes respectives z_A , z_B et z_C .

a) Montrer que les points A, B et C appartiennent à un cercle (ζ) que l'on précisera.

b) Montrer que OABC est un losange.

B) On pose $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$; A_1 le point du plan P d'axe z_1 .

On considère le point A_0 d'axe 1 et les points A_n d'axes :

$z_n = (z_1)^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

1) Calculer z_2 . Représenter A_0 , A_1 et A_2 dans P.

2) Montrer que $A_n \in \zeta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3) Démontrer que $z_{n+1} - z_n = (z_1)^n (-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2})$.

En déduire le module de $z_{n+1} - z_n$ puis la distance $A_n A_{n+1}$ et montrer que les triangles $OA_n A_{n+1}$ sont équilatéraux.



Soit $P(z) = (z + \frac{1}{2} + i)^2 + \frac{1}{4}$ ou $z \in \mathbb{C}$.

- 1) Développer $P(z)$.
 2) Factoriser $P(z)$, déduire les solutions de l'équation $P(z) = 0$.
 3) Le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$

On désigne par A(-1, -5) et $B(\frac{1}{3}, \frac{1}{6})$.

Soit $f: P \setminus \{A\} \rightarrow P$

$M(z) \mapsto M'(z')$ tels que $z' = \frac{3iz + \frac{1}{2} - i}{z + 1 + 5i}$.

a) Déterminer les points invariants par f.

b) Déterminer l'ensemble des points M tels que $|z|=3$.

21 1) Soit $\alpha = \sqrt{2} + \sqrt{2}i$. Déterminer la forme cartésienne de α^3

2) Soit l'équation (E) : $z^3 = 4\sqrt{2}i - 4\sqrt{2}$.

a) Donner les solutions de (E) sous forme trigonométrique puis algébrique.

b) Résoudre l'équation $z^3 = 1$.

c) En déduire les valeurs de $\cos \frac{11\pi}{12}$ et $\sin \frac{19\pi}{12}$.

22 Soit l'équation (E) : $az^4 + bz^3 + cz^2 + dz + e = 0$ avec a, b, c, d et e sont des réels et $a \neq 0$.

1) Montrer que si z_0 est une solution de (E) alors $\overline{z_0}$ est une solution de (E).

2) Soit $z_0 = \alpha(1 + i)$ avec α est un réel. z_0 est une solution de l'équation :

$$2z^4 + 3z^2 + 3\sqrt{3}z + 9 = 0.$$

Résoudre cette équation et donner les solutions sous forme exponentielle.

23 On considère le polynôme P de la variable complexe z défini par :
 $P(z) = z^4 - z^2 + z - 1$.

1) Mettre P(z) sous la forme : $P(z) = (z - 1)Q(z)$ où Q est un polynôme.

Montrer que Q(z) se met sous la forme : $Q(z) = (z + 1)R(z)$

où R est un polynôme que l'on déterminera.

2) Résoudre, dans C, l'équation $P(z) = 0$.

3) On appelle α la solution de partie imaginaire strictement positive calculer :
 $\alpha^2, \alpha^3, \alpha^4, \alpha^5, \alpha^6, \alpha^{2004}$.

24 Pour tout z élément de C on pose : $P(z) = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$.

1) Montrer que pour tout $z \in C - \{1\}$ on a : $P(z) = \frac{1-z^7}{1-z}$.

2) Déterminer les racines septièmes de l'unité dans C.

En déduire les solutions dans C de l'équations $P(z) = 0$.

3) Montrer que pour tout z de C, on a :

$$P(z) = (z^2 - 2\cos\frac{2\pi}{7} \cdot z + 1)(z^2 - 2\cos\frac{4\pi}{7} \cdot z + 1)(z^2 - 2\cos\frac{6\pi}{7} \cdot z + 1).$$

4) Montrer que : $P(z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} Z = z + \frac{1}{z} \\ Z^3 + Z^2 - 2Z - 1 = 0 \end{cases}$

En déduire que : $\cos \frac{2\pi}{7}$; $\cos \frac{4\pi}{7}$ et $\cos \frac{6\pi}{7}$ sont racines de l'équation :

$$(E) : 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0.$$

5) On pose $w = e^{i\frac{2\pi}{7}}$.

a) Montrer que pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a :

$$P(z) = (z - w)(z - w^2)(z - w^3)(z - w^4)(z - w^5)(z - w^6).$$

b) En déduire que : $(1 - w)(1 - w^2)(1 - w^3)(1 - w^4)(1 - w^5)(1 - w^6) = 7$.

c) En utilisant un calcul de modules, montrer que :

$$\sin \frac{\pi}{7} \cdot \sin \frac{2\pi}{7} \cdot \sin \frac{3\pi}{7} \cdot \sin \frac{4\pi}{7} \cdot \sin \frac{5\pi}{7} \cdot \sin \frac{6\pi}{7} = \frac{7}{2^6}.$$



Soit P le plan rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$ et f l'application du plan $P \setminus \{0\}$ dans P qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que $z' = \frac{z^2 - 4}{2z}$.

1) a) Montrer que si $z \neq 2i$ on l'égalité : $\frac{z' + 2i}{z' - 2i} = \left(\frac{z + 2i}{z - 2i} \right)^2$.

b) On désigne par A et B les points d'affixes respectives $2i$ et $-2i$.

Justifier que $(\overline{M'A}, \overline{M'B}) \equiv 2(\overline{MA}, \overline{MB}) \pmod{2\pi}$ et que $\frac{M'B}{M'A} = \left(\frac{MB}{MA} \right)^2$.

En déduire l'ensemble des points M pour les quels z' est imaginaire pur.

2) Soit I le point d'affixe $z_0 = -4 + 2i$.

a) Déterminer $(\overline{IA}, \overline{IB})$ et $\frac{IB}{IA}$.

b) Déterminer et construire l'ensemble $E = \{M(z) \in P \text{ tel que } |z + 2i| = 2\}$

c) En utilisant les questions précédentes, construire l'image I' de I par f .

3) Soit $\theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$.

a) Ecrire en forme exponentielle les nombres complexes z_1 et z_2 affixes respectives des points M_1 et M_2 antécédants du point M' d'affixe $2i \sin \theta$ par f . (On appelle z_1 la solution dont la partie réelle est strictement positive)

b) Montrer que les points A, B, M_1 et M_2 sont sur un même cercle dont on précisera le centre et le rayon et préciser la nature du triangle BM_1M_2 .

CORRIGES



1 Vous cherchez $z \in \mathbb{C}$ tel que $z^2 = Z$.

Vous posez $z = x + iy$, avec x et y réels, ce qui donne $z^2 = x^2 - y^2 + 2x y i$.

Puis vous écrivez que deux nombres complexes sont égaux si et seulement s'ils ont même partie réelle et même partie imaginaire, et on utilise aussi

$$|z|^2 = |Z| \text{ avec } |z|^2 = x^2 + y^2.$$

$$\text{a) } Z = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

$$|Z| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1 \text{ et bien sûr } |z|^2 = x^2 + y^2.$$

$$z^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \text{ s'écrit } \begin{cases} x^2 - y^2 = \frac{1}{2} \\ 2xy = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}, \text{ nous avons donc } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x^2 - y^2 = \frac{1}{2} \\ 2xy = -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

Les deux premières équations nous donne $2x^2 = \frac{3}{2}$ et $2y^2 = \frac{1}{2}$.

Soit $x^2 = \frac{3}{4}$ et $y^2 = \frac{1}{4}$ on en déduit que $(x = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } x = -\frac{\sqrt{3}}{2})$

et $(y = \frac{1}{2} \text{ ou } y = -\frac{1}{2})$.

La troisième équation nous indique que x et y sont de signe contraires,

donc $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$ ou $z = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$.

b) $Z = 15$; on a bien sûr, $z = \sqrt{15}$ ou $z = -\sqrt{15}$.

c) $Z = \beta i = \frac{\beta}{2}(2i)$.

Si $\beta > 0$ alors $Z = [\sqrt{\frac{\beta}{2}}(1+i)]^2$ donc les racines carrées

sont $z = \sqrt{\frac{\beta}{2}}(1+i)$ ou $z = -\sqrt{\frac{\beta}{2}}(1+i)$.

Si $\beta < 0$ alors $Z = (-2i) \frac{|\beta|}{2} = \frac{|\beta|}{2} (1-i)^2 = \left[\sqrt{\frac{|\beta|}{2}} (1-i) \right]^2$

Les racines carrées sont : $\sqrt{\frac{|\beta|}{2}} (1-i)$ et $-\sqrt{\frac{|\beta|}{2}} (1-i)$.

d) $Z = 1 + \cos t + i \sin t = 1 + e^{it} = e^{\frac{it}{2}} \left(e^{-\frac{it}{2}} + e^{\frac{it}{2}} \right) = 2 \cos \frac{t}{2} e^{\frac{it}{2}}$

or $t \in]0, \pi[\Leftrightarrow \frac{t}{2} \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ donc $\cos \frac{t}{2} > 0$

$Z = z^2 = \left[2 \cos \frac{t}{2}, \frac{t}{2} \right]$ les racines carrées

sont : $z_0 = \left[\sqrt{2 \cos \frac{t}{2}}, \frac{t}{4} \right]$ et $z_1 = \left[\sqrt{2 \cos \frac{t}{2}}, \frac{t}{4} + \pi \right]$



a) $z^2 - 5z + 6 = 0$.

$\Delta = 25 - 24 = 1$.

