

ENONCES



L'équation est – elle celle d'une sphère ?

- a) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4z - 1 = 0$
- b) $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 6y + 8z - 3 = 0$
- c) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 17 = 0$
- d) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 6z + 12 = 0$.



Former une équation de la sphère :

- a) De centre A (1, 2, -3) et passant par B (1, -1, 3).
- b) De diamètre [AB] avec A (1, 2, 5) et B (3, -1, 1)
- c) Passant par O, A (3, -1, 0), B (0, 2, -3) et C (1, 1, 1).



Soit S la sphère de centre A (1, -2, 0) de rayon $\sqrt{14}$.

Soit P_m l'ensemble des points de l'espace vérifiant l'équation :

$x - 2y + 2z + m = 0$ ou m est un paramètre réel.

- a) Montrer que P_m est un plan pour tout valeur de m.
- b) Calculer en fonction de m la distance de A à P_m .
- c) Discuter selon les valeurs de m la position de S et P_m .
- d) Pour $m = 4$, déterminer $S \cap P_m$



Soit S la sphère d'équation : $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z + 3 = 0$

- a) Déterminer l'intersection de S et l'axe des abscisses.
- b) Déterminer l'intersection de S et le plan xOy.



Soit la sphère S : $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 4z + 3 = 0$

Soit D la droite passant par A (3, -3, 1) et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que la droite est tangente à la sphère S.



Dans l'espace muni d'un repère ortho normal.

On considère les points : A (0, 4, -1) ; B (-2, 4, -5) ; C (1, 1, -5) et D(1, 0, -4).

- a) Déterminer une équation de chacun des plans médiateurs des segments [AB] [BC] et [AD]
- b) Démontrer que ces trois plan ont un point commun I.
- c) En déduire que I est le centre de la sphère S circonscrite au tétraèdre ABCD. Quel est son rayon ?
- d) Déterminer une équation de la sphère S.



(O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) R.O.N. A et M les points de coordonnées respectives

(1, -5, 7) et (1, 1, 1). P le plan d'équation $-2x + y + z - 4 = 0$.

- 1) Déterminer une équation cartésienne du plan Q tel que le projeté orthogonal de l'origine O sur Q soit le point A.

- 2) Montrer que les plans P et Q sont perpendiculaires.
- 3) Calculer la distance de M au plan P et du point M au plan Q.
- 4) En déduire la distance M à la droite $\Delta = P \cap Q$.
- 5) Déterminer une équation du plan R passant par A et perpendiculaires aux plans P et Q.

8 QCM. Justifier votre réponse

($O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) R.O.N on considère $A(3,1,3)$; $B(-6,2,1)$ les plans

$$P : x + 2y + 2z - 5 = 0 \text{ et } P' : -2x + z - 1 = 0$$

- 1) L'ensemble des points M tels que $\|\vec{MA} + \vec{MB}\| = 2$ est un

☐ a) plan ☐ b) sphère ☐ c) L'ensemble vide

- 2) Les coordonnées de point H projeté orthogonal de A sur le plan P sont :

☐ a) $\left(\frac{11}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$ ☐ b) $\left(\frac{8}{3}, \frac{1}{3}, \frac{7}{3}\right)$ ☐ c) $\left(\frac{7}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{5}{3}\right)$

- 3) La sphère de centre B et de rayon 1.

☐ a) coupe le plan P suivant un cercle.

☐ b) est tangente à P.

☐ c) ne coupe pas P.

- 4) Le plan P' est :

☐ a) parallèle à P ☐ b) orthogonal à P ☐ c) parallèle au plan ($O, \vec{i}, \vec{k}$)

9 Soit P_m le plan d'équation: $(m+1)x + (2m-1)y + (m-1)z + 2 + m = 0$ où $m \in \mathbb{R}$

- 1) Montrer que tous les plans P_m contiennent une droite fixe D, dont on donnera une représentation paramétrique.
- 2) Montrer que D est incluse dans le plan $Q: x + 2y + z + 1 = 0$.
- 3) Tout plan contenant D est il un plan P_m .
- 4) Soit le point $A(\cos t, 0, \sin t)$. Déterminer m pour que $A \in P_m$.

10 ($O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) un repère orthonormé.

Le plan $P : 2x - y + z + 1 = 0$ et le plan $P' : y + z - 8 = 0$

- a) Montrer que les plans P et P' sont perpendiculaires.

- b) Soit $A(-1, 5, 3)$. Montrer que A est un point de P'.

Déterminer la distance de A au plan P.

11 ($O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) un repère orthonormé. Soient les points $A(2, -3, 4)$;

$B(-3, 1, 2)$ et le vecteur $\vec{U} = -\vec{i} + 2\vec{j} + 3\vec{k}$.

- 1) Donner une représentation paramétrique de la droite D passant par A de

vecteur directeur $\vec{U}$.

- 2) Déterminer une équation cartésienne du plan P passant par B et perpendiculaire à D.
- 3) a) Soit H le projeté orthogonal de A sur P. Déterminer les coordonnées de H.
b) Calculer la distance de A au plan P.
- 4) a) Quel est le projeté orthogonal de B sur D ?
b) Calculer la distance de B à la droite D.

12

On considère les plans $P_m: 2x - 3my + 2z + m - 1 = 0$; $m \in \mathbb{R}$.

- 1) Montrer que tous les plans P_m contiennent une droite fixe Δ parallèle au plan $(O, \vec{i}, \vec{k})$.
- 2) Soit la droite D :
$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$$

a) D et Δ sont-elles coplanaires ?
b) Trouver une équation du plan contenant D et parallèle à Δ .
- 3) a) Existe-il un plan P_m parallèle à la droite $(0, \vec{j})$.
b) Soit le point A $\left(\cos^2 \alpha, \frac{1}{3}, -\frac{1}{2} \cos \alpha \right)$ avec $\alpha \in [0, \pi]$

Peut-on déterminer α pour que $A \in P_m$?

13

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère cartésien.

- 1) Montrer que l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de l'espace. Vérifiant : $(x + 2y - z + 2)^2 + (3x + y + 2z - 1)^2 = 0$ est une droite D dont on déterminera un vecteur directeur.
- 2) Démontrer que l'ensemble des points $M(x, y, z)$ Vérifiant $(x + 2y - z + 2)^2 - (3x + y + 2z - 1)^2 = 0$ est la réunion de 2 plans. P et Q dont on donnera les équations cartésiennes.
Prouver $D = P \cap Q$
- 3) A tout $m \in \mathbb{R}$, on associe le plan P_m d'équation cartésienne :
 $P_m: (1 + 3m)x + (2 + m)y + (2m - 1)z + 2 - m = 0$.
Montrer que tout plan P_m contiennent D.
Tout plan contenant D est-il un plan P_m ?

