

ENONCES



Soit $A(-1,2,5)$, $B(0,-1,3)$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

Montrer que $C(1,-4,1)$ est le projeté orthogonal de $D(5,-2,0)$ sur la droite (AB) .



OABC un tétraèdre tel que $OA = OB = OC = a$ et $(OA) \perp (OB)$ et $(OA) \perp (OC)$ et $(OB) \perp (OC)$

[CI] hauteur du triangle ABC

[OH] hauteur du triangle OIC

D le point de l'espace tel que $\overline{HO} = \overline{OD}$

$(O, \frac{1}{a}\overline{OA}, \frac{1}{a}\overline{OB}, \frac{1}{a}\overline{OC})$ un repère orthonormé.

1) Montrer que H a pour coordonnées $(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}, \frac{a}{3})$

2) Montrer que le tétraèdre ABCD est régulier.



ABCDEFGH est un cube de côté a .

1) a) Que peut on dire des faces de AFCH ?

b) Déterminer V_1 le volume de Tétraèdre AFEH.

c) Déterminer V_2 le volume de Tétraèdre AECH.

d) En déduire la distance de point A au plan (HFC).

2) Soit J le milieu de [FC]

a) Montrer que $\overline{AH} \cdot \overline{FC} = 0$. Conclure.

b) Calculer $\overline{JA} \cdot \overline{JH}$ en fonction de a .



Indiquer la réponse exacte par a, b ou c. Justifier votre réponse.

1) $(\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v})$ est égale à :

a) $\vec{0}$ b) $-2\vec{u} \wedge \vec{v}$ c) $\vec{u}^2 - \vec{v}^2$

2) $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ vecteur orthogonal au plan P et $\vec{n}' \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$ vecteur orthogonal au

plan P' et P est parallèle à P' alors :

a) $\vec{n} \cdot \vec{n}' = 0$ b) $\vec{n} \wedge \vec{n}' = \vec{0}$ c) $\vec{n} \perp \vec{n}'$

3) $A(-\frac{1}{2}, 0, 0)$; $B(\frac{1}{2}, 0, 0)$ et $M(x, y, z)$ alors $\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}$ est de coordonnées:

a) $\begin{pmatrix} 0 \\ -z \\ y \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 0 \\ z \\ y \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} y \\ -z \\ 0 \end{pmatrix}$



5 Dire si l'affirmation est vraie ou fausse. Justifier votre réponse.

1) $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont trois vecteurs coplanaires $\Rightarrow \vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{w}$.

2) $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = l'$ aire du triangle ABC.

3) $(\vec{u} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{w} - \|\vec{w}\|^2 \cdot \vec{u}$ avec $\vec{u}(a, 0, 0)$ $\vec{w}(b, c, 0)$ dans R.O.N. $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.



6 Dans l'espace on considère une base O.N. $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

$$\vec{u} = \vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k} \quad , \quad \vec{v} = -\vec{i} + 2\vec{j} + \vec{k} \quad , \quad \vec{w} = 2\vec{i} + \vec{j}.$$

Calculer les coordonnées de $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w}$ et $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$. comparer les résultats.



7 Soit dans l'espace un repère $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ orthonormé direct

$$A(1, 0, 1) \quad ; \quad B(2, 0, 0) \quad ; \quad C(0, 2, -1).$$

1) Calculer l'aire du triangle ABC.

2) Déterminer les coordonnées du vecteurs $\vec{n}$ normal au plan (ABC)



8 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé direct on considère les points : $A(1, 0, 0)$; $B(1, -1, 1)$; $C(-2, 0, 1)$.

1) Déterminer le barycentre G des points A, B et C affectes respectivement des coefficients 2, -2, 1.

2) On associe à tout point M de l'espace le vecteur $\vec{V} = 2\overrightarrow{MA} - 2\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}$.

Exprimer le vecteur $\vec{V}$ en fonction du vecteur $\overrightarrow{MG}$.

3) a) Le point M de coordonnées (x, y, z) . Déterminer $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{V}$.

b) Calculer $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{V}$.