$z_1 = \frac{5-1}{2} = 2$ et $z_2 = \frac{5+1}{2} = 3$, donc $S = \{2, 3\}$.

b) $z^2 \sin^2 \alpha + z \sin 2\alpha + 1 = z^2 \sin^2 \alpha + 2z \sin \alpha \cdot \cos \alpha + 1$.

$= (z \sin \alpha + \cos \alpha)^2 - \cos^2 \alpha + 1$.

$= (z \sin \alpha + \cos \alpha)^2 + \sin^2 \alpha$.

Comme $\sin^2 \alpha = -(i \sin \alpha)^2$, on obtient :

$z^2 \sin^2 \alpha + z \sin 2\alpha + 1 = (z \sin \alpha + \cos \alpha - i \sin \alpha)(z \sin \alpha + \cos \alpha + i \sin \alpha)$.

Comme $\sin \alpha \neq 0$, les solutions de l'équation : $z^2 \sin^2 \alpha + z \sin 2\alpha + 1 = 0$,

sont : $z_1 = -\frac{\cos \alpha}{\sin \alpha} + i$ et $z_2 = \frac{-\cos \alpha}{\sin \alpha} - i$.

A $(1-2i)^2 - 4(1-7i) = -7 + 24i$.

Soit une racine carrée de Δ tel que $\delta = x + iy$

$-y^2 = -7 \quad \begin{cases} x^2 - y^2 = -7 & (1) \\ x^2 + y^2 = 25 & (2) \end{cases}$

$+y^2 = \sqrt{625} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -7 & (1) \\ x^2 + y^2 = 25 & (2) \end{cases}$

$xy > 0 \quad \begin{cases} xy > 0 \end{cases}$

(1) + (2) $\Rightarrow 2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm 3$

(2) - (1) $\Rightarrow 2y^2 = 32 \Leftrightarrow y^2 = 16 \Leftrightarrow y = \pm 4$ d'où $\boxed{\delta = 3 + 4i}$.

Les solutions sont : $z' = \frac{1-2i+3+4i}{2} = 2+i$ et $z'' = \frac{1-2i-3-4i}{2} = -1-3i$.

d) $\Delta = (7-i)^2 - 4(1+3i)(-4-2i) = 40 + 42i$.

Calculons ses racines carrées :

$$(x+iy)^2 = 40 + 42i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = \sqrt{40^2 + 42^2} = 58 & (1) \\ x^2 - y^2 = 40 & (2) \\ x \cdot y > 0 \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2x^2 = 98 \Leftrightarrow x^2 = 49 \Leftrightarrow x = \pm 7$$

$$(1) - (2) \Rightarrow 2y^2 = 18 \Leftrightarrow y^2 = 9 \Leftrightarrow y = \pm 3.$$

Les racines carrées de Δ sont $7+3i$ ou $-7-3i$.

Les solutions sont : $z' = \frac{i-7+7+3i}{2(-4-2i)} = \frac{-i}{2+i} = \frac{-i(2-i)}{(2+i)(2-i)} = -\frac{1+2i}{5}$

et $z'' = \frac{i-7-7-3i}{2(-4-2i)} = \frac{7+i}{4+2i} = \frac{(7+i)(4-2i)}{(4+2i)(4-2i)} = \frac{3-i}{2}$.

3 $z^2 + 2(1 - \cos a)z + 2(1 - \cos a) = 0$, l'équation est équivalente à :
 $(z + (1 - \cos a))^2 - (1 - \cos a)^2 + 2(1 - \cos a) = 0$

$$\Leftrightarrow (z + (1 - \cos a))^2 + (1 - \cos a)(-1 + \cos a + 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow (z + (1 - \cos a))^2 + (1 - \cos a)(1 + \cos a) = 0$$

$$\Leftrightarrow [z + (1 - \cos a)]^2 = -\sin^2 a = (i \sin a)^2.$$

d'où les solutions de l'équations sont :

$$z_1 = -1 + \cos a + i \sin a \text{ et } z_2 = -1 + \cos a - i \sin a.$$

$$z_1 = 2 \sin \frac{a}{2} \left(-\sin \frac{a}{2} + i \cos \frac{a}{2} \right) = 2 \sin \frac{a}{2} \left(\cos \left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(\frac{a}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

$$\text{et } z_2 = \overline{z_1} = 2 \sin \frac{a}{2} \left(\cos \left(-\frac{a}{2} - \frac{\pi}{2} \right) + i \sin \left(-\frac{a}{2} - \frac{\pi}{2} \right) \right)$$

Si $a = 0$ alors $z_1 = z_2 = 0$.

Si $a \neq 0$ alors $|z_1| = 2 \sin \frac{a}{2}$ et $\text{Arg}(z_1) = \frac{a}{2} + \frac{\pi}{2}$

et $|z_2| = 2 \sin \frac{a}{2}$ et $\text{Arg}(z_2) = -\frac{a}{2} - \frac{\pi}{2}$.

4 a) Les solutions sont : $-2+i$, $4-3i$.

b) Les solutions sont : 1 , $-2-i$.

c) Les solutions sont ; $2 \cos \frac{\theta}{2} e^{\frac{i\theta}{2}}$; $-2 \cos \frac{\theta}{2} e^{\frac{i\theta}{2}}$.

d) Les solutions sont : $m+i$ et $1+i m$.

5 a) On pose $z = x + iy$ avec x et y deux réels.

$$z^2 + \bar{z} - 1 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x+iy)^2 + (x-iy) - 1 = 0 \\ z = x+iy \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = x+iy \\ x^2 - y^2 + x - 1 + i(2xy - y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x+iy \\ x^2 - y^2 + x - 1 = 0 \\ 2xy - y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} z = x+iy \\ x^2 - y^2 + x - 1 = 0 \\ (2x-1)y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \text{(I)} \begin{cases} z = x \\ x^2 + x - 1 = 0 \\ y = 0 \end{cases} \text{ ou (II)} \begin{cases} z = \frac{1}{2} + iy \\ y^2 = -\frac{1}{4} \\ x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

* Le système (II) n'a pas de solution ($y^2 = -\frac{1}{4}$ impossible).

$$* x^2 + x - 1 = 0, \Delta = \sqrt{5} \text{ d'où } x' = \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } x'' = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

$$\text{d'où les solutions sont : } \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \text{ et } \frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

b) L'application de la méthode précédente donne le système suivant :

$$\begin{cases} z = x+iy \\ x^2 - y^2 - 2x + 1 = 0 \\ y(x+1) = 0 \end{cases} \text{ ; Les solutions sont : } 1, -1 - 2i \text{ et } -1 + 2i.$$

6/1 On pose $Z = z^2$, l'équation est équivalente à :

$$Z = z^2 \text{ et } Z^2 + (3-6i)Z + 2(16-63i) = 0$$

$$\Delta = -155 + 468i ; \Delta = \delta^2 \text{ avec } \delta = x+iy \text{ d'où } \begin{cases} x^2 - y^2 = -155 \\ x^2 + y^2 = 493 \\ x \cdot y > 0 \end{cases}$$

d'après les deux équations, on obtient : $x = \pm 13$ et $y = \pm 18$ or $xy > 0$

d'où $\delta = 13 + 18i$ donc $Z' = 5 + 12i$ et $Z'' = -8 - 6i$.

Calculons z : il suffit de chercher les racines carrées de Z' et Z'' on trouve respectivement : $3 + 2i, -3 - 2i, 1 - 3i, -1 + 3i$.

2) On pose $Z = z^3$, $Z^2 + (2i-1)Z - 1 - i = 0$

$\Delta = 1$ alors $Z' = -i$ et $Z'' = 1 - i$.

Calculons z : il suffit de chercher les racines cubiques de $-i$ et $1 - i$.

La forme trigonométrique de $-i$ est $[1, -\frac{\pi}{2}]$ et de $1 - i$ est $[\sqrt{2}, -\frac{\pi}{4}]$

* $-i = z^3$ donc les solutions de cette équation sont :

$$z_k = \left[1, -\frac{\pi}{6} + 2\frac{k\pi}{3}\right] \text{ avec } k \in \{0, 1, 2\}.$$

* $1 - i = z^3$, les solutions de cette équation sont :

$$z'_k = \left[\sqrt[3]{\sqrt{2}}, -\frac{\pi}{12} + 2\frac{k\pi}{3}\right], k \in \{0, 1, 2\}.$$

Par suite les solutions sont :

$$z_0 = \left[1, -\frac{\pi}{6}\right] = e^{-i\frac{\pi}{6}}; z_1 = \left[1, \frac{\pi}{2}\right] = e^{i\frac{\pi}{2}}; z_2 = \left[1, \frac{5\pi}{6}\right] = e^{i\frac{5\pi}{6}}.$$

$$z'_0 = \left[(\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}, -\frac{\pi}{12}\right] = (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} e^{-i\frac{\pi}{12}}; z'_1 = \left[(\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}, \frac{7\pi}{12}\right] = (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{7\pi}{12}}$$

$$\text{et } z'_2 = \left[(\sqrt{2})^{\frac{1}{3}}, \frac{15\pi}{12}\right] = (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} e^{i\frac{5\pi}{4}}$$



a) On pose $Z = z^4$, les solutions sont : $\frac{\sqrt{3}+i}{2}, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-\sqrt{3}-i}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2},$

$$\frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-\sqrt{3}+i}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}-i}{2}.$$

b) On pose $Z = z^3$, les solutions sont : $e^{i\frac{2\pi}{9}}, e^{i\frac{4\pi}{9}}, e^{i\frac{8\pi}{9}}, e^{i\frac{10\pi}{9}}, e^{i\frac{14\pi}{9}}, e^{i\frac{16\pi}{9}}.$



1) * Soit α le nombre réel est solution de l'équation

$$2z^3 - (1+2i)z^2 + (25i-1)z + 13i = 0$$

$$\text{Signifie que } 2\alpha^3 - (1+2i)\alpha^2 + (25i-1)\alpha + 13i = 0$$

$$\Leftrightarrow (2\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha) + i(-2\alpha^2 + 25\alpha + 13) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^3 - \alpha^2 - \alpha = 0 \text{ et } -2\alpha^2 + 25\alpha + 13 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha(2\alpha^2 - \alpha - 1) = 0 \quad (1) \text{ et } -2\alpha^2 + 25\alpha + 13 = 0 \quad (2)$$

$$(2) \Leftrightarrow \alpha = -\frac{1}{2} \text{ ou } \alpha = 13$$

$$(1) \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = -\frac{1}{2} \text{ ou } \alpha = 1$$

d'où $-\frac{1}{2}$ est la solution réelle de l'équation.