14

L'espace étant rapporté à un repère cartésien $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. On considère les droites D et D' de représentation paramétriques :

$$D : \begin{cases} x = -1 - 2\alpha \\ y = 2 - \alpha \\ z = -2 + 3\alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} \quad \text{et} \quad D' : \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 5 - \lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases} ; \lambda \in \mathbb{R}$$

- 1) Déterminer la position de D et D'.
- 2) Déterminer une équation cartésienne du plan P contenant A(0,-1,2) et parallèle à D et à D'.
- 3) le plan $P_m: (-m+1)x + 2(m+2)y - (m+1)z + 1 = 0$.
Montrer que tous les P_m contiennent une droite fixe Δ .
- 4) Déterminer $P_2 \cap P$.
- 5) a) Déterminer m pour que D soit parallèle à P_m .
b) Dans le cas où D n'est pas parallèle à P_m .
Déterminer les coordonnées du point I_m d'intersection de D et P_m .

15 ABCDEFGH est un cube de côté a.

- 1) a) Montrer que les faces du tétraèdre AFCH sont constituées des triangles équilatéraux.
- b) Montrer que le volume du tétraèdre AEFH est égale à $\frac{a^3}{6}$.
- c) Montrer que le volume du tétraèdre AFCH est $\frac{a^3}{3}$
- d) En déduire la distance du point A au plan (HFC)
- 2) On isole le tétraèdre AFCH soit J le milieu de [FC]
a) Montrer que les droites (FC) et (AH) sont orthogonales.
b) Calculer $\overline{JA} \cdot \overline{JH}$ en fonction de a.
c) En déduire une valeur approchée en degrés à 10^{-2} près de l'angle AJH.

16 Soit S la sphère de centre A(1,-2,0) de rayon $\sqrt{14}$.

Soit P_m l'ensemble des points de l'espace vérifiant l'équation :

$x - 2y + 2z + m = 0$ ou m est un paramètre réel.

- a) Montrer que P_m est un plan pour toute valeur de m.
- b) Calculer en fonction de m la distance de A à P_m .
- c) Discuter selon les valeurs de m la position de S et P_m .
- d) Pour $m = 4$, déterminer $S \cap P_m$.

17 Soit la sphère S : $x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 4z + 3 = 0$.

Soit D la droite passant par A(3, -3, 1) et de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Montrer que la droite est tangente à la sphère S.

18 Soit A et B deux points distincts de l'espace tel que : $AB = a$ et I désigne le milieu de $[AB]$.

Déterminer l'ensemble des points M de l'espace tels que :

a) $\overline{MA} \cdot \overline{MB} = k$ ($k \in \mathbb{R}$) b) $\frac{MA}{MB} = 2$.

19 Soient $A(0,4,-1)$; $B(-2,4,-5)$; $C(1,1,-5)$ et $D(1,0,-4)$.

- a) Déterminer une équation du plan médiateur de $[AB]$.
 b) Déterminer le centre et le rayon de la sphère S passant par les 4 points A, B, C et D.
 c) le plan $Q : x + y + z - 1 = 0$ est-il sécant à la sphère ?
 Quel est le rayon du cercle d'intersection de S et Q ?

20 Soient $A(6,0,0)$, $B(0,6,0)$ et $C(0,0,6)$.

- 1) Déterminer les coordonnées de G tel que $\overline{OG} + 2\overline{AG} + 3\overline{BG} = \vec{0}$.
 2) déterminer l'ensemble S des points M de l'espace définis par
 $(\overline{MO} + 2\overline{MA} + 3\overline{MB}) \cdot \overline{MC} = 0$.
 3) Soit P le plan d'équation $3x + 4y + \frac{17}{2} = 0$. Déterminer la distance du

centre I de S à P. Que peut-on en déduire pour S et P ?

21 Soit A et B deux points distincts tel que $AB = a$; ($a > 0$).

- 1) Déterminer l'ensemble des points M tels que $MA^2 + 2MB^2 = k$.
 (k un réel positif).
 2) Traiter analytiquement ce problème lorsque $A(1,-5,2)$ et $B(-2,1,2)$.

22 Soient les points $A(4,0,0)$ et $B(0,0,4)$ et $C(0,4,0)$.

- a) Montrer que ABC est un triangle équilatéral.
 b) Ecrire une équation de la sphère S de diamètre $[BC]$.
 c) Soit I est le milieu $[AC]$, vérifier que $I \in S$.
 d) Soit P le plan perpendiculaire à (BC) passant par I.
 Ecrire une équation cartésienne de P et déterminer $S \cap P$.

23 Soit la famille des sphères S_m , $m \in \mathbb{R}$

$S_m : x^2 + y^2 + z^2 + mx + 2(m-1)y + (m+4)z + 1 = 0$.

- a) Déterminer le centre ω_m et le rayon R_m .
 b) Quelle est l'ensemble des points ω_m quand m varie dans $\mathbb{R}$?
 c) Montrer qu'il existe un cercle $\zeta(\Omega, r)$ tel que pour tout $m \in \mathbb{R}$, $\zeta \subset S_m$.
 d) Démontrer que pour tout point M_0 n'appartenant pas au plan du cercle ζ il existe une sphère S_m et une seule passant par M_0 .
 e) Démontrer qu'il existe deux sphères S_m tangentes au plan $Q : z = 0$.

24 $A(1,1,3)$ et $B(3,5,1)$.

- 1) Soit Q le plan médiateur de $[AB]$. Donner une équation cartésienne de Q

2) A tout réel m , on associe le plan P_m d'équation :

$$P_m: (m+2)x - (m+1)y - mz + 3m - 1 = 0.$$

a) Déterminer l'ensemble E_1 des réels m tels que P_m et Q sont parallèles.

b) Déterminer l'ensemble E_2 des réels m tels que P_m et Q sont perpendiculaires.

3) Soient $S = \left\{ M(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 / x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - \frac{5}{2} = 0 \right\}$.

a) Montrer que S est une sphère dont-on précisera le centre I et le rayon.

b) Déterminer suivants les valeurs de m , les positions de plan P_m et de la sphère S .

c) Déterminer $P_1 \cap S$.

25 Soient P et Q les plans d'équations : $P : x + 2y - 2 = 0$
et $Q : 2x + z - 8 = 0$.

1) Montrer que P et Q sont sécants et donner la représentation paramétrique de $\Delta = P \cap Q$.

2) On considère S_m l'ensemble points de l'espace E tel que :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2y + 2(2m-3)z - 12m + 1 = 0.$$

a) Montrer que S_m est une sphère pour tout réel m . Préciser son centre I_m et son rayon.

b) Déterminer l'ensemble des points I_m lorsque m varie dans $\mathbb{R}$.

3) a) Montrer que S_0 et Q sont sécants et déterminer leurs intersection.

b) Déterminer $S_0 \cap \Delta$.