4) Déterminer le point M tel que $\overrightarrow{AB} \wedge \vec{V} = \overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{V} = 0$.



9 $(o, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ R.O.N direct. On donne les points $A(3, 2, -1)$ et $H(1, -1, 3)$.

1) Calculer AH.

2) Déterminer une équation de plan P passant par H et orthogonal à (AH).

3) On donne les points $B(-6, 1, 1)$ $C(4, -3, 3)$ et $D(-1, -5, -1)$.

a) Montrer que B, C, D appartiennent au plan P.

b) Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}$.

c) Montrer que l'aire du triangle BCD est égale à $5\sqrt{29}$.

d) Montrer que le volume du tétraèdre ABCD est égal à $\frac{145}{3}$.

(Formule du volume de tétraèdre $\frac{1}{3} \text{Base} \times \text{hauteur}$).

4) a) Calculer l'aire de ABC.

b) Calculer la distance de D au plan (ABC).

10 On considère les points A, B, C de coordonnées respectives (2, 0, 1) (3, -2, 0) et (2, 8, -4) dans un R.O.N.D ($\vec{o}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$).

1) Soit M(x, y, z). Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM}$.

2) Déterminer les réels x, y, z tels que
$$\begin{cases} -x + y = -4 + 2z \\ -x - y = -11 + z \\ 2x + y - z = 8 \end{cases}$$

3) Montrer qu'il existe un unique point N vérifiant $\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$ et donner les coordonnées du point N.

4) a) Montrer que le volume du tétraèdre ABCN est égal à $\frac{1}{6} \text{CN}^2$.

b) En prenant M = C et en utilisant la question 1°) Calculer l'aire du triangle ABC.

c) En déduire la distance de N au plan ABC.

11 Soit ($\vec{O}, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}$) un R.O.N.D et M(x, y, z)

H son projeté orthogonal sur le plan (ABC) et K son projeté orthogonal sur la droite (AB).

1) a) Soit G le barycentre des points A, B, C affectés des coefficients 1, 1, 1. Déterminer les coordonnées de G.

b) Montrer que $(\vec{OG}) \perp (\text{ABC})$.

c) Donner une équation cartésienne du plan (ABC).

2) a) Montrer que $|\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{OG}| = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{MH}$.

b) Calculer la distance de M au plan ABC en fonction de x, y et z.

3) a) Interpréter géométriquement $\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\|$

Exprimer la distance MK en fonction de cette norme.

b) En déduire que $MK = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{2z^2 + (1-x-y)^2}$.

4) On se place dans le plan (OAB) : $z = 0$ et on considère l'ensemble Γ des points de plan (OAB) qui sont équidistants du point O et du plan (ABC).

a) Montrer que Γ ne contient aucun point de la droite (AB).

b) $M(x, y, 0)$ un point de (OAB) et n'appartient pas à (AB).

En utilisant les questions 2) et 3) Calculer $\frac{MH}{MK}$.

12

On donne, dans le plan, un quadrilatère convexe ABCD

Les diagonales [AC] et [BD] se coupent en E.

Soit F le point tel que $\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{BE}$.

1) Comparer les distances BD et EF puis les aires des triangles ABD et AEF.

2) Montrer que le quadrilatère ABCD et le triangle AFC ont même aire.

3) Montrer que $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AF}$.

En déduire l'aire du quadrilatère ABCD à l'aide d'une expression faisant intervenir les vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$.

CORRIGES

1

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ alors } \overrightarrow{AC} = 2\overrightarrow{AB} \text{ donc } C \in (AB)$$

$$\overrightarrow{CD} \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}; \overrightarrow{CD} \cdot \overrightarrow{AB} = 4 - 6 + 2 = 0 \text{ donc } (CD) \perp (AB) \text{ en } C$$

Ainsi C est le projeté orthogonale de D sur (AB).

2

O(0,0,0) A(a, 0,0) B(0, a, 0) et C(0,0,a).