* Mettons $z + \frac{1}{2}$ en facteur :

$$2z^3 - (1+2i)z^2 + (25i-1)z + 13i = (z + \frac{1}{2})(az^2 + bz + c)$$

$$= az^3 + (\frac{1}{2}a + b)z^2 + (\frac{1}{2}b + c)z + \frac{1}{2}c.$$

$$\text{Par identification : } \begin{cases} 2=a \\ \frac{1}{2}a+b=-1-2i \\ \frac{1}{2}b+c=25i-1 \\ \frac{1}{2}c=13i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2=a \\ c=26i \\ b=-2-2i \\ \frac{1}{2}b+c=25i-1 \end{cases} \quad (3)$$

$$\text{Vérifions dans (3) : } \frac{1}{2}(-2-2i)+26i=-1+25i$$

$$\text{donc (3) est vérifié, par suite : } 2z^3 - (1+2i)z^2 + (25i-1)z + 13i = 0$$

$$\Leftrightarrow (z+\frac{1}{2})(2z^2 - (2+2i)z + 26i) = 0 \quad \Leftrightarrow z = -\frac{1}{2} \text{ ou } 2(z^2 - (1+i)z + 13i) = 0$$

$$* z^2 - (1+i)z + 13i = 0$$

$$\Delta = -50i = 25(-2i) = [5(1-i)]^2 \text{ d'où une racine carrée de } \Delta \text{ est } 5(1-i)$$

$$\text{par suite } z' = \frac{1+i+5-5i}{2} = 3-2i \text{ et } z'' = \frac{1+i-5+5i}{2} = -2+3i.$$

$$\text{Ainsi les solutions : } -\frac{1}{2} ; 3-2i ; -2+3i.$$

2) Les solutions sont : $-3 ; 3-2i ; 2i$.



1) Le nombre yi ($y \in \mathbb{R}$) est solution de l'équation équivalent à :

$$(i-1)(yi)^3 - (yi)^2(5i-11) - (43+i)(iy) + 9 + 37i = 0$$

$$\Leftrightarrow y^3 - 11y^2 + y + 9 + i(y^3 + 5y^2 - 43y + 37) = 0$$

$$\Leftrightarrow y^3 - 11y^2 + y + 9 = 0 \quad (1) \text{ et } y^3 + 5y^2 - 43y + 37 = 0 \quad (2).$$

On remarque que le réel 1 est une solution des équations (1) et (2) d'où i est donc solution de l'équation.

* Mettons $(z-i)$ en facteur :

$$z^3(i-1) - z^2(5i-11) - z(43+i) + 9 + 37i = (z-i)(az^2 + bz + c).$$

On développe le deuxième membre et par identification,

$$\text{on obtient le système suivant : } \begin{cases} a=i-1 \\ b=10-6i \\ c=-37+9i \end{cases}$$

d'où l'équation est équivalente à $(z-i) = 0$

$$\text{ou } (i-1)z^2 + (10-6i)z - 37 + 9i = 0.$$

$$\Delta' = -12 + 16i = (2+4i)^2 \text{ par suite les solutions sont : } i ; 5-2i ; 3+4i.$$

2) Les solutions sont : $i ; -3 ; 1-2i$.

3) Les solutions sont : $2i ; -2i ; -3-2i ; -3+2i$.

10 Soit x la solution réelle et iy la solution imaginaire pure de l'équation si et seulement si : $x^4 - 4(1+i)x^3 + 12x^2 - 8i(1+i)x - 5 = 0$

$$\text{et } (iy)^4 - 4(1+i)(iy)^3 + 12i(iy)^2 - 8i(1+i)(iy) - 5 = 0$$

ou encore $(x^4 - 4x^3 + 8x - 5) + (-4x^3 - 12x^2 - 8x)i = 0$ (1)

$$\text{et } (y^4 - 4y^3 + 8y - 5) + (4y^3 - 12y^2 - 8y)i = 0$$
 (2)

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 4x^3 + 8x - 5 = 0 \\ -4x^3 + 12x^2 - 8x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 4x^3 + 8x - 5 = 0 \\ x(-4x^2 + 12x - 8) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 4x^3 + 8x - 5 = 0 \text{ (S}_1\text{)} \\ x = 0 \text{ ou } x = 1 \text{ ou } x = 2 \end{cases}$$

0 et 2 ne vérifie pas (S_1) car $0^4 - 4 \cdot 0^3 + 8 \cdot 0 - 5 \neq 0$ et $2^4 - 4 \cdot 2^3 + 8 \cdot 2 - 5 \neq 0$
et on a $1^4 - 4 \cdot 1^3 + 8 \cdot 1 - 5 = 9 - 9 = 0$ donc $x = 1$ est la solution réelle.

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} y^4 - 4y^3 + 8y - 5 = 0 \\ 4y^3 - 12y^2 + 8y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^4 - 4y^3 + 8y - 5 = 0 \\ 4y(y^2 - 3y + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^4 - 4y^3 + 8y - 5 = 0 \text{ (S}_2\text{)} \\ y = 0 \text{ ou } y = 1 \text{ ou } y = 2 \end{cases}$$

$0^4 - 4 \cdot 0^3 + 8 \cdot 0 - 5 \neq 0$ donc 0 ne vérifie pas (S_2)

$2^4 - 4 \cdot 2^3 + 8 \cdot 2 - 5 = -5 \neq 0$ donc 2 ne vérifie pas (S_2)

$1^4 - 4 \cdot 1^3 + 8 \cdot 1 - 5 = 9 - 9 = 0$ donc 1 est une solution de (S_2)

d'où i est une solution de l'équation.

$$z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 - 8i(i+1)z - 5 = (z-i)(z-1)(az^2 + bz + c)$$

$$= az^4 + (b - a(1+i))z^3 + (c + ia - b(1+i))z^2 + (ib - c(1+i))z + ic$$

$$\text{et par identification on obtient : } \begin{cases} a=1 \\ b-a(1+i)=-4(1+i) \\ c+ia-b(1+i)=12i \\ ib-c(1+i)=8i(1+i) \\ ic=-5 \end{cases} \text{ ou encore } \begin{cases} a=1 \\ b=-3(1+i) \\ c=5i \end{cases}$$

$$z^4 - 4(1+i)z^3 + 12iz^2 - 8i(i+1)z - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z-i)(z-1)(z^2 - 3(1+i)z + 5i) = 0$$

$$\Leftrightarrow z = i \text{ ou } z = 1 \text{ ou } z^2 - 3(1+i)z + 5i = 0$$

$$* z^2 - 3(1+i)z + 5i = 0$$

$$\Delta = (3(1+i))^2 - 4 \cdot 5i = -2i = (1-i)^2$$

$$z' = \frac{3(1+i) + (1-i)}{2} = 2+i ; z'' = \frac{3(1+i) - (1-i)}{2} = 1+2i.$$

Les solutions sont : 1, i , $2+i$, $1+2i$.

2) Les solutions sont : -3 , $3i$, $2-i$, $1-2i$.

11 1) $z^n = 1$. On sait que 1 on peut l'écrire sous la forme trigonométrique

$$[1, 0] \text{ donc les solutions de l'équation } z^n = 1 \text{ sont les } z_k = \left[1, \frac{2k\pi}{n} \right] = e^{i \frac{2k\pi}{n}}$$

avec $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

2) $(z+i)^n = (z-i)^n$

i n'est pas solution de l'équation, on peut donc l'écrire de la façon suivante :

$$\frac{(z+i)^n}{(z-i)^n} = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{z+i}{z-i} \right)^n = 1 \quad (1)$$

z est une solution de l'équation (1) équivaut à $\frac{z+i}{z-i}$ est une racine $n^{\text{ième}}$

de 1 c'est-à-dire l'un des nombres $e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ ou $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

d'où $\frac{z+i}{z-i} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ ou encore $z+i = (z-i)e^{i\frac{2k\pi}{n}} \Leftrightarrow z(1-e^{i\frac{2k\pi}{n}}) = i(-1-e^{i\frac{2k\pi}{n}})$.

Pour $k=0$; $z = -2i$ impossible donc on n'a pas de solution dans ce cas.

$$\text{Pour } k \neq 0 ; z = \left[\frac{1+e^{i\frac{2k\pi}{n}}}{e^{i\frac{2k\pi}{n}}-1} \right] i = \frac{ie^{i\frac{k\pi}{n}}(e^{i\frac{k\pi}{n}}+e^{-i\frac{k\pi}{n}})}{e^{i\frac{k\pi}{n}}(e^{i\frac{k\pi}{n}}-e^{-i\frac{k\pi}{n}})} = \frac{i2\cos\frac{k\pi}{n}}{2i\sin\frac{k\pi}{n}} = \cotg\frac{k\pi}{n}.$$

Les solutions sont : $\cotg\frac{k\pi}{n}$ avec $k \in \{1, \dots, n-1\}$.