26 Soient $A(1, -2, 3)$; $B(-2, 1, -8)$ et $C(0, 0, -2)$.

1) Montrer que l'ensemble P des points M de l'espace vérifiant :
 $MA^2 - MC^2 = 10$ est un plan orthogonal à (AC) .

2) Soit le sphère d'équation $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y + 2z = 0$

Montrer $S \cap P$ est un cercle dont-on précisera le centre et le rayon.

3) Soit le point G défini par $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} - 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

a) Déterminer les coordonnées de G .

b) Donner une équation cartésienne du plan Q tangent à S en G .

4) Donner une représentation paramétrique de Δ , la droite d'intersection de P et Q puis préciser $S \cap \Delta$

27 Dans l'espace rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$,
on considère les points $A(1, 2, 2)$; $B(3, 2, 1)$ et $C(1, 3, 3)$.

1) Montrer que les points A, B et C déterminent un plan.

Donner une équation de ce plan.

2) On considère les plans P_1 et P_2 d'équations respectives

$$P_1 : x - 2y + 2z - 1 = 0 \quad \text{et} \quad P_2 : x - 3y + 2z + 2 = 0.$$

a) Montrer que les plans P_1 et P_2 sont sécants. On notera Δ leur droite

d'intersection.

b) Montrer que le point C appartient à la droite Δ .

c) Démontrer que le vecteur $\vec{u}(2, 0, -1)$ est un vecteur directeur de la droite Δ .

d) En déduire une représentation paramétrique de la droite Δ .

3) Pour déterminer la distance du point A à la droite Δ , on considère le point M de paramètre k de la droite Δ .

a) Déterminer la valeur de k pour que les vecteurs $\overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ soient orthogonaux.

b) En déduire la distance du point A à la droite Δ .



A, B et C sont trois points de l'espace non alignés et k est un réel de l'intervalle $[-1, 1]$.

On note G_k le barycentre des points pondérés (A, $k^2 + 1$), (B, k) et (C, -k).

1) Représenter les points A, B, C, le milieu I de [BC] et construire les points G_1 et G_{-1} .

2) a) Montrer que pour tout réel k de l'intervalle $[-1, 1]$,

$$\text{on a l'égalité } \overrightarrow{AG_k} = \frac{-k}{k^2 + 1} \overrightarrow{BC}.$$

b) Etablir le tableau de variation de la fonction f définie sur $[-1, 1]$

$$\text{par } f(x) = \frac{-x}{x^2 + 1}.$$

c) En déduire l'ensemble des points G_k quand k décrit l'intervalle $[-1, 1]$.

3) Déterminer l'ensemble ξ des points M de l'espace tels

$$\text{que } \|\overrightarrow{2MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{2MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|.$$

4) Déterminer l'ensemble $\mathcal{F}$ des points M de l'espace tels

$$\text{que } \|\overrightarrow{2MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|\overrightarrow{2MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|.$$

5) L'espace est maintenant rapporté à un repère orthonormal $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Les points A, B et C ont pour coordonnées respectives (0, 0, 2), (-1, 2, 1) et (-1, 2, 5).

Le point G_k et les ensembles ξ et $\mathcal{F}$ sont définis comme ci-dessus.

a) Calculer les coordonnées de G_1 et G_{-1} .

Montrer que les ensembles ξ et $\mathcal{F}$ sont sécants.

b) Calculer le rayon du cercle ξ intersection de ξ et $\mathcal{F}$.

CORRIGES

1

$$\text{a) } x^2 - 2x + y^2 + z^2 + 4z - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + y^2 + (z+2)^2 - 4 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 + (z+2)^2 = 6.$$

C'est l'équation de la sphère de centre I (1, 0, -2) de rayon $\sqrt{6}$.

$$\text{b) } 2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 6y + 8z - 3 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 3y + 4z - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 3y + z^2 + 4z - \frac{3}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 + (y + \frac{3}{2})^2 - \frac{9}{4} + (z+2)^2 - 4 - \frac{3}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 + (y + \frac{3}{2})^2 + (z+2)^2 = \frac{31}{4}.$$

C'est l'équation de la sphère de centre I' (0, - $\frac{3}{2}$, -2) de rayon $\frac{\sqrt{31}}{2}$.

$$\text{c) } x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 17 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 + 4y + z^2 - 6z + 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y+2)^2 - 4 + (z-3)^2 - 9 + 17 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = -3 \text{ impossible}$$

d) $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y + 6z + 12 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+3)^2 = -1$. C'est aussi le vide.

2

a) S est la sphère de centre A passant par B ou encore de centre A de rayon $AB = \sqrt{(1-1)^2 + (-1-2)^2 + (3+3)^2} = 3\sqrt{5}$.

$$M(x, y, z) \in S \Leftrightarrow AM = AB \Leftrightarrow AM^2 = AB^2$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 45 \text{ d'où } S: (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 45.$$

$$\text{b) } I = A * B \text{ donc } I \left(\frac{1+3}{2}, \frac{2-1}{2}, \frac{5+1}{2} \right) \text{ d'où } I \left(2, \frac{1}{2}, 3 \right)$$

$$\text{Le rayon est : } \frac{AB}{2} = \frac{\sqrt{2^2 + 3^2 + 4^2}}{2} = \frac{\sqrt{29}}{2}$$

$$M \in S(I, \frac{AB}{2}) \Leftrightarrow IM^2 = \frac{29}{4}, \text{ d'où } S: (x-2)^2 + (y-\frac{1}{2})^2 + (z-3)^2 = \frac{29}{4}$$

$$\text{c) } S: x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$$

$$O \in S \Leftrightarrow d = 0.$$

$$A(3, -1, 0) \in S \Leftrightarrow 10 + 3a - b = 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{3}b - \frac{10}{3}.$$

$$B(0, 2, -3) \in S \Leftrightarrow 13 + 2b - 3c = 0 \Leftrightarrow c = \frac{2}{3}b + \frac{13}{3}.$$

$C(1, 1, 1) \in S \Leftrightarrow 3 + a + b + c = 0$. On remplace a et c par leurs expressions :

$$3 + \left(\frac{1}{3}b - \frac{10}{3}\right) + b + \left(\frac{2}{3}b + \frac{13}{3}\right) = 0 \Leftrightarrow 2b = -4 \Leftrightarrow b = -2 \text{ d'où } a = -4 \text{ et } c = 3.$$

Donc l'équation de la sphère est : $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 2y + 3z = 0$.

3 a) $P_m: x - 2y + 2z + m = 0$

$(1, -2, 2) \neq (0, 0, 0)$ donc pour toute valeur de m , P_m est un plan.

b) $d(A, P_m) = \frac{|1 + 4 + m|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|5 + m|}{\sqrt{9}} = \frac{|5 + m|}{3}$

c) $d^2 - R^2 = \frac{(5 + m)^2}{9} - 14 = \frac{25 + m^2 + 10m}{9} - 14 = \frac{m^2 + 10m - 101}{9}$

$\Delta' = 5^2 + 101 = 126$ alors $\sqrt{\Delta'} = 3\sqrt{14}$.