1) OA = OB = OC = a et OAB, OAC et OBC sont des triangles rectangles en O.

Donc BC = BA = AC ainsi a ABC, est équilatéral

I le milieu de [AB] alors I($\frac{a}{2}, \frac{a}{2}, 0$)

$$\overrightarrow{CI} \begin{pmatrix} \frac{a}{2} \\ \frac{a}{2} \\ -a \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CH} \begin{pmatrix} \frac{a}{3} \\ \frac{a}{3} \\ -\frac{2a}{3} \end{pmatrix} \text{ alors } \overrightarrow{CI} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CH} \text{ comme } \overrightarrow{OH} \begin{pmatrix} \frac{a}{3} \\ \frac{a}{3} \\ \frac{a}{3} \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OH} \cdot \overrightarrow{CI} = \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{2} + \frac{a}{3} \cdot \frac{a}{2} + \frac{a}{3}(-a) = \frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{6} - \frac{a^2}{3} = 0$$

D'où (OH) $\perp$ (CI) en H, ainsi [OH] est la hauteur issue de O au triangle OCI.

$$2) BC^2 = AB^2 = AC^2 = OA^2 + OC^2 = 2a^2.$$

$$\overrightarrow{HO} = \overrightarrow{OD} \Rightarrow D(-\frac{a}{3}, -\frac{a}{3}, -\frac{a}{3}) \text{ et } AD^2 = \left(-\frac{a}{3} - a\right)^2 + \frac{a^2}{9} + \frac{a^2}{9} = 2a^2$$

$$BD^2 = \left(-\frac{a}{3}\right)^2 + \left(-\frac{a}{3} - a\right)^2 + \left(-\frac{a}{3}\right)^2 = 2a^2 \text{ de même } CD^2 = 2a^2$$

Donc AD = BD = CD = BC = AB = AC d'où ABCD est régulier.

3

1) a) [AF], [HF], [CF] et [AC] sont les diagonales d'un carré de côté a

Donc AF = HF = CH = AC = $a\sqrt{2}$

$$b) V_1 = \frac{1}{3} \text{ aire (AEH)} \times FE = \frac{1}{3} \frac{a \times a}{2} \times a = \frac{a^3}{6}$$

$$c) \text{ On a } V_{AEFH} = V_{ADHC} = V_{HGCF} = V_{ABCF}$$

$$\text{donc } V_2 = V_{\text{cube}} - (V_{AEFH} + V_{ADHC} + V_{HGCF} + V_{ABCF}) = a^3 - 4 \times \frac{a^3}{6} = \frac{1}{3}a^3$$

$$d) V_{AFCH} = \frac{1}{3} \text{ aire (HFC)} \times d(A, (\text{HFC}))$$

$$\text{comme HFC est équilatéral de côté } a\sqrt{2} \text{ sa hauteur est } \frac{\sqrt{3}}{2}(a\sqrt{2}) = \frac{\sqrt{6}}{2}a$$

$$\text{aire (HFC)} = \frac{\frac{\sqrt{6}}{2}a \cdot \sqrt{2}a}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2}$$

$$\text{donc } d(A, (\text{HFC})) = 3 V_{AFCH} \times \frac{1}{\text{aire(HFC)}} = 3 \times \frac{\frac{a^3}{3}}{\frac{\sqrt{3}a^2}{2}} = \frac{2a}{\sqrt{3}}$$

$$2) a) \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{ED} \text{ donc } \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{FC} = \overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{ED}$$

Or (AH) et (ED) sont les diagonales du carré ADHE. Par suite $\overrightarrow{AH} \cdot \overrightarrow{FC} = 0$
Les droites (AH) et (FC) sont orthogonales.