Pour l'équation $(z+1)^n = (z-1)^n$, on utilise la même méthode et on obtient

les solutions : $i \cotg\frac{k\pi}{n}$ avec $k \in \{1, 2, \dots, n-1\}$.

12 * $z^4 - 1 = 0 \Leftrightarrow z^4 = 1$.

Les solutions sont $z_k = [1, \frac{2k\pi}{4}] = e^{i\frac{2k\pi}{4}}$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3\}$

d'où les solutions sont : $z_0 = 1$; $z_1 = e^{i\frac{\pi}{2}} = i$; $z_2 = e^{i\pi} = -1$; $z_3 = e^{i\frac{3\pi}{2}} = -i$

* $z^4 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^4 = -1 = e^{i\pi} = [1, \pi]$.

Les solutions sont les $z_k = [1, \frac{\pi+2k\pi}{4}]$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3\}$.

d'où les solutions sont $z_0 = [1, \frac{\pi}{4}] = e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$z_1 = [1, \frac{3\pi}{4}] = e^{i\frac{3\pi}{4}} ; z_2 = [1, \frac{5\pi}{4}] = e^{i\frac{5\pi}{4}} ; z_3 = [1, \frac{7\pi}{4}] = e^{i\frac{7\pi}{4}}$$

13 1) $z^6 = 1$. Les solutions sont les $z_k = [1, \frac{2k\pi}{6}]$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

ou encore $z_k = e^{i\frac{k\pi}{3}}$. Ce sont : 1 ; $e^{i\frac{\pi}{3}}$; $e^{i\frac{2\pi}{3}}$; $e^{i\pi}$; $e^{i\frac{4\pi}{3}}$; $e^{i\frac{5\pi}{3}}$.

Sous forme trigonométrique :

$$1; \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}; \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}; \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3}; -1 \text{ et } \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3}.$$

$$\text{Sous forme algébrique : } 1; \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}; -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}; -1; -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}; \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$2) (1-i)^6 = (\sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}})^6 = 8 e^{-i\frac{3\pi}{2}} = 8i$$

$$z^6 = 8i \Leftrightarrow z^6 = (1-i)^6 \Leftrightarrow \left(\frac{z}{1-i}\right)^6 = 1$$

donc $\frac{z}{1-i}$ sont les racines 6^{ème} de 1.

$$\frac{z}{1-i} = 1 \text{ ou } \frac{z}{1-i} = \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ ou } \frac{z}{1-i} = \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) \text{ ou } \frac{z}{1-i} = -1$$

$$\text{ou } \frac{z}{1-i} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } \frac{z}{1-i} = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ d'où les solutions sont :}$$

$$1-i; (1-i)\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right); (1-i)\left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right); (i-1); \left(-\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-i);$$

$$\left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}\right)(1-i).$$

En effectuant les calculs on obtient :

$$1-i; \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1)); \frac{1}{2}(-1+\sqrt{3}+i(1+\sqrt{3})); -1+i;$$

$$\frac{1}{2}(-1-\sqrt{3}+i(1-\sqrt{3})) \text{ et } \frac{1}{2}(1-\sqrt{3}-i(1+\sqrt{3})).$$

$$3) 8i \text{ a pour module } 8 \text{ et pour argument } \frac{\pi}{2} \text{ alors les racines 6^{ème} ont pour}$$

$$\text{module } \sqrt[6]{8} = \sqrt{2} \text{ et pour argument } \frac{\pi}{12} + \frac{2k\pi}{6} \text{ avec } k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$\text{se sont } \frac{\pi}{12}, \frac{5\pi}{12}, \frac{9\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{17\pi}{12} \text{ et } \frac{21\pi}{12}.$$

$$\text{La racine sixième ou l'argument est } \frac{\pi}{12} \text{ est } \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right)$$

$$\cos \frac{\pi}{12} > 0 \text{ et } \sin \frac{\pi}{12} > 0 \text{ la partie réelle } \cos \frac{\pi}{12} \text{ est supérieur à } \sin \frac{\pi}{12} \text{ la partie}$$

$$\text{imaginaire. donc } \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{12} + i \sin \frac{\pi}{12} \right) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-1))$$

$$\text{d'où } \sin \frac{\pi}{12} = \frac{\sqrt{3}-1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} \text{ et } \cos \frac{\pi}{12} = \frac{1+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}.$$

14 1) $z \cdot Z = z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5.$

$$Z - z \cdot Z = 1 - z^5 \text{ d'où } (1-z) \cdot Z = 1 - z^5 \text{ or } z \neq 1. \text{ Donc } Z = \frac{1-z^5}{1-z}.$$

2) a) $z = e^{\frac{2i\pi}{5}} \Rightarrow z^5 = (e^{\frac{2i\pi}{5}})^5 = e^{i2\pi} = 1$ d'où $1 - z^5 = 0$ par suite $Z = 0$.

b) $Z = 0 \Leftrightarrow \operatorname{Re}(Z) = 0 \text{ et } \operatorname{Im}(Z) = 0$

$$Z = 1 + e^{\frac{2i\pi}{5}} + (e^{\frac{2i\pi}{5}})^2 + (e^{\frac{2i\pi}{5}})^3 + (e^{\frac{2i\pi}{5}})^4$$

$$Z = 1 + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} + i(\sin \frac{2\pi}{5} + \sin \frac{4\pi}{5} + \sin \frac{6\pi}{5} + \sin \frac{8\pi}{5})$$

$$Z = 0 \Rightarrow 1 + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} = 0 \Rightarrow S = 0.$$

3) a) $\cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} = \cos \frac{2\pi}{5} + \cos(2\pi - \frac{2\pi}{5}) = 2\cos \frac{2\pi}{5}$

$$\cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} = \cos(\pi - \frac{\pi}{5}) + \cos(\pi + \frac{\pi}{5}) = -\cos \frac{\pi}{5} - \cos \frac{\pi}{5} = -2\cos \frac{\pi}{5}.$$

b) $S = 0 \Rightarrow 1 + \cos \frac{2\pi}{5} + \cos \frac{4\pi}{5} + \cos \frac{6\pi}{5} + \cos \frac{8\pi}{5} = 0$

$$\Rightarrow 1 + 2\cos \frac{2\pi}{5} - 2\cos \frac{\pi}{5} = 0$$

or $\cos \frac{2\pi}{5} = 2\cos^2 \frac{\pi}{5} - 1$ d'où $1 + 2(2\cos^2 \frac{\pi}{5} - 1) - 2\cos \frac{\pi}{5} = 0$

$4\cos^2 \frac{\pi}{5} - 2\cos \frac{\pi}{5} - 1 = 0$ donc $\cos \frac{\pi}{5}$ est une solution de l'équation :

$$4x^2 - 2x - 1 = 0 \text{ et } \Delta' = 1 + 4 = 5 \text{ alors } x = \frac{1+\sqrt{5}}{4} \text{ ou } x = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$$

or $\cos \frac{\pi}{5} > 0$ car $\frac{\pi}{5} \in [0, \frac{\pi}{2}]$ d'où $\cos \frac{\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}.$

15 1) $z_0 = \alpha \in \mathbb{R}$ est solution de l'équation $f(z) = 0$ cela signifie que $f(\alpha) = 0$

$$f(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \alpha^3 + (-5+i)\alpha^2 + (6-6i)\alpha + 8i - 8 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 - 5\alpha^2 + i\alpha^2 + 6\alpha - 6i\alpha + 8i - 8 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3 - 5\alpha^2 + 6\alpha - 8 + i(\alpha^2 - 6\alpha + 8) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3 - 5\alpha^2 + 6\alpha - 8 = 0 \\ \alpha^2 - 6\alpha + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha^3 - 5\alpha^2 + 6\alpha - 8 = 0 \\ \alpha = 4 \text{ ou } \alpha = 2 \end{cases}$$

$\alpha = 2$ ne vérifie pas la première équation, en effet :

$$2^3 - 5 \cdot 2^2 + 6 \cdot 2 - 8 = -8 \neq 0.$$

d'où $z_0 = 4$ est la solution réelle de l'équation $f(z) = 0$.

2) Pour tout $z \in \mathbb{C}$; $z^3 + (-5 + i)z^2 + (6 - 6i)z + 8i - 8 = (z - 4)(z^2 + az + b)$
 $= z^3 + (a - 4)z^2 + (b - 4a)z - 4b$. Par identification on obtient :

$$\begin{cases} a - 4 = -5 + i \\ b - 4a = 6 - 6i \\ -4b = 8i - 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = -1 + i \\ b = -2i + 2 \\ -2i + 2 - 4(i - 1) = 6 - 6i \end{cases}$$

d'où pour tout $z \in \mathbb{C}$, $z^3 + (-5 + i)z^2 + (6 - 6i)z + 8i - 8 = (z - 4) \cdot P(z)$
 avec $P(z) = z^2 + (-1 + i)z + 2 - 2i$.