$m' = -5 - 3\sqrt{14}$; $m'' = -5 + 3\sqrt{14}$

m	$-\infty$	m'	m''	$+\infty$
$d^2 - R^2$	$+$	ϕ	$-$	ϕ
	$+$	ϕ	$-$	$+$

Si $m \in]-\infty, -5 - 3\sqrt{14}[\cup]-5 + 3\sqrt{14}, +\infty[$ alors $d > R$

Donc P_m est extérieur à S .

Si $m \in]-5 - 3\sqrt{14}, -5 + 3\sqrt{14}[$ alors $d < R$ donc P_m et S sont sécants.

Si $m = -5 - 3\sqrt{14}$ ou $m = -5 + 3\sqrt{14}$ alors $d = R$ donc P_m est tangent à S .

d) Pour $m = 4$, $4 \in]-5 - 3\sqrt{14}, -5 + 3\sqrt{14}[$ donc P_m est sécants à S .

D'où $S \cap P_m$ est un cercle de centre Ω de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{5}$

$\Omega(x, y, z)$ est le projeté orthogonal de A sur P_4 et $\vec{n}_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur

normal de plan P_4 alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overrightarrow{A\Omega} = \alpha \vec{n}_4$

d'où $\begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = -2\alpha - 2 \\ z = 2\alpha \end{cases}$ or $\Omega \in P_4$ donc $(\alpha + 1) - 2(-2\alpha - 2) + 2(2\alpha) + 4 = 0$

$\Leftrightarrow \alpha = -1$ donc $x = \alpha + 1 = 0$; $y = -2\alpha - 2 = 0$ et $z = -2$ d'où $\Omega(0, 0, -2)$

$P_4 \cap S = \zeta$ cercle de centre $\Omega(0, 0, -2)$ de rayon $\sqrt{5}$.

4 a) L'axe des abscisses a pour vecteur directeur $\vec{i} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ et passe par

O(0,0,0) donc une représentation paramétrique est :
$$\begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = 0 \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R} .$$

$$M(x, y, z) \in S \cap (0, \vec{i}) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 6z + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = 0 \\ z = 0 \\ \alpha^2 - 2\alpha + 3 = 0 \end{cases}$$

$$\alpha^2 - 2\alpha + 3 = 0$$

$\Delta' = 1 - 3 = -2 < 0$ donc on n'a pas de solution d'où $S \cap (0, \vec{i}) = \emptyset$

b) $\vec{k}$ est un vecteur normal de (xoy) d'où (xoy) : $z = 0$

$$S : (x-1)^2 - 1 + (y-2)^2 - 4 + (z+3)^2 - 9 + 3 = 0,$$

$$D'où S : (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+3)^2 = 11.$$

Donc S de centre I(1, 2, -3) et de rayon $\sqrt{11}$ et d(I; (xoy)) = $\frac{|-3|}{\sqrt{1}} = 3 < \sqrt{11}$.

Donc $S \cap (xoy)$ est un cercle ζ de centre H le projeté orthogonal de I sur (xoy)

$$\text{et de rayon } r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{11 - 9} = \sqrt{2}.$$

$$* \vec{IH} = \alpha \vec{k} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 1 \\ y_H = 2 \\ z_H = -3 + \alpha \end{cases}$$

$$H \in (xoy) \Leftrightarrow z_H = 0 \Rightarrow \alpha - 3 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 3 \text{ d'où } H(1, 2, 0)$$

$$\boxed{5} \quad M(x, y, z) \in D \Leftrightarrow \vec{AM} = \alpha \vec{U} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$D'où D : \begin{cases} x = -2\alpha + 3 \\ y = \alpha - 3 \\ z = 2\alpha + 1 \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$N(x, y, z) \in D \cap S \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\alpha + 3 \\ y = \alpha - 3 \\ z = 2\alpha + 1 \end{cases} \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 4z + 3 = 0.$$

On remplace x, y et z par leurs valeurs dans l'équation de S, on obtient :

$$(-2\alpha + 3)^2 + (\alpha - 3)^2 + (2\alpha + 1)^2 - (-2\alpha + 3) + 2(\alpha - 3) - 4(2\alpha + 1) + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9\alpha^2 - 18\alpha + 9 = 0 \Leftrightarrow 9(\alpha^2 - 2\alpha + 1) = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

Donc D est tangente à S en un point H(1, -2, 3).

$$\boxed{6} \text{ a) } M \in \text{au plan médiateur de } [AB] \Leftrightarrow MA = MB \Leftrightarrow MA^2 = MB^2 \\ \Leftrightarrow (x-0)^2 + (y-4)^2 + (z+1)^2 = (x+2)^2 + (y-4)^2 + (z+5)^2$$

$$\Leftrightarrow x + 2z + 7 = 0$$

De même on trouve : le plan médiateur de [BC] a pour équation $x - y + 3 = 0$ et le plan médiateur de [AD] a pour équation $x - 4y - 3z = 0$

$$b) \begin{cases} x + 2z + 7 = 0 \\ x - 4y - 3z = 0 \\ x - y + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2z = -x - 7 \\ x - 4(x+3) - \frac{3}{2}(-x-7) = 0 \\ y = x + 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = -3 \\ x = -1 \\ y = 2 \end{cases}$$

donc $I(-1, 2, -3) \in$ au 3 plans médiateurs

c) I est équidistant des points A, B et I est équidistant des points B, C

I est équidistant des points A, D. Donc $IA = IB = IC = ID$

D'où I est le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

Le rayon de cette sphère est $IA = 3$

d) Une équation de la sphère est $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 + (z + 3)^2 = 9$



1) $\overrightarrow{OA}(1, -5, 7)$ est un vecteur normal à Q d'où Q : $x - 5y + 7z + d = 0$

$$A \in Q \Leftrightarrow 1 + 25 + 49 + d = 0 \Leftrightarrow d = -75$$

Donc Q : $x - 5y + 7z - 75 = 0$

$$2) \vec{n} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ normal de P et } \overrightarrow{OA} \begin{pmatrix} 1 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \text{ normal de Q}$$

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{OA} = -2 - 5 + 7 = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{OA} \text{ donc } P \perp Q.$$

$$3) d(M, P) = \frac{72}{\sqrt{75}} \text{ et } d(M, Q) = \frac{4}{\sqrt{6}}$$

4) Les plans P et Q sont perpendiculaires

La distance $h = d(M, \Delta)$ avec $\Delta = P \cap Q$.