$$b) \overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JH} = \frac{1}{2}(JA^2 + JH^2 - AH^2)$$

or $AH = \sqrt{2}a$ et $JA = JH = a\sqrt{2}$ car JA hauteur du triangle équilatéral

$$\text{AFC d'où } \overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JH} = \frac{1}{2}\left(\frac{6a^2}{4} + \frac{6a^2}{4} - 2a^2\right) = \frac{1}{2}a^2$$

$$4) 1) (\vec{u} + \vec{v}) \wedge (\vec{u} - \vec{v}) = \underbrace{\vec{u} \wedge \vec{u}}_0 - \vec{u} \wedge \vec{v} + \vec{v} \wedge \vec{u} - \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{v}}_0 = -\vec{u} \wedge \vec{v} - \vec{u} \wedge \vec{v} = -2\vec{u} \wedge \vec{v}.$$

ainsi la réponse est b.

$$2) P // P' \Leftrightarrow \vec{n} \text{ et } \vec{n}' \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \vec{n} \wedge \vec{n}' = \vec{0}$$

d'où la réponse est b.

$$3) \overrightarrow{MA} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \text{ alors } \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

$$\text{avec } X = \begin{vmatrix} -y & -y \\ -z & -z \end{vmatrix} = 0 \text{ et } Z = \begin{vmatrix} -\frac{1}{2} & -x \\ \frac{1}{2} & -x \end{vmatrix} = -y(-\frac{1}{2} - x) + y(\frac{1}{2} - x) = y$$

$$\text{et } Y = \begin{vmatrix} -z & -z \\ -\frac{1}{2}-x & \frac{1}{2}-x \end{vmatrix} = -z(\frac{1}{2}-x) + z(\frac{1}{2}-x) = -z \text{ ainsi la réponse est } \boxed{a}.$$

5

1) Vraie : $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires $\Rightarrow \vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$

or $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u}$ et $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v}$ donc $\vec{u} \wedge \vec{v} \perp a\vec{u} + b\vec{v} = \vec{w}$.

2) faux : $\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = 2 \times \text{aire } ABC \neq \text{aire } ABC$.

3) Vrai : $\vec{u} \wedge \vec{w} (0, 0, ac) \Rightarrow (\vec{u} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{w}$ a pour coordonnées

$$(0 - ac^2, acb - 0, 0 - 0)$$

$$\Rightarrow (\vec{u} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{w} (-ac^2, acb, 0). \text{ On aussi } \vec{u} \cdot \vec{w} = ab \text{ et } \|\vec{w}\|^2 = b^2 + c^2.$$

$$\text{d'où } (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{w} - \|\vec{w}\|^2 \cdot \vec{u} \text{ a donc pour coordonnées } (-a^2c, abc, 0)$$

$$\text{donc } (\vec{u} \wedge \vec{w}) \wedge \vec{w} = (\vec{u} \cdot \vec{w}) \vec{w} - \|\vec{w}\|^2 \cdot \vec{u}.$$

6

$$\text{on a : } \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \vec{v} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ alors } \vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 4 = -5 \text{ et } Y = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -3 \text{ et } Z = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1$$

$$\text{d'où } \vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ or } \vec{w} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ donc } (\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Des calculs analogues donnent : $\vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w}) = \vec{i} + 3\vec{j} + \vec{k}$

on a donc $(\vec{u} \wedge \vec{v}) \wedge \vec{w} \neq \vec{u} \wedge (\vec{v} \wedge \vec{w})$.

7

$$1) \text{ aire } ABC = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \text{ or } \overrightarrow{AB}(1, 0, -1) \overrightarrow{AC}(-1, 2, -2)$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} = 2\vec{i} + 3\vec{j} + 2\vec{k} \text{ et aire } ABC = \frac{1}{2} \sqrt{4+9+4} = \frac{\sqrt{17}}{2}$$

2) $\vec{n}$ le vecteur normal à $(ABC) \Rightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$ et $\vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$

$$\Rightarrow \vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \Rightarrow \vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