3) a) $P(z) = 0 \Leftrightarrow z^2 + (-1 + i)z + 2 - 2i = 0$

$$\Delta = (-1 + i)^2 - 4(2 - 2i) = 1 - 2i - 1 - 8 + 8i = -8 + 6i = -9 + 1 + 6i = (3i)^2 + 1 + 2 \cdot 3i = (1 + 3i)^2.$$

$$z_1 = \frac{1 - i + 1 + 3i}{2} = 1 + i ; \quad z_2 = \frac{1 - i - 1 - 3i}{2} = -2i.$$

Donc l'équation $P(z) = 0$ admet une solution imaginaire pure :

$z_2 = -2i$ et une autre solution : $z_1 = 1 + i$.

b) $f(z) = 0 \Leftrightarrow z - 4 = 0$ ou $P(z) = 0 \Leftrightarrow z_0 = 4$ ou $z_1 = 1 + i$ ou $z_2 = -2i$

d'où $S_C = \{4, 1 + i, -2i\}$.

4) a) $M_0 M_1 = \|\overline{M_0 M_1}\| = |z_1 - z_0| = |1 + i - 4| = |-3 + i| = \sqrt{(-3)^2 + (1)^2} = \sqrt{10}$

$$M_1 M_2 = \|\overline{M_1 M_2}\| = |z_2 - z_1| = |-2i - 1 - i| = |-3i - 1| = \sqrt{(-3)^2 + 1^2} = \sqrt{10}$$

$$M_0 M_2 = \|\overline{M_0 M_2}\| = |z_2 - z_0| = |-2i - 4| = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20}.$$

On a : $M_0 M_1 = M_1 M_2$ d'où le triangle $M_0 M_1 M_2$ est isocèle de sommet principal M_1 .

$$M_0 M_1^2 + M_1 M_2^2 = 10 + 10 = 20 = M_0 M_2^2$$

d'où $M_0 M_1 M_2$ est rectangle

en M_1 . donc $M_0 M_1 M_2$ est un triangle isocèle et rectangle en M_1 .

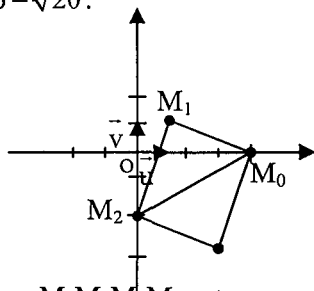
b) Si $M_0 M_1 M_2 M_3$ est un parallélogramme alors $M_0 M_1 M_2 M_3$ est un carré (car $M_0 M_1 M_2$ est isocèle rectangle en M_1).

$M_0 M_1 M_2 M_3$ est un parallélogramme si et seulement si :

$$\overline{M_0 M_1} = \overline{M_3 M_2} \Leftrightarrow z_1 - z_0 = z_2 - z_3 \Leftrightarrow z_3 = z_2 - z_1 + z_0 = -2i - 1 - i + 4$$

$$z_3 = 3 - 3i.$$

donc $M_0 M_1 M_2 M_3$ est un carré si M_3 est le point d'affixe $z_3 = 3 - 3i$.



16

$$u = 3\cos\theta - 5i\sin\theta ; v = 5\cos\theta - 3i\sin\theta.$$

$$\begin{aligned} 1) v^2 - u^2 &= (5\cos\theta - 3i\sin\theta)^2 - (3\cos\theta - 5i\sin\theta)^2 \\ &= 25\cos^2\theta - 9\sin^2\theta - 30i\cos\theta\sin\theta - 9\cos^2\theta + 25\sin^2\theta + 30i\sin\theta\cos\theta \\ &= 25(\cos^2\theta + \sin^2\theta) - 9(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 25 - 9 = 16. \end{aligned}$$

$$2) (E) : 2z^2 + (3\cos\theta - 5i\cos\theta)z - 2 = 0$$

$$a) \operatorname{Arg}(z') + \operatorname{Arg}(z'') \equiv \operatorname{Arg}(z' \cdot z'') (2\pi). \text{ or } z' \cdot z'' = \frac{c}{a} = -1.$$

$$\text{Donc } \operatorname{Arg}(z' \cdot z'') \equiv \operatorname{Arg}(-1) (2\pi) \text{ or } \operatorname{Arg}(-1) \equiv \pi (2\pi).$$

$$\text{Donc } \operatorname{Arg}(z' \cdot z'') \equiv \pi (2\pi) \text{ et par suite } \operatorname{Arg}(z') + \operatorname{Arg}(z'') \equiv \pi (2\pi)$$

$$b) \Delta = u^2 + 16 = v^2 \text{ car } v^2 - u^2 = 16.$$

$$z' = -2\cos\theta + 2i\sin\theta = 2[-\cos\theta + i\sin\theta] = 2e^{i(\pi-\theta)}.$$

$$z'' = \frac{1}{2}(\cos\theta + i\sin\theta) = \frac{1}{2}e^{i\theta}.$$

$$3) OM'M'' \text{ est un triangle rectangle si } \overline{OM'} \perp \overline{OM''}$$

$$\overline{OM'} \begin{pmatrix} -2\cos\theta \\ 2\sin\theta \end{pmatrix} ; \overline{OM''} \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\cos\theta \\ \frac{1}{2}\sin\theta \end{pmatrix}.$$

$$xx' + yy' = 0 \Leftrightarrow -\cos^2\theta + \sin^2\theta = 0 \Leftrightarrow -\cos 2\theta = 0 \Leftrightarrow \cos 2\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\theta = \frac{\pi}{2} (\pi) \text{ donc } \theta = \frac{\pi}{4} + \frac{k\pi}{2} ; k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{or } \theta \in]-\pi, \pi] \text{ donc } \theta \in \left\{ \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{-\pi}{4}, \frac{-3\pi}{4} \right\}.$$

17

$$1) \text{ Montrons que } e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\begin{aligned} 2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} &= \left[e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} + e^{-i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \right] \cdot e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \\ &= e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} + e^{i\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} = e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{2}}. \end{aligned}$$

$$2) a) z^2 - (2\cos\alpha + i)z + 1 - \sin\alpha + i\cos\alpha = 0$$

$$\Delta = (2\cos\alpha + i)^2 - 4(1 - \sin\alpha + i\cos\alpha)$$

$$= 4\cos^2\alpha + 4i\cos\alpha - 1 - 4 + 4\sin\alpha - 4i\cos\alpha$$

$$= 4(1 - \sin^2\alpha) - 1 - 4 + 4\sin\alpha = -4\sin^2\alpha + 4 - 1 - 4 + 4\sin\alpha$$

$$= -(4\sin^2\alpha - 4\sin\alpha + 1) = [i(2\sin\alpha - 1)]^2$$

$$z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha ; z_2 = \cos\alpha + i(1 - \sin\alpha).$$

$$b) z_1 = \cos\alpha + i\sin\alpha = e^{i\alpha}$$

$$z_2 = \cos\alpha - i\sin\alpha + i = \cos(-\alpha) + i\sin(-\alpha) + i$$

$$z_2 = e^{-i\alpha} + e^{i\frac{\pi}{2}} = 2 \cos\left(-\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \cdot e^{i\left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)} \text{ d'où } z_2 = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cdot e^{i\left(-\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right)}.$$

Vérifions que $2 \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) > 0$.

$$\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \text{ signifie que } 0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow 0 \leq \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\pi}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} \leq \frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4} \leq \frac{\pi}{2} \text{ donc } \cos\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}\right) > 0.$$

3) a) $M_2(z_2)$ tel que $z_2 = \cos \alpha + i(1 - \sin \alpha)$ signifie que :

$$\begin{cases} x = \cos \alpha \\ y = 1 - \sin \alpha \end{cases} \text{ or } \cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha = 1 \Leftrightarrow x^2 + (1-y)^2 = 1 \text{ donc } M_2 \in \zeta(I(0, 1); 1)$$

b) $M_1(z_1)$ tel que $z_1 = \cos \alpha + i \sin \alpha$

$M = S_{(0, i)}(M_1)$ signifie que $M(z)$ tel que $z = \cos \alpha - i \sin \alpha$

(même partie réel et de partie imaginaire opposé)

$$z_2 = \cos \alpha - i \sin \alpha + i = z + i$$

donc M_2 est l'image de M par une translation de vecteur $\vec{u}$ d'affixe i .

18 $1) (\cos \theta + i \sin \theta)^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta + 2i \sin \theta \cos \theta = 1 + i \sin 2\theta.$

2) a) $z'' \cdot z'$ et le produit des racines donc $z' \cdot z'' = \frac{1-i}{1+i}$

$$z' \cdot z'' = \frac{(1-i)^2}{2} = -i \text{ donc } \text{Arg } z' + \text{Arg } z'' \equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi)$$

$$\begin{aligned} b) \Delta' &= (\cos \theta - i \sin \theta)^2 - (1-i)(1+i) = 1 - \sin 2\theta - 1 - 1 \\ &= -\sin 2\theta - 1 = -(\cos \theta + i \sin \theta)^2. \end{aligned}$$

δ' une racine carré de Δ' par suite $\delta' = i |\cos \theta + i \sin \theta|$

$$z' = \frac{\cos \theta - i \sin \theta + i(\cos \theta + i \sin \theta)}{1+i} = \frac{\cos \theta(1+i) + \sin \theta(-1+i)}{1+i}$$

$$= \cos \theta + \frac{\sin \theta(-1+i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \cos \theta + i \sin \theta.$$

$$z'' = \frac{\cos \theta - i \sin \theta - i(\cos \theta + i \sin \theta)}{1+i} = \frac{\cos \theta(1-i) - \sin \theta(1+i)}{1+i} = \frac{\cos \theta(1-i)}{1+i} - \sin \theta$$

$$= \frac{\cos \theta(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} - \sin \theta = -\sin \theta - i \cos \theta = \cos\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) - i \sin\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)$$

$$= \cos\left(-\theta - \frac{\pi}{2}\right) + i \sin\left(-\theta - \frac{\pi}{2}\right) = e^{-i\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right)}.$$