$$\text{Vérifie } h^2 = \left(\frac{4}{\sqrt{6}}\right)^2 + \left(\frac{72}{\sqrt{75}}\right)^2 = \frac{2}{5} \sqrt{\frac{1346}{3}}$$

$$5) \text{ Soit } \vec{n}_R \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ normal de R.}$$

$$R \perp P \text{ et } R \perp Q \Rightarrow \vec{n}_R \perp \vec{n} \text{ et } \vec{n}_R \perp \overrightarrow{OA} \text{ d'où } \vec{n}_R = \vec{n} \wedge \overrightarrow{OA}$$

$$\vec{n} \wedge \overrightarrow{OA} = \begin{vmatrix} 1 & -5 \\ 1 & 7 \\ -2 & 1 \\ 1 & 7 \\ -2 & 1 \\ 1 & -5 \end{vmatrix} \text{ soit } \vec{n}_R \begin{pmatrix} 12 \\ 15 \\ 9 \end{pmatrix}$$

Donc R : $12x + 15y + 9z + d = 0$

$A \in R \Leftrightarrow 12 - 75 + 63 + d = 0 \Leftrightarrow d = 0$

R : $12x + 15y + 9z = 0$ soit R : $4x + 5y + 3z = 0$

8) 1) La réponse est [b] : $I = A \times B$ alors $\overline{MA} + \overline{MB} = 2\overline{MI}$
 $\|\overline{MA} + \overline{MB}\| = 2 \Leftrightarrow 2MI = 2 \Leftrightarrow MI = 1 \Leftrightarrow M \in S_{(I,1)}$

2) La réponse est [c] : $\overline{AH} = \alpha \overline{n_p}$ et $H \in P$

$$\begin{cases} x_H = \alpha + 3 \\ y_H = 2\alpha + 1 \text{ et } x_H + 2y_H + 2z_H - 5 = 0 \\ z_H = 2\alpha + 3 \end{cases}$$

$$\alpha + 3 + 4\alpha + 2 + 4\alpha + 6 - 5 = 0$$

$$9\alpha = -6 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{2}{3} \text{ d'où } H\left(\frac{7}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{5}{3}\right)$$

3) La réponse est [c] : $d(B, P) = \frac{|-6 + 4 + 2 - 5|}{\sqrt{9}} = \frac{5}{3}$ et $\frac{5}{3} > 1$

donc S ne coupe pas P.

4) La réponse est [b] : $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \vec{n}' \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{n} \cdot \vec{n}' = -2 + 2 = 0 \Leftrightarrow \vec{n} \perp \vec{n}' \Rightarrow P \perp P'$

9) 1) $(m+1)x + (2m-1)y + (m-1)z + 2 + m = 0$

$$\Leftrightarrow m(x + 2y + z + 1) + x - y - z + 2 = 0$$

L'équation est vraie pour tout $m \in \mathbb{R}$ donc elle est équivalente à :

$$\begin{cases} x + 2y + z + 1 = 0 \\ x - y - z + 2 = 0 \end{cases} \text{ on pose } y = \alpha \text{ le système devient } \begin{cases} x + z = -1 - 2\alpha \\ x - z = \alpha - 2 \end{cases}$$

on additionne membre à membre $2x = -3 - \alpha$ d'où $x = -\frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{2}$

et $z = -1 - 2\alpha + \left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{2}\right)$ donc $z = -\frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}$

Le système équivaut à $\begin{cases} x = -\frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{2} \\ y = \alpha \\ z = -\frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2} \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$

C'est une représentation paramétrique d'une droite D de vecteur directeur

$$\vec{u} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \\ -\frac{3}{2} \end{pmatrix} \text{ et passe par le point de coordonnées } \left(-\frac{3}{2}, 0, \frac{1}{2}\right).$$

Donc tous les plans P_m passent par la droite D.

$$2) \text{ Soit } M \in (x, y, z) \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{2} \\ y = \alpha \\ z = -\frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\left(-\frac{1}{2}\alpha - \frac{3}{2}\right) + 2\alpha + \left(-\frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}\right) + 1 = 2\alpha - 2\alpha - \frac{3}{2} + \frac{3}{2} = 0$$

donc $M \in Q$ par suite $D \subset Q$.

3) $D \subset Q$, Q est-il un plan P_m , c'est à dire existe-t-il m_0 tel que $Q = P_{m_0}$.

On a $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vérifie $1 + 2(-1) + 1 = 0$ alors $\vec{v}$ est un vecteur de Q donc de

$$P_{m_0} \Leftrightarrow (m_0 + 1) - (2m_0 - 1) + (m_0 - 1) = 0 \Leftrightarrow 1 = 0 \text{ impossible}$$

donc il n'existe pas un réel m_0 tel que $Q = P_{m_0}$.

On conclut que : Q contient D et n'est pas un plan P_m .

d'où tout plan contenant D n'est un plan P_m .

$$4) A \in P_m \Leftrightarrow (m+1)\cos t + (m-1)\sin t + 2 + m = 0 \\ \Leftrightarrow m(\cos t + \sin t + 1) + \cos t - \sin t + 2 = 0$$

$$\text{Si } \cos t + \sin t + 1 \neq 0 \text{ alors } m = \frac{-\cos t + \sin t - 2}{\cos t + \sin t + 1}.$$



$$a) \vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ vecteur normal de P, } \vec{N} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ vecteur normal de P'}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{N} = 2 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 0 \text{ donc } \vec{n} \perp \vec{N} \text{ d'où } P \perp P'.$$

$$b) 5 + 3 - 8 = 8 - 8 = 0 \text{ donc } A \in P'$$

$$d(A, P) = \frac{|2 \cdot (-1) - 5 + 3 + 1|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + 1^2}} = \frac{3}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{2}.$$



$$1) M(x, y, z) \in D \Leftrightarrow \text{il existe } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overrightarrow{AM} = \alpha \vec{U}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -\alpha + 2 \\ y = 2\alpha - 3 \\ z = 3\alpha + 4 \end{cases} \text{ d'où } D : \begin{cases} x = -\alpha + 2 \\ y = 2\alpha - 3 \\ z = 3\alpha + 4 \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

2) $P \perp D$ donc $\vec{U}$ est un vecteur normal de P .

$$\text{d'où } P : -x + 2y + 3z + d = 0$$

$$B \in P \Leftrightarrow -(-3) + 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + d = 0 \Leftrightarrow d = -11$$

$$\text{Par suite } P : -x + 2y + 3z - 11 = 0.$$

3) a) H est le projeté orthogonal de A sur P alors $(AH) \perp P$ d'où $\overline{AH}$ et $\vec{U}$ sont

$$\text{colinéaires donc il existe } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } \overline{AH} = \alpha \cdot \vec{U} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = -\alpha + 2 \\ y_H = 2\alpha - 3 \\ z_H = 3\alpha + 4 \end{cases}$$

$$H \in P \Leftrightarrow -x_H + 2y_H + 3z_H - 11 = 0.$$

En remplaçant x_H , y_H et z_H par leur valeur on obtient :

$$\alpha - 2 + 4\alpha - 6 + 9\alpha + 1 = 0 \Leftrightarrow 14\alpha = 7 \Leftrightarrow \alpha = \frac{7}{14} = \frac{1}{2} \text{ par suite } H\left(\frac{3}{2}; -2; \frac{11}{2}\right)$$

$$b) d(A, P) = \frac{|-2 - 6 + 12 - 11|}{\sqrt{1 + 2^2 + 3^2}} = \frac{7}{\sqrt{14}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