8

$$1) \overrightarrow{OG} = \frac{1}{2+(-2)+1} (2\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}) = 2\overrightarrow{OA} - 2\overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$\text{alors } x_G = 2x_A - 2x_B + x_C = -2 \quad \text{et} \quad y_G = 2y_A - 2y_B + y_C = 2$$

$$\text{et } z_G = 2z_A - 2z_B + z_C = -1 \quad \text{d'où } G(-2, 2, -1).$$

$$\begin{aligned} 2) \quad \vec{V} &= 2\vec{MA} - 2\vec{MB} + \vec{MC} = 2(\vec{MG} + \vec{GA}) - 2(\vec{MG} + \vec{GB}) + (\vec{MG} + \vec{GC}) \\ &= \vec{MG} + \underbrace{2\vec{GA} - 2\vec{GB} + \vec{GC}}_0 = \vec{MG} \end{aligned}$$

$$3) a) \quad \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{V} \begin{pmatrix} -2-x \\ 2-y \\ -1-z \end{pmatrix} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \wedge \vec{V} \text{ a pour coordonnées}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 2-y \\ 1 & -1-z \end{vmatrix} = 1+z-2+y = y+z-1; \quad \begin{vmatrix} 1 & -1-z \\ 0 & -2-x \end{vmatrix} = -2-x \quad \text{et} \quad \begin{vmatrix} 0 & -2-x \\ -1 & -1-z \end{vmatrix} = -2-x$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{AB} \wedge \vec{V} \begin{pmatrix} y+z-1 \\ -2-x \\ -2-x \end{pmatrix}$$

$$b) \quad \overrightarrow{AB} \cdot \vec{V} = -2+y-1-z = y-z-3.$$

$$4) \quad \overrightarrow{AB} \cdot \vec{V} = 0 \Leftrightarrow y-z-3=0$$

$$\overrightarrow{AB} \wedge \vec{V} = \vec{OA} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z-1=1 \\ -2-x=0 \\ -2-x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y+z-1=0 \\ x=-2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y+z-1=1 \\ y-z-3=0 \end{cases} \quad \text{on additionne membre à membre on obtient } 2y-4=1$$

$$\text{soit } y = \frac{5}{2} \quad \text{d'où } z = -\frac{1}{2}. \text{ Un seul point répond au problème c'est le point}$$

$$\text{de coordonnées } (-2, \frac{5}{2}, -\frac{1}{2}).$$

$$\nabla 9) \quad \overrightarrow{AH} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ alors } AH = \sqrt{4+9+16} = \sqrt{29}$$

$$2) \quad (AH) \perp P \text{ donc } \overrightarrow{AH} \text{ vecteur normal de } P : -2x - 3y + 4z + 1 = 0 \\ \text{or } H \in P \text{ donc } -2+3+12+d=0 \Leftrightarrow d=-13 \text{ d'où } P: -2x-3y+4z-13=0.$$

$$3) a) \quad \text{Les coordonnées de B, C et D vérifient l'équation de } P : \\ (-2 \times -6 - 3 \times 1 + 4 \times 1 - 13 = 16 - 16 = 0 \Rightarrow B \in P) \text{ de même pour C et D.}$$

$$b) \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 10 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{BD} \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD} \text{ a pour coordonnées } (20, 30, -40).$$

$$c) \text{ l'aire } (BCD) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{BC} \wedge \overrightarrow{BD}\| = \frac{1}{2} \sqrt{20^2 + 30^2 + 40^2} = 5\sqrt{29}.$$

$$d) V = \frac{1}{3} B \times h = \frac{1}{3} (\text{aire } BCD) \times AH = \frac{1}{3} 5\sqrt{29} \cdot \sqrt{29} = \frac{145}{3}.$$

$$4) a) \text{ Aire } (ABC) = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\|$$