Les solutions sont $z' = \cos \theta + i \sin \theta = e^{i\theta}$

$$\text{et } z'' = \cos(-\theta - \frac{\pi}{2}) + i \sin(-\theta - \frac{\pi}{2}) = e^{-i(\theta + \frac{\pi}{2})} \text{ d'où } S_C = \{e^{i\theta}, e^{-i(\theta + \frac{\pi}{2})}\}.$$

$$3) (\overline{OA}, \overline{OB}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \Leftrightarrow (\overline{OA}, \overline{U}) + (\overline{U}, \overline{OB}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$$

$$\Leftrightarrow -\text{Arg } z_A + \text{Arg } z_B \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi).$$

$$\text{Or } z_A = e^{i\theta} \text{ et } z_B = e^{-i(\theta + \frac{\pi}{2})} \text{ d'où } -\theta - \theta - \frac{\pi}{2} \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi)$$

$$\text{ou encore } 2\theta \equiv -\frac{5\pi}{6}(2\pi) \text{ par suite } \theta = -\frac{5\pi}{12} + k\pi \text{ or } \theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\text{ d'où } \theta = -\frac{5\pi}{12}.$$

$$* OA = |z_A| = 1 \text{ et } OB = |z_B| = 1 \text{ donc } OA = OB$$

$$OA = OB \text{ et } (\overline{OA}, \overline{OB}) \equiv \frac{\pi}{3}(2\pi) \text{ donc } OAB \text{ est un triangle équilatéral.}$$



$$A) 1) (E): z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = 0.$$

z_A est une solution imaginaire pure signifie que $z_A = \alpha i$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$
 αi est une solution de (E) signifie que :

$$(\alpha i)^3 + (\sqrt{3} - i)(\alpha i)^2 + (1 - i\sqrt{3})(\alpha i) - i = 0$$

$$-i\alpha^3 - \sqrt{3}\alpha^2 + i\alpha^2 + \alpha i + \alpha\sqrt{3} - i = 0$$

$$(-\sqrt{3}\alpha^2 + \sqrt{3}\alpha) + i(-\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha - 1) = 0$$

$$\begin{cases} -\sqrt{3}\alpha^2 + \sqrt{3}\alpha = 0(1) \\ -\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha - 1 = 0(2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} -\sqrt{3}\alpha^2 + \sqrt{3}\alpha = 0 \\ -\alpha^3 + \alpha^2 + \alpha - 1 = 0 \end{cases}$$

$$-\sqrt{3}\alpha^2 + \sqrt{3}\alpha = 0 \Leftrightarrow -\sqrt{3}\alpha(\alpha - 1) = 0 \Leftrightarrow \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = 1$$

$\alpha = 0$ ne vérifie pas l'équation (2) alors que $\alpha = 1$ vérifie (2).

Donc $z_A = i$ solution imaginaire pure de (E).

$$2) \text{ On a donc } z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = (z - i)(z^2 + bz + c)$$

$$z^3 + (\sqrt{3} - i)z^2 + (1 - i\sqrt{3})z - i = z^3 + (b - i)z^2 + (c - ib)z - ic.$$

En identifiant les coefficients de ces polynômes, on a :

$$\begin{cases} \sqrt{3} - i = b - i \\ c - ib = 1 - i\sqrt{3} \\ -ic = -i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = \sqrt{3} \\ c = 1 \end{cases}$$

L'équation s'écrit donc sous la forme $(z - i)(z^2 + \sqrt{3}z + 1) = 0$.

Le discriminant du trinôme est $\Delta = 3 - 4 = -1 = i^2$ et ses racines sont :

$$z' = \frac{-\sqrt{3}+i}{2} = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \text{ et } z'' = \frac{-\sqrt{3}-i}{2} = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i.$$

$$S_C = \left\{ -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i ; -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i ; i \right\}.$$

On a $\text{Im}(z_B) > 0$ donc $z_B = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$; $z_C = -\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$.

3) $A(z_A)$; $B(z_B)$ et $C(z_C)$.

$$a) |z_A| = \sqrt{1} = 1 ; |z_B| = \sqrt{\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1 ; |z_C| = \sqrt{\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{-1}{2}\right)^2} = 1$$

On a : $|z_A| = |z_B| = |z_C| = 1$ donc $OA = OB = OC = 1$.

D'où A, B et C appartiennent au cercle ζ de centre O et de rayon 1.

b) Un losange est un parallélogramme qui à deux côtés consécutifs de même longueur.

$$\text{Aff}(\overline{OA}) = i \text{ et } \text{Aff}(\overline{CB}) = z_B - z_C = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i - \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = i$$

D'où $\text{Aff}(\overline{OA}) = \text{Aff}(\overline{CB})$ donc $\overline{OA} = \overline{CB}$; donc OABC est un parallélogramme.

On a $A \in \zeta$ et $C \in \zeta$ signifie que $OA = OC = 1$.

Conclusion :

$$\left. \begin{array}{l} \overline{OA} = \overline{CB} \\ OA = OC \end{array} \right\} \text{ donc OABC est un losange.}$$

B) 1) $z_1 = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\frac{\pi}{3}}$; $A_1(z_1)$; $A_0(1)$ et $A_n(z_n)$ avec $z_n = (z_1)^n$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

$$z_2 = z_1^2 = (e^{i\frac{\pi}{3}})^2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2) Montrons que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $A_n \in \zeta$.

Pour $n = 0$; $OA_0 = 1$ donc $A_0 \in \zeta$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$; $OA_n = |z_n| = |z_1|^n = 1$ donc $A_n \in \zeta$.

d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $A_n \in \zeta$.

3)* $z_{n+1} - z_n = (z_1)^{n+1} - (z_1)^n = (z_1)^n [z_1 - 1]$

$$= (z_1)^n \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - 1 \right) = (z_1)^n \left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right).$$

$$* |z_{n+1} - z_n| = \left| (z_1)^n \left(-\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) \right| = |z_1|^n \cdot \left| -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right|.$$

$$\text{Or } |z_1|^n = 1 \text{ et } \left| -\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right| = 1 \text{ d'où } |z_{n+1} - z_n| = 1.$$

$$* A_n A_{n+1} = |z_{n+1} - z_n| = 1.$$

* D'après (2) on a montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$; $A_n \in \zeta$.

Donc $A_{n+1} \in \zeta$ ce la signifie que $OA_n = OA_{n+1} = 1$.

Donc : $OA_n = OA_{n+1} = A_n A_{n+1} = 1$.

Donc les triangles $OA_n A_{n+1}$ sont équilatéraux.

20 1) Pour tout $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = z^2 + (1+2i)z - \frac{1}{2} + i$.

$$2) P(z) = (z + \frac{1}{2} + i)^2 - (\frac{1}{2}i)^2 = (z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)(z + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i).$$

$$* P(z) = 0 \Leftrightarrow z + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = 0 \text{ ou } z + \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i = 0.$$

$$\Leftrightarrow z_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}i \text{ ou } z_2 = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i \text{ d'où } S_C = \{z_1, z_2\}.$$

3) a) M est un point invariant par f signifie que $f(M) = M$

$$\text{avec } (M(z), z \neq -1 - 5i) \text{ équivaut à } z = \frac{3iz + \frac{1}{2} - i}{z + 1 + 5i}$$

ou encore $z^2 + (1+2i)z - \frac{1}{2} + i = 0$ et d'après (2) on déduit :

$I(z_1)$ et $J(z_2)$.

b) Soit $K = \{M(z) \in \mathbb{P} \setminus \{A\} \text{ tel que } |z| = 3\}$.

Déterminons l'ensemble K.

$$\text{Pour tout } z \in \mathbb{C} - \{-1 - 5i\} \text{ on a } z' = 3i \frac{z - (\frac{1}{3} + \frac{1}{6}i)}{z - (-1 - 5i)}$$

$$\text{ou encore } z' = 3i \frac{z - z_B}{z - z_A}$$

$$|z| = 3 \Leftrightarrow |3i| \cdot \left| \frac{z - z_B}{z - z_A} \right| = 3 \Leftrightarrow \left| \frac{z - z_B}{z - z_A} \right| = 1. \Leftrightarrow \frac{MB}{MA} = 1 \Leftrightarrow MA = MB.$$

Ainsi l'ensemble K est la médiatrice du segment [AB].



1) Soit $\alpha = \sqrt{2} + i\sqrt{2} = \sqrt{2}(1+i)$

$$\alpha^3 = \alpha^2 \cdot \alpha = 2 \cdot 2i\sqrt{2}(1+i) = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i.$$

2) a) (E) $z^3 = 4\sqrt{2}i - 4\sqrt{2}$

$$|z^3| = |4\sqrt{2}i - 4\sqrt{2}| = \sqrt{32+32} = 8$$

Soit $\text{Arg } z^3 \equiv \theta(2\pi)$

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{-4\sqrt{2}}{8} \\ \sin \theta = \frac{4\sqrt{2}}{8} \end{cases} \text{ signifie } \begin{cases} \cos \theta = \frac{-\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \text{ signifie } \theta \equiv \frac{3\pi}{4}(2\pi) \text{ donc } z^3 = \left[8, \frac{3\pi}{4}\right].$$

Les solutions de (E) dans $\mathbb{C}$ sont : $z_k = \left[\sqrt[3]{8}, \frac{\pi}{4} + \frac{2k\pi}{3}\right]$ avec $k \in \{0, 1, 2\}$.

Pour $k = 0$; $z_0 = \left[2, \frac{\pi}{4}\right]$.