4) a) D une droite perpendiculaire à P en H alors tout point du plan P se projette orthogonalement sur D en H donc le projeté de B sur D est H .

$$b) d(B, D) = BH = \sqrt{\left(\frac{3}{2} + 3\right)^2 + (-2 - 1)^2 + \left(\frac{11}{2} - 2\right)^2} = \frac{\sqrt{166}}{2}.$$



$$1) 2x - 3my + 2z + m - 1 = 0$$

$\Leftrightarrow m(-3y + 1) + 2x + 2z - 1 = 0$ vraies pour tout réel m , donc l'équation est

$$\text{équivalente à } \begin{cases} -3y + 1 = 0 \\ 2x + 2z - 1 = 0 \end{cases} \quad (1).$$

$$\text{On pose } x = \alpha \text{ alors } (1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = \frac{1}{3} \\ z = -\alpha + \frac{1}{2} \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

c'est la représentation paramétrique d'une droite Δ passant par le point

$$I\left(0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right) \text{ de vecteur directeur } \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Le plan $(O, \vec{i}, \vec{k}) : y = 0$ donc $\vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ vecteur normal de $(O, \vec{i}, \vec{k})$

$$\vec{n} \cdot \vec{u} = 0 \text{ donc } (O, \vec{i}, \vec{k}) // \Delta$$

2) a) $D : \begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ y - z + 1 = 0 \end{cases}$

on pose $y = \beta$ d'où $\begin{cases} x = 2\beta - 1 \\ y = \beta \\ z = \beta + 1 \end{cases} ; \beta \in \mathbb{R}$, c'est une représentation paramétrique

de D , de vecteur directeur $\vec{V} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ passant par $K(-1, 0, 1)$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ donc } \vec{U} \text{ et } \vec{V} \text{ sont non colinéaires.}$$

$$M \in D \cap \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2\beta - 1 = \alpha & (1) \\ y = \beta = \frac{1}{3} & (2) \\ z = \beta + 1 = -\alpha + \frac{1}{2} & (3) \end{cases}$$

$$(2) \Rightarrow \beta = \frac{1}{3} \text{ donc } (1) \Rightarrow \alpha = -\frac{1}{3}$$

Vérifions dans (3) : $\frac{1}{3} + 1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}$ impossible d'où $D \cap \Delta = \emptyset$

$D \cap \Delta = \emptyset$ et $(\vec{U} \text{ et } \vec{V} \text{ non colinéaires})$ donc D et Δ sont non coplanaires.

b) Soit Q le plan contenant D et parallèle à Δ alors $K \in Q$ et $\vec{V}$ et $\vec{U}$ sont des vecteurs directeurs de Q .

$$\vec{N} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \text{ vecteur normal de } Q \text{ donc } \vec{N} \cdot \vec{V} = 0 \text{ et } \vec{N} \cdot \vec{U} = 0$$

$$\Leftrightarrow a - c = 0 \text{ et } 2a + b + c = 0 \Leftrightarrow a = c \text{ et } b = -3c$$

$$K \in Q \Leftrightarrow -a + c + d = 0 \Leftrightarrow d = 0 \text{ d'où } Q : cx - 3cy + cz = 0$$

$$\text{par suite } Q : x - 3y + z = 0$$

$$3) \text{ a) Soit } \vec{N} \begin{pmatrix} 2 \\ -3m \\ 2 \end{pmatrix} \text{ vecteur normal de } P_m ; P_m // (O, \vec{j}) \Leftrightarrow \vec{N} \perp \vec{j}$$

$$\Leftrightarrow -3m = 0 \Leftrightarrow m = 0 \text{ donc le plan } P_0 // (O, \vec{j})$$

$$b) A \in P_m \Leftrightarrow 2\cos^2 \alpha - m - \cos \alpha + m - 1 = 0 \Leftrightarrow 2\cos^2 \alpha - \cos \alpha - 1 = 0$$

$$2 - 1 - 1 = 0 \text{ donc } \cos \alpha = 1 \text{ ou } \cos \alpha = -\frac{1}{2} ; \text{ or } \alpha \in [0, \pi]$$

$$\text{d'où } \alpha = 0 \text{ ou } \alpha = \frac{2\pi}{3}.$$



$$1) (x + 2y - z + 2)^2 + (3x + y + 2z - 1)^2 = 0 \quad (1)$$

$$\Leftrightarrow x + 2y - z + 2 = 0 \text{ et } 3x + y + 2z - 1 = 0$$

$$\text{On pose } z = \alpha \text{ on obtient : } x + 2y = \alpha - 2 \text{ et } 3x + y = -2\alpha + 1$$

$$\text{ou encore } x + 2y = \alpha - 2 \text{ et } -6x - 2y = 4\alpha - 2 \text{ on additionne membre à membre on}$$

$$\text{obtient : } -5x = 5\alpha - 4 \text{ d'où } x = -\alpha + \frac{4}{5}$$

$$3x + y = -2\alpha + 1 \Leftrightarrow y = -3x - 2\alpha + 1 \text{ d'où } y = 3\alpha - \frac{12}{5} - 2\alpha + 1 = \alpha - \frac{7}{5}.$$

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\alpha + \frac{4}{5} \\ y = \alpha - \frac{7}{5} \\ z = \alpha \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}$$

C'est une représentation paramétrique d'une droite D passant par le point

$$I\left(\frac{4}{5}, -\frac{7}{5}, 0\right) \text{ et de vecteur directeur } \vec{W} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$2) (x + 2y - z + 2)^2 - (3x + y + 2z - 1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + 2y - z + 2 + 3x + y + 2z - 1)(x + 2y - z + 2 - 3x - y - 2z + 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (4x + 3y + z + 1)(-2x + y - 3z + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow 4x + 3y + z + 1 = 0 \quad \text{ou} \quad -2x + y - 3z + 3 = 0$$

$4x + 3y + z + 1 = 0$ c'est une équation cartésienne d'un plan de même $-2x + y - 3z + 3 = 0$

d'où l'ensemble recherché est la réunion de deux plans P et Q,

P : $4x + 3y + z + 1 = 0$ et Q : $-2x + y - 3z + 3 = 0$

$$M \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2y - z + 2 = 0 & (1) \\ 3x + y + 2z - 1 = 0 & (2) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1) + (2) \\ (2) - (1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 3y + z + 1 = 0 \\ 2x - y + 3z - 3 = 0 \end{cases}$$

$$\text{ou encore } \begin{cases} 4x + 3y + z + 1 = 0 \\ -2x + y - 3z + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow M \in P \cap Q \text{ donc } P \cap Q = D.$$

$$3) \text{ 1}^{\text{ère}} \text{ méthode : } M \in D \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\alpha + \frac{4}{3} \\ y = \alpha - \frac{7}{5} \\ z = \alpha \end{cases}$$

$$\left(-\alpha + \frac{4}{3}\right)(1 + 3m) + \left(\alpha - \frac{7}{5}\right)(2 + m) + \alpha(2m - 1) + 2 - m = 0. \alpha + 0 = 0$$

donc $M \in P_m$ pour toute valeur de m d'où $D \subset P_m$.