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -9 \\ -1 \\ 12 \end{pmatrix}; \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} (6, 38, 46)$$

$$\text{d'où l'aire } (ABC) = \frac{1}{2} \sqrt{6^2 + 38^2 + 46^2} = \sqrt{899}.$$

$$b) \text{ Le volume de } ABCD = \frac{1}{3} \text{ aire } (ABC) \times \text{hauteur issue de D}$$

$$= \frac{1}{3} \text{ aire } (ABC) \times d(D, (ABC)) \Rightarrow d(D, (ABC)) = \frac{3V}{\text{aire } ABC} = \frac{145}{\sqrt{899}} = 5\sqrt{\frac{29}{31}}$$



$$1) \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-2 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y+2 \\ z \end{pmatrix} \text{ alors les coordonnées de } \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} \text{ sont :}$$

$$X = \begin{vmatrix} y & y+2 \\ z-1 & z \end{vmatrix} = yz - (z-1)(y+2) = y - 2z + 2$$

$$Y = \begin{vmatrix} z-1 & z \\ x-2 & x-3 \end{vmatrix} = (z-1)(x-3) - z(x-2) = -x - z + 3$$

$$Z = \begin{vmatrix} x-2 & x-3 \\ y & y+2 \end{vmatrix} = (x-2)(y+2) - y(x-3) = 2x + y - 4$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} y-2z+2 \\ -x-z+3 \\ 2x+y-4 \end{pmatrix}$$

$$2) \begin{cases} -x + y = -4 + 2z & (1) \\ -x - y = -11 + z & (2) \\ 2x + y - z = 8 & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \text{ donne } -2x = -15 + 3z \Rightarrow 2x = 15 - 3z$$

$$(1) - (2) \text{ donne } 2y = 7 + z \Rightarrow y = \frac{7+z}{2}$$

$$\text{On remplace dans (3) on obtient : } (15-3z) + \frac{7+z}{2} - z = 8 \Rightarrow z = 3$$

$$\text{d'où } 2x = 6 \Rightarrow x = 3 \text{ et } y = 5$$

la seule solution de ce système est : (3, 5, 3).

$$3) \text{ On sait que } \overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} \begin{pmatrix} y-2z+2 \\ -x-z+3 \\ 2x+y-4 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{CN} \begin{pmatrix} x-2 \\ y-8 \\ z+4 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN} \Leftrightarrow \begin{cases} y-2z+2 = x-2 \\ -x-z+3 = y-8 \\ 2x+y-4 = z+4 \end{cases}$$

$$\text{Soit } \begin{cases} -x+y=2z-4 \\ -x-y=z-11 \\ 2x+y-z=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=5 \\ z=3 \end{cases}$$

D'où il existe un unique point N(3, 5, 3) solution du système de la Question 2).

$$4) a) \overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN} \text{ alors } \overrightarrow{CN} \perp \text{ à } \overrightarrow{AN} \text{ et à } \overrightarrow{BN} \Rightarrow \overrightarrow{CN} \perp (ABN) \Rightarrow CN \text{ est la hauteur de tétraèdre ainsi le volume(ABCN)}$$

$$= \frac{1}{3} \text{aire}(ABN) \times CN = \frac{1}{3} \times \frac{\|\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN}\|}{2} \times CN = \frac{1}{6} \|\overrightarrow{CN}\| \cdot CN = \frac{1}{6} CN^2.$$

b) En remplaçant les coordonnées de M par celles de C

$$\text{On obtient } \begin{cases} X = 8+8+2 = 18 \\ Y = -2+4+3 = 5 \\ Z = 4+8-4 = 8 \end{cases}$$

$$\text{L'aire de ABC} = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{18^2 + 5^2 + 8^2} = \frac{\sqrt{413}}{2}.$$

c) Le tétraèdre ABCN a pour base ABC et pour hauteur issue de N appelons h la distance de N au plan ABC

$$\text{Volume de (ABCN)} = \frac{1}{3} \text{aire}(ABC) \times h \text{ or } \text{Volumede(ABCN)} = \frac{1}{6} CN^2$$

$$\text{D'où } \frac{1}{3} h \times \text{aire}(ABC) = \frac{1}{6} CN^2$$

$$\text{Soit } h = \frac{\frac{1}{2}CN^2}{\text{aire}(ABC)} \text{ or } \overline{CN} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow CN = \sqrt{1+9+49} = \sqrt{59}$$

$$\text{D'où } h = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{59}^2}{\frac{1}{2}\sqrt{413}} = \frac{59}{\sqrt{413}} \approx 2,9.$$