$k = 1$; $z_1 = \left[2, \frac{11\pi}{12}\right]$. et $k = 2$; $z_2 = \left[2, \frac{19\pi}{12}\right]$.

b) $z^3 = 1(E_0)$; soit $z = [r, \beta]$.

$$[r, \beta]^3 = 1 \Leftrightarrow [r^3, 3\beta] = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} r = 1 \\ \beta = \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \text{ avec } k \in \{0, 1, 2\}.$$

Donc les solutions de l'équation (E_0) sont : $z_k = \left[1, \frac{2k\pi}{3}\right]$ avec $k \in \{0, 1, 2\}$

Pour $k = 0$; $z_0 = [1, 0] = 1$.

Pour $k = 1$; $z_1 = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right] = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Pour $k = 2$; $z_2 = \left[1, \frac{4\pi}{3}\right] = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$.

c) D'après (1) $\alpha^3 = -4\sqrt{2} + 4\sqrt{2}i$.

Donc l'équation (E) devient : $z^3 = \alpha^3$ ou encore $\left(\frac{z}{\alpha}\right)^3 = 1$.

En utilisant (2) b) $\frac{z_k}{\alpha} = \left[1, \frac{2k\pi}{3}\right]$.

Pour $k = 0$; $z_0 = \alpha = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$.

Pour $k = 1$; $z_1 = \alpha(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = (\sqrt{2} + i\sqrt{2})(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{2} + i\frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$.

Pour $k = 2$; $z_2 = \alpha(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = (\sqrt{2} + \sqrt{2}i)(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}) = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} + i\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$.

et on a $\begin{cases} \operatorname{Re}(z_1) < 0 \\ \operatorname{Im}(z_1) > 0 \end{cases}$; $\begin{cases} \operatorname{Re}(z_2) > 0 \\ \operatorname{Im}(z_2) < 0 \end{cases}$

d'où $[2, \frac{11\pi}{12}] = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2} + i\frac{+\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$ et $[2, \frac{19\pi}{12}] = \frac{-\sqrt{2} + \sqrt{6}}{2} + i\frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$

On en déduit que $2\cos\frac{11\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$ et $2\sin\frac{19\pi}{12} = \frac{-\sqrt{6} - \sqrt{2}}{2}$

d'où $\cos\frac{11\pi}{12} = \sin\frac{19\pi}{12} = \frac{-\sqrt{2} - \sqrt{6}}{4}$.

22 1) Z_0 est une solution de l'équation

$$\Leftrightarrow aZ_0^4 + bZ_0^3 + cZ_0^2 + dZ_0 + e = 0$$

$$\Leftrightarrow \overline{aZ_0^4 + bZ_0^3 + cZ_0^2 + dZ_0 + e} = 0 \text{ or } a, b, c, d \text{ et } e \text{ des réels.}$$

$$\Leftrightarrow a\overline{Z_0^4} + b\overline{Z_0^3} + c\overline{Z_0^2} + d\overline{Z_0} + e = 0 \Leftrightarrow a\overline{Z_0^4} + b\overline{Z_0^3} + c\overline{Z_0^2} + d\overline{Z_0} + e = 0$$

D'où $\overline{Z_0}$ est une solution de l'équation (E).

2) $Z_0 = \alpha(1 + i)$ est une solution de l'équation

équivalent à $2(\alpha(1+i))^4 + 3(\alpha(1+i))^2 + 3\sqrt{3}(\alpha(1+i)) + 9 = 0$

$$\Leftrightarrow -8\alpha^4 + 6\alpha^2 i + 3\sqrt{3}(\alpha + i\alpha) + 9 = 0 \Leftrightarrow -8\alpha^4 + 3\sqrt{3}\alpha + 9 + i(6\alpha^2 + 3\sqrt{3}\alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -8\alpha^4 + 3\sqrt{3}\alpha + 9 = 0 \\ 3\alpha(2\alpha + \sqrt{3}) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -8\alpha^4 + 3\sqrt{3}\alpha + 9 = 0 \quad (1) \\ \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2} \end{cases}$$

$\alpha = 0$ ne vérifie pas (1)

$$\alpha = \frac{-\sqrt{3}}{2} ; -8 \cdot \frac{9}{16} + 3\sqrt{3} \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 9 = -\frac{9}{2} - \frac{9}{2} + 9 = 0$$

donc $Z_0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}(1 + i)$ est une solution de l'équation.

En utilisant la 1^{ère} question donc $\overline{Z_0} = -\frac{\sqrt{3}}{2}(1 - i)$ est aussi une solution de l'équation.

Factorisons $2Z^4 + 3Z^2 + 3\sqrt{3}Z + 9 = (Z - Z_0)(Z - \overline{Z_0})(aZ^2 + bZ + c)$

$$\begin{aligned}
 &= \left(Z + \frac{\sqrt{3}}{2}(1+i)\right) \left(Z + \frac{\sqrt{3}}{2}(1-i)\right) (aZ^2 + bZ + c) \\
 &= aZ^4 + (b + \sqrt{3}a)Z^3 + \left(c + \frac{3}{2}a + b\sqrt{3}\right)Z^2 + \left(\frac{3}{2}b + c\sqrt{3}\right)Z + \frac{3}{2}c.
 \end{aligned}$$

par identification on obtient : $a = 2$; $b = -2\sqrt{3}$; $c = 6$

$$2Z^4 + 3Z^2 + 3\sqrt{3}Z + 9 = 0$$

$$\Leftrightarrow Z = Z_0 \text{ ou } Z = \overline{Z_0} \text{ ou } 2Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 6 = 0$$

$$2Z^2 - 2\sqrt{3}Z + 6 = 0$$

$$\Delta' = 3 - 12 = -9 = (3i)^2$$

$$Z' = \frac{\sqrt{3} + 3i}{2} \text{ et } Z'' = \frac{\sqrt{3} - 3i}{2} \text{ d'où les solutions sont :}$$

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}(1+i) ; -\frac{\sqrt{3}}{2}(1-i) ; \frac{\sqrt{3} + 3i}{2} ; \frac{\sqrt{3} - 3i}{2}.$$

23 1) On a $P(1) = 0$, il existe donc des nombres complexes a, b, c et d tels que pour tout complexe z ; $P(z) = (z - 1)(az^3 + bz^2 + cz + d)$.
En développant on obtient : $P(z) = az^4 + (b - 1)z^3 + (c - b)z^2 + (d - c)z - d$.

$$\text{Par identification on obtient : } \begin{cases} a=1 \\ b-1=-1 \\ c-b=0 \\ d-c=1 \\ -d=-1 \end{cases} \text{ donc } \begin{cases} a=1 \\ b=0 \\ c=0 \\ d=1 \end{cases}$$

On a donc $P(z) = (z - 1)Q(z)$ avec $Q(z) = z^3 + 1$

on obtient $Q(z) = (z + 1)(z^2 - z + 1)$ en utilisant la méthode précédente ou l'identité $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

donc $Q(z) = (z + 1) \cdot R(z)$ avec $R(z) = z^2 - z + 1$.

2) On a $P(z) = (z - 1)(z + 1)(z^2 - z + 1)$

donc $P(z) = 0$ équivaut à $z = 1$ ou $z = -1$ ou $z^2 - z + 1 = 0$.

l'équation $z^2 - z + 1 = 0$ a pour discriminant $\Delta = -3$ et pour racines :

$$\frac{1 - \sqrt{3}i}{2} \text{ et } \frac{1 + \sqrt{3}i}{2}.$$

$$S_C = \{1, -1, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i, \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\}.$$

3) On a $\alpha = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ c'est à dire $\alpha = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}$

pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\alpha^n = \cos \frac{n\pi}{3} + i \sin \frac{n\pi}{3}$, on obtient

$$\alpha^2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \alpha^3 = -1$$

$$\alpha^4 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\alpha^5 = \frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ et } \alpha^6 = 1 \text{ et } \alpha^{2004} = 1 \text{ car } \alpha^{2004} = (\alpha^6)^{334}.$$

24 1) $P(z) = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1$
 $z \cdot P(z) = z^7 + z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z$
 $z \cdot P(z) = z^6 + z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 - 1 + z^7$
 $z \cdot P(z) = P(z) + z^7 - 1$
 $(z - 1)P(z) = z^7 - 1$
 $z \neq 1 \text{ donc } P(z) = \frac{z^7 - 1}{z - 1} = \frac{1 - z^7}{1 - z}.$

2) z est racine septièmes de l'unité dans $\mathbb{C}$ signifie que :

$$z^7 = 1 \text{ d'où } z = z_k = [1, \frac{2k\pi}{7}] = e^{i\frac{2k\pi}{7}} \text{ avec } k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$P(z) = 0 \text{ signifie que } \begin{cases} 1 - z^7 = 0 \\ z \neq 1 \end{cases} \text{ signifie que } z = z_k = [1, \frac{2k\pi}{7}]$$

avec $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

3) $P(z) = (z - z_1)(z - z_2)(z - z_3)(z - z_4)(z - z_5)(z - z_6)$

$$z_1 = [1, \frac{2\pi}{7}]; z_2 = [1, \frac{4\pi}{7}]; z_3 = [1, \frac{6\pi}{7}]; z_4 = [1, \frac{8\pi}{7}] = [1, -\frac{6\pi}{7}] = \overline{z_3}$$

$$z_5 = [1, \frac{10\pi}{7}] = [1, -\frac{4\pi}{7}] = \overline{z_2}.$$

$$z_6 = [1, \frac{12\pi}{7}] = [1, -\frac{2\pi}{7}] = \overline{z_1}.$$

$$P(z) = [(z - z_1)(z - \overline{z_1})][(z - z_2)(z - \overline{z_2})][(z - z_3)(z - \overline{z_3})].$$

$$P(z) = [z^2 - (z_1 + \overline{z_1})z + z_1\overline{z_1}][z^2 + (z_2 + \overline{z_2})z + z_2\overline{z_2}][z^2 - (z_3 + \overline{z_3})z + z_3\overline{z_3}]$$

$$= (z^2 - 2\cos\frac{2\pi}{7}z + 1)(z^2 - 2\cos\frac{4\pi}{7}z + 1)(z^2 - 2\cos\frac{6\pi}{7}z + 1).$$

4) $P(z) = 0$ signifie que $z = z_k \neq 0$ donc il existe $Z = z + \frac{1}{z}$.