2^{ème} méthode :

$$(1 + 3m)x + (2 + m)y + (2m - 1)z + 2 - m = 0$$

$m(3x + y + 2z - 1) + x + 2y - z + 2 = 0$, l'équation est vraie pour toute valeur de m dans $\mathbb{R}$, donc l'équation est équivalente à :

$$\begin{cases} 3x + y + 2z - 1 = 0 \\ x + 2y - z + 2 = 0 \end{cases} \text{ se sont les équations de P et Q donc c'est une représentation}$$

cartésienne de D d'où $D \subset P_m$.

$$\text{Soit R le plan passant par I de vecteur directeur } \vec{W} \text{ et } \vec{V} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \begin{pmatrix} 1 + 3m \\ 2 + m \\ 2m - 1 \end{pmatrix} \text{ vecteur normal de } P_m.$$

$\vec{V} \cdot \vec{n} = 2(1 + 3m) - 3(2m - 1) = 5 \neq 0$ donc $\vec{V}$ n'est pas un vecteur de P_m par suite R est un plan contenant D et $R \not\subset P_m$.

donc tout plan contenant D ne peut pas être en général un plan de P_m .



1) D passe par A(-1, 2, -2) de vecteur directeur $\vec{U} \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

D' passe par B(1, 5, 1) de vecteur directeur $\vec{V} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$* \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \text{ donc } \vec{U} \text{ et } \vec{V} \text{ non colinéaires}$$

D'où D et D' sont non coplanaires ou sécantes

$$* M \in D \subset D' \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - 2\alpha = 1 + \lambda & (1) \\ y = 2 - \alpha = 5 - \lambda & (2) \\ z = -2 + 3\alpha = 1 - 3\lambda & (3) \end{cases}$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 1 - 3\alpha = 6 \Leftrightarrow \alpha = \frac{-5}{3}$$

$$(1) \Rightarrow \lambda = -2 - 2\alpha = -2 + \frac{10}{3} = \frac{4}{3}$$

Vérifions dans (3) : $-2 - 5 = 1 - 4$ impossible donc $D \cap D' = \emptyset$.

Conclusion : $D \cap D' = \emptyset$ et $\vec{U}$ et $\vec{V}$ non colinéaires alors D et D' sont non coplanaires.

2) Soit $\vec{N}$ vecteur normal de P, $\vec{N} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

$$D // P \Leftrightarrow \vec{N} \cdot \vec{U} = 0 \Leftrightarrow -2a - b + 3c = 0 \quad (4)$$

$$D' // P \Leftrightarrow \vec{N} \cdot \vec{V} = 0 \Leftrightarrow a - b - 3c = 0 \quad (5)$$

$$(4) + (5) \Rightarrow -a - 2b = 0 \Leftrightarrow a = -2b$$

$$(5) \Rightarrow 3c = a - b = -3b \Leftrightarrow c = -b$$

$$A \in P \Leftrightarrow -b + 2c + d = 0 \Leftrightarrow d = b - 2c \text{ d'où } d = 3b$$

$$P : -2bx + by - bz + 3b = 0 \text{ d'où } P : -2x + y - z + 3 = 0$$

$$3) (-m+1)x + 2(m+2)y - (m+1)z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow m(-x + 2y - z) + x + 4y - z + 1 = 0$$

L'équation est vraie pour tout $m \in \mathbb{R}$ donc elle est équivalente

$$\text{à : } \begin{cases} -x + 2y - z = 0 \\ x + 4y - z + 1 = 0 \end{cases} \quad (I)$$

On additionne membre à membre $6y - 2z + 1 = 0$ ou encore $z = 3y + \frac{1}{2}$

on pose $y = \beta$ donc $z = 3\beta + \frac{1}{2}$

$$x = 2y - z = 2y - 3y - \frac{1}{2} = -y - \frac{1}{2} = -\beta - \frac{1}{2}$$

$$(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\beta - \frac{1}{2} \\ y = \beta \\ z = 3\beta + \frac{1}{2} \end{cases} ; \beta \in \mathbb{R}$$

C'est une représentation paramétrique d'une droite Δ passant par le point de coordonnées $(-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2})$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{W} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

$$4) M \in P_2 \cap P \Leftrightarrow \begin{cases} -2x + y - z + 3 = 0 \\ -x + 8y - 3z + 1 = 0 \end{cases} \quad (II) \text{ ou encore } \begin{cases} -6x + 3y - 3z + 9 = 0 \\ -x + 8y - 3z + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\text{on pose } y = \delta : (II) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\delta + \frac{8}{5} \\ y = \delta \\ z = 3\delta - \frac{1}{5} \end{cases} ; \delta \in \mathbb{R}$$

c'est une représentation paramétrique d'une droite Δ' passant par le point

$$H(\frac{8}{5}, 0, -\frac{1}{5}) \text{ de vecteur directeur } \overrightarrow{W} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

$$5) a) D // P_m \Leftrightarrow \vec{u} \perp \vec{n} \text{ avec } \vec{n} \begin{pmatrix} -m+1 \\ 2m+4 \\ -m-1 \end{pmatrix} \text{ vecteur normal de } P_m.$$

$$\Leftrightarrow (-2) \cdot (-m+1) + (-1)(2m+4) + 3(-m-1) = 0 \Leftrightarrow m = -3.$$

$$b) D \text{ et } P_m \text{ sont sécants } \Leftrightarrow m \neq -3$$

$$I_m \in D \cap P_m \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 - 2\alpha \\ y = 2 - \alpha \\ z = -2 + 3\alpha \\ (-m+1)x + 2(m+2)y - (m+1)z + 1 = 0 \end{cases}$$

On remplace x , y et z par leur valeur dans la 4^{ème} équation on obtient :

$$(-m+1)(-1-2\alpha) + (2m+4)(2-\alpha) - (m+1)(-2+3\alpha) + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha(-3m-9) = -7m-10 \text{ or } m \neq -3 \text{ d'où } \alpha = \frac{-7m-10}{-3m-9} = \frac{7m+10}{3m+9}$$

$$\text{donc } I_m \left(-\frac{17m+29}{3m+9}; \frac{-m+8}{3m+9}; \frac{15m+12}{3m+9} \right).$$