$$\text{11) a) } \overline{OG} = \frac{1}{1+1+1}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}) = \frac{1}{3}(\overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC})$$

$$\text{d'où } x_G = \frac{1}{3}(x_A + x_B + x_C); y_G = \frac{1}{3}(y_A + y_B + y_C) \text{ et } z_G = \frac{1}{3}(z_A + z_B + z_C)$$

$$\text{or } A(1, 0, 0); B(0, 1, 0) \text{ et } C(0, 0, 1) \text{ donc } G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

$$\text{b) } \overline{OG} \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix} \quad \overline{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overline{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overline{OG} \cdot \overline{AB} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0 \text{ et } \overline{OG} \cdot \overline{AC} = -\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$$

$$\text{donc } \overline{OG} \perp \overline{AB} \text{ et } \overline{OG} \perp \overline{AC} \Rightarrow (OG) \perp (ABC).$$

$$\text{c) } (OG) \perp (ABC) \text{ alors } \overline{OG} \text{ est un vecteur normal à } (ABC)$$

$$\text{d'où } (ABC): \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z + d = 0 \text{ or } A \in (ABC) \Rightarrow d = -\frac{1}{3}$$

$$\text{ainsi } (ABC): \frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y + \frac{1}{3}z - \frac{1}{3} = 0 \text{ où encore } (ABC): x + y + z - 1 = 0.$$

$$\begin{aligned} \text{2) a) } \overline{MA} \cdot \overline{OG} &= (\overline{MH} + \overline{HA}) \cdot \overline{OG} \text{ or } \overline{OG} \perp \overline{HA} \text{ car } (HA) \subset (ABC) \\ &= \overline{MH} \cdot \overline{OG} + \underbrace{\overline{HA} \cdot \overline{OG}}_0 = \overline{MH} \cdot \overline{OG} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } |\overline{MA} \cdot \overline{OG}| = |\overline{MH} \cdot \overline{OG}| \text{ or } (MH) \perp (ABC) \text{ et } (OG) \perp (ABC)$$

$$\text{donc } (MH) \parallel (OG) \text{ d'où } \overline{MH} \text{ et } \overline{OG} \text{ sont colinéaires.}$$

$$\text{donc } (\overline{MH}, \overline{OG}) \equiv 0 \text{ où } \pi(2\pi) \Rightarrow |\cos(\overline{MH}, \overline{OG})| = 1$$

par suite $|\overline{\text{MA}} \cdot \overline{\text{OG}}| = \|\overline{\text{MH}}\| \cdot \|\overline{\text{OG}}\| \cdot \underbrace{\left| \cos(\overline{\text{MH}}, \overline{\text{OG}}) \right|}_1 = \text{MH} \cdot \text{OG} = \text{MH} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}}.$

b) $\overline{\text{MA}} \cdot \begin{pmatrix} 1-x \\ -y \\ -z \end{pmatrix} \cdot \overline{\text{OG}} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ alors $\overline{\text{MA}} \cdot \overline{\text{OG}} = \frac{1}{3}(1-x-y-z)$

$$|\overline{\text{MA}} \cdot \overline{\text{OG}}| = \frac{1}{3}|1-x-y-z| \text{ d'autre part } |\overline{\text{MA}} \cdot \overline{\text{OG}}| = \frac{\text{MH}}{\sqrt{3}}$$

$$\text{d'où } \text{MH} = \sqrt{3} |\overline{\text{MA}} \cdot \overline{\text{OG}}| = \frac{\sqrt{3}}{3} |1-x-y-z|.$$

- 3) a) La norme de $\|\overline{\text{MA}} \wedge \overline{\text{MB}}\|$ représente l'aire du parallélogramme ayant les segments [MA] et [MB] pour côté consécutifs or le double de l'aire du triangle AMB.