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow \frac{P(z)}{z^3} = 0 \Leftrightarrow z^3 + z^2 + z + 1 + \frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z^3} = 0.$$

$$\Leftrightarrow (z^3 + \frac{1}{z^3}) + (z^2 + \frac{1}{z^2}) + (z + \frac{1}{z}) + 1 = 0.$$

$$\Leftrightarrow \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - 3\left(z + \frac{1}{z}\right) + \left(z + \frac{1}{z}\right)^2 - 2 + \left(z + \frac{1}{z}\right) + 1 = 0. \Leftrightarrow \begin{cases} Z^3 + Z^2 - 2Z - 1 = 0 \text{ (E')} \\ Z = z + \frac{1}{z} \end{cases}$$

Soit l'équation : (E) : $8x^3 + 4x^2 - 4x - 1 = 0$.

$z = z_1 = e^{i\frac{2\pi}{7}}$ solution de $P(z) = 0$

$$\Leftrightarrow Z = Z_1 = z_1 + \frac{1}{z_1} = z_1 + \overline{z_1} = 2\cos\frac{2\pi}{7} \text{ solution de l'équation (E')}.$$

$$\Leftrightarrow 8\cos^3\frac{2\pi}{7} + 4\cos^2\frac{2\pi}{7} - 4\cos\frac{2\pi}{7} - 1 = 0. \Leftrightarrow \cos\frac{2\pi}{7} \text{ solution de (E)}.$$

de même pour $z = z_2 = e^{i\frac{4\pi}{7}}$ et $z = z_3 = e^{i\frac{6\pi}{7}}$ sont solutions de $P(z) = 0$

$$\Leftrightarrow Z = Z_2 = 2\cos\frac{4\pi}{7} \text{ et } Z = Z_3 = 2\cos\frac{6\pi}{7} \text{ sont solutions de (E')}.$$

d'où $\cos\frac{4\pi}{7}$ et $\cos\frac{6\pi}{7}$ sont solutions de (E).

$$5) W = e^{i\frac{2\pi}{7}} = z_1.$$

a) $z_2 = W^2$; $z_3 = W^3$; $z_4 = W^4$; $z_5 = W^5$; $z_6 = W^6$
sont les solutions de $P(z) = 0$.

donc $P(z) = (z - W)(z - W^2)(z - W^3)(z - W^4)(z - W^5)(z - W^6)$.

b) $(1 - W)(1 - W^2)(1 - W^3)(1 - W^4)(1 - W^5)(1 - W^6) = P(1) = 7$.

$$c) 1 - W^k = 1 - e^{i2\frac{k\pi}{7}} = e^{i\frac{k\pi}{7}}(e^{-i\frac{k\pi}{7}} - e^{i\frac{k\pi}{7}}) = -2i \cdot e^{i\frac{k\pi}{7}} \cdot \sin\frac{k\pi}{7}.$$

$$|1 - W^k| = 2\sin\frac{k\pi}{7}; \frac{k\pi}{7} \in]0, \pi[\text{ avec } k \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

$$|1 - W| \cdot |1 - W^2| \cdot |1 - W^3| \cdot |1 - W^4| \cdot |1 - W^5| \cdot |1 - W^6| = 7.$$

$$2 \cdot \sin\frac{\pi}{7} \cdot 2 \cdot \sin\frac{2\pi}{7} \cdot 2 \cdot \sin\frac{3\pi}{7} \cdot 2 \cdot \sin\frac{4\pi}{7} \cdot 2 \cdot \sin\frac{5\pi}{7} \cdot 2 \cdot \sin\frac{6\pi}{7} = 7$$

$$\text{d'où } \sin\frac{\pi}{7} \cdot \sin\frac{2\pi}{7} \cdot \sin\frac{3\pi}{7} \cdot \sin\frac{4\pi}{7} \cdot \sin\frac{5\pi}{7} \cdot \sin\frac{6\pi}{7} = \frac{7}{2^6}.$$



$$1) a) \frac{z^2 + 2i}{z^2 - 2i} = \frac{\frac{z^2 - 4}{2z} + 2i}{\frac{z^2 - 4}{2z} - 2i} = \frac{z^2 - 4 + 4iz}{z^2 - 4 - 4iz} = \left(\frac{z + 2i}{z - 2i}\right)^2$$

$$b) \operatorname{Arg} \frac{z^2 + 2i}{z^2 - 2i} \equiv \operatorname{Arg} \left(\frac{z + 2i}{z - 2i}\right)^2 \pmod{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{Arg} \frac{z' - (-2i)}{z' - (2i)} \equiv 2 \operatorname{Arg} \left(\frac{z - (-2i)}{z - (2i)} \right) (2\pi)$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{M'A}, \overrightarrow{M'B}) \equiv 2 (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) (2\pi)$$

$$* \left| \frac{z' + 2i}{z' - 2i} \right| = \left| \frac{z + 2i}{z - 2i} \right|^2 \Leftrightarrow \frac{M'B}{M'A} = \left(\frac{MB}{MA} \right)^2$$

$$* z' \text{ imaginaire pur} \Leftrightarrow z' = 0 \text{ ou } \operatorname{Arg} z' = \frac{\pi}{2} + k\pi$$

$$\Leftrightarrow z^2 = 4 \text{ ou } (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \frac{\pi}{2} (\pi)$$

$$* (\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{MB}) \equiv \frac{\pi}{2} (\pi) \Leftrightarrow M \in \text{cercle de diamètre } [AB] \text{ privée de A et de B}$$

$$\text{de centre O de rayon } \frac{AB}{2} = 2$$

$$* z^2 = 4 \Leftrightarrow z = 2 \text{ ou } z = -2$$

L'ensemble recherché est le cercle de centre O de rayon 2 privée de A et de B.

$$\begin{aligned} 2) a) (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) &\equiv \operatorname{Arg} \left(\frac{z_B - z_I}{z_A - z_I} \right) \equiv \operatorname{Arg} \left(\frac{-2i + 4 - 2i}{2i + 4 - 2i} \right) (2\pi) \\ &\equiv \operatorname{Arg}(1 - i) \equiv -\frac{\pi}{4} (2\pi). \end{aligned}$$

$$\frac{IB}{IA} = \frac{|z_B - z_I|}{|z_A - z_I|} = |1 - i| = \sqrt{2}.$$

$$b) |z + 2i| = 2|z - 2i| \Leftrightarrow MB = 2MA$$

$$\Leftrightarrow MB^2 - 4MA^2 = 0 \Leftrightarrow (\overrightarrow{MB} - 2\overrightarrow{MA}) \cdot (\overrightarrow{MB} + 2\overrightarrow{MA}) = 0$$

Soit J_1 le barycentre de $\{(B, 1), (A, -2)\}$

et J_2 le barycentre de $\{(B, 1); (A, 2)\}$

donc E est le cercle de diamètre $[J_1 J_2]$.

$$\overrightarrow{BJ_1} = 2\overrightarrow{BA} \text{ donc } J_1(6i)$$

$$\overrightarrow{BJ_2} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} \text{ donc } J_2\left(\frac{2}{3}i\right)$$

$$c) \frac{I'A}{I'B} = \left(\frac{IB}{IA} \right)^2 = 2 \Rightarrow I' \in (E)$$

$$(\overrightarrow{I'A}, \overrightarrow{I'B}) = 2(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IB}) \equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi) \Rightarrow I' \in C_0$$

demi cercle de diamètre $[AB]$

avec $x \leq 0$.

donc $I' \in C_0 \cap E$.

$$3) \theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$$

a) z_1 et z_2 sont les solutions de l'équation

$$\frac{z^2 - 4}{2z} = 2i \sin \theta$$

$$\Leftrightarrow z^2 - 4i \sin \theta z - 4 = 0$$

$$\Delta' = (2i \sin \theta)^2 + 4 = 4(1 - \sin^2 \theta) = 4 \cos^2 \theta = (2 \cos \theta)^2$$

$$z = 2i \sin \theta + 2 \cos \theta \quad \text{ou} \quad z = 2i \sin \theta - 2 \cos \theta$$

$$\operatorname{Ré}(z_1) > 0 \quad \text{donc} \quad z_1 = 2 \cos \theta + 2i \sin \theta = 2e^{i\theta}$$

$$\text{et } z_2 = -2 \cos \theta + 2i \sin \theta = 2e^{i(\pi-\theta)}$$

$$b) |z_1| = |z_2| = |2i| = |-2i| = 2 \quad \text{donc} \quad OA = OB = OM_1 = OM_2 = 2$$

par suite A, B, M_1 et M_2 sont situés sur le cercle de centre O de rayon 2.

on a : $z_2 = -\overline{z_1} \Rightarrow S_{(O, j)}(M_2) = M_1$ et $B \in (O \vec{j})$ Alors $M_1 M_2 B$ est

isocèle de sommet principal B.