K étant le projeté orthogonal de M sur (AB)

$\Rightarrow (\text{MK}) \perp (\text{AB}) \Rightarrow \text{MK}$ est la hauteur du triangle AMB dont l'aire

$$\text{est } \frac{\text{MK} \times \text{AB}}{2}, \text{ or } \text{AB} = \sqrt{2}.$$

$$\text{On peut donc écrire l'aire du triangle AMB est } \frac{\|\overline{\text{MA}} \wedge \overline{\text{MB}}\|}{2} = \frac{\text{MK} \cdot \sqrt{2}}{2}$$

$$\text{Soit } \text{MK} = \frac{\|\overline{\text{MA}} \wedge \overline{\text{MB}}\|}{\sqrt{2}}.$$

b) $\overline{\text{MA}} \begin{pmatrix} 1-x \\ -y \\ -z \end{pmatrix}$ et $\overline{\text{MB}} \begin{pmatrix} -x \\ 1-y \\ -z \end{pmatrix} \Rightarrow$ Les coordonnées de $\overline{\text{MA}} \wedge \overline{\text{MB}}$ sont:

$$X = \begin{vmatrix} -y & 1-y \\ -z & -z \end{vmatrix} = z \text{ et } Y = \begin{vmatrix} -z & -z \\ 1-x & -x \end{vmatrix} = z \text{ et } Z = \begin{vmatrix} 1-x & -x \\ -y & 1-y \end{vmatrix} = 1-x-y$$

$$\Rightarrow \overline{\text{MA}} \wedge \overline{\text{MB}} \begin{pmatrix} z \\ z \\ 1-x-y \end{pmatrix} \Rightarrow \|\overline{\text{MA}} \wedge \overline{\text{MB}}\| = \sqrt{z^2 + z^2 + (1-x-y)^2}$$

$$\text{ainsi } \text{MK} = \frac{\sqrt{2z^2 + (1-x-y)^2}}{\sqrt{2}}$$

- 4) a) On a $(\text{AB}) \subset (\text{ABC}) \Rightarrow$ la distance de tout point de (AB) au plan (ABC) est nul et $(\text{O} \notin (\text{AB}))$ la distance O à droite (AB) n'est pas nul)

$\Rightarrow \Gamma$ ne contient aucun point de (AB).

b) On a $MK = \frac{\sqrt{2z^2 + (1-x-y)^2}}{\sqrt{2}}$ or remplaçant z par 0

On obtient $MK = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(1-x-y)^2} = \frac{|x+y-1|}{\sqrt{2}}$

$M \notin (AB) \Rightarrow MK \neq 0 \Rightarrow \frac{MH}{MK} = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}}|1-x-y-z|}{\frac{1}{\sqrt{2}}|x+y-1|}$ or $z = 0$ d'où $\frac{MH}{MK} = \sqrt{\frac{2}{3}}$



1) On a $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{ED} = \overrightarrow{DF} + \overrightarrow{ED}$
 $= \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{DF} = \overrightarrow{EF} \Rightarrow BD = EF$

aire (ABD) = $\frac{1}{2} BD \times AH$ et aire(AEF) = $\frac{1}{2} EF \times AH$

H est le projeté orthogonal de A sur (BD) = (EF) et comme BD = EF
 alors aire (ABD) = aire (AEF).

2) Aire de (ABCD) = l'aire ABD + l'aire BCD on sait que

aire (ABD) = aire (AEF) on a aire (BCD) = $\frac{1}{2} BD \times CK$ et l'aire CEF = $\frac{1}{2} EF \times CK$

l'aire CEF = $\frac{1}{2} EF \times CK$ (K le projeté $\perp$ de C sur (BD) = (EF)) d'où

l'aire BCD = l'aire CEF. donc Aire ABCD = aire AEF + aire CEF = aire AFC.

3) On a $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{EF}$ alors $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{AC} \wedge (\overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AF})$

$= \underbrace{\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{EA}}_0 + \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AF}$. car A, C, E alignés. d'où $\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AF}$.

• aire ABCD = aire AFC = $\frac{1}{2} \|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{AF}\| = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AC} \wedge \overrightarrow{BD}\|$.