1) a) ABCDEFGH est un cube

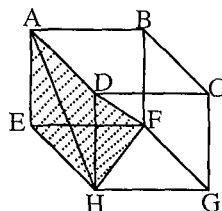
alors les diagonales des faces

ont une même longueur $\sqrt{2}a$ donc AH

$$= \sqrt{2}a = AF = AC = CF = CH = HF$$

d'où le tétraèdre ACFH est régulier

ainsi les faces de ACFH sont des triangles équilatéraux.



b) Le volume de AEFH est égale à $\frac{1}{3}$ l'aire de la base $\times$ Hauteur

$$= \frac{AE \times \text{aire}(EFH)}{3} = \frac{a \times EF \times EH}{6} = \frac{a^3}{6} \text{ (EFH rectangle en E)}$$

c) Le volume de AFCH est égale au volume du cube $-4 \times$ Volume AEFH

$$= a^3 - 4 \times \frac{1}{6} a^3 = \frac{1}{3} a^3.$$

d) Le volume de AFCH est égale d'une part à $\frac{1}{3} a^3$

d'autre part $\frac{1}{3}$ (aire de la base $\times$ hauteur).

$$\frac{1}{3} a^3 = \frac{1}{3} AH' \times \text{aire de FCH avec } H' = \text{projeté } \perp \text{ de A sur (FCH)}$$

FCH est un triangle équilatéral de coté $\sqrt{2}a$ donc son aire

$$\text{est } \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2}a(\sqrt{2}a) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}a^2}{2} \text{ d'où } AH' = \frac{2a^2}{\sqrt{3}} \text{ ainsi } d(A, (HCF)) = AH' = \frac{2a^2}{\sqrt{3}}$$

2) a) On a $J = F * C$ et HFC, AFC deux triangles équilatéraux

donc (HJ) et (AJ) sont des hauteurs pour HFC et AFC

ainsi (HJ) $\perp$ (FC) et (AJ) $\perp$ (FC) d'où (FC) $\perp$ (AHJ) or (AH) $\subset$ (AHJ)

donc (FC) est orthogonale à (AH)

b) $\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JH} = JA \times JK$ avec K le projeté orthogonal de H sur (AFC)

(HK) $\perp$ (AFC) donc (HK) est orthogonale à la droite (FC) $\subset$ (AFC)

* (FC) est orthogonale à (HK) et à (AH) alors (FC) $\perp$ (AHK)

* (FC) $\perp$ (HJ) et (FC) $\perp$ (AJ) $\Rightarrow$ (FC) $\perp$ (AHJ)

par suite (AHK) = (AHJ) qui est le plan médiateur de [FC]

ainsi K est le centre de gravité de AFC

$$\text{finalement } \overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JH} = JA \times JK = JA \times \frac{1}{3} JA = \frac{1}{3} JA^2 = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \sqrt{2}a\right)^2 = \frac{a^2}{2}$$

$$\text{c) } \cos \hat{A} J H = \frac{\overrightarrow{JA} \cdot \overrightarrow{JH}}{JA \cdot JH} = \frac{\frac{a^2}{2}}{\left(\frac{\sqrt{6}}{2}a\right)^2} = \frac{1}{3} \text{ donc } \hat{A} J H = 70^\circ, 56$$

16

a) $P_m: x - 2y + 2z + m = 0$.

(1, -2, 2) $\neq$ (0, 0, 0) donc pour toute valeur de m, P_m est un plan.

$$\text{b) } d(A, P_m) = \frac{|1 - 4 + m|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{|5 + m|}{\sqrt{9}} = \frac{|5 + m|}{3}$$

$$\text{c) } d^2 - R^2 = \frac{(5+m)^2}{9} - 14 = \frac{25 + m^2 + 10m}{9} - 14 = \frac{m^2 + 10m - 101}{9}$$

$$\Delta' = 5^2 + 101 = 126 \text{ alors } \sqrt{\Delta'} = 3\sqrt{14}$$

$$m' = -5 - 3\sqrt{14} \text{ ou } m'' = -5 + 3\sqrt{14}$$

m	$-\infty$	m'	m''	$+\infty$
$d^2 - R^2$	+	ϕ	-	ϕ

Si $m \in]-\infty, -5 - 3\sqrt{14}[\cup]-5 + 3\sqrt{14}, +\infty[$ alors $d > R$ donc P_m est extérieur à S.

Si $m \in]-5 - 3\sqrt{14}, -5 + 3\sqrt{14}[$ alors $d < R$ donc P_m et S sont sécants.

Si $m = -5 - 3\sqrt{14}$ ou $m = -5 + 3\sqrt{14}$ alors $d = R$ donc P_m est tangente à S.

d) Pour $m = 4, 4 \in]-5 - 3\sqrt{14}, -5 + 3\sqrt{14}[$ donc P_m est sécant à S.

d'où $S \cap P_m$ est un cercle de centre Ω de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{5}$

$\Omega(x, y, z)$ est le projeté orthogonal de A sur P_4 et $\vec{n}_4 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur

normal de plan P_4 alors il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\overline{A\Omega} = \alpha \vec{n}_4$

$$\text{d'où } \begin{cases} x = \alpha + 1 \\ y = -2\alpha - 2 \text{ or } \Omega \in P_4 \text{ donc } (\alpha + 1) - 2(-2\alpha - 2) + 2(2\alpha) + 4 = 0 \\ z = 2\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \alpha = -1 \text{ donc } x = \alpha + 1 = 0; y = -2\alpha - 2 = 0 \text{ et } z = -2 \text{ d'où } \Omega(0, 0, -2)$$

$P_4 \cap S = \zeta$ cercle de centre $\Omega(0, 0, -2)$ de rayon $\sqrt{5}$

17 $M(x, y, z) \in D \Leftrightarrow \overline{AM} = \alpha \vec{U}; \alpha \in \mathbb{R}$

$$\text{D'où } D : \begin{cases} x = -2\alpha + 3 \\ y = \alpha - 3 \\ z = 2\alpha + 1 \end{cases}; \alpha \in \mathbb{R}$$

$$N(x, y, z) \in D \cap S \Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\alpha + 3 \\ y = \alpha - 3 \\ z = 2\alpha + 1 \end{cases} \text{ et } x^2 + y^2 + z^2 - x + 2y - 4z + 3 = 0$$

On remplace x, y et z par leurs valeurs dans l'équation de S , on obtient :

$$(-2\alpha + 3)^2 + (\alpha - 3)^2 + (2\alpha + 1)^2 - (-2\alpha + 3) + 2(\alpha - 3) - 4(2\alpha + 1) + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9\alpha^2 - 18\alpha + 9 = 0 \Leftrightarrow 9(\alpha^2 - 2\alpha + 1) = 0 \Leftrightarrow (\alpha - 1)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = 1.$$

Donc D est tangente à S en un point $H(1, -2, 3)$.

18 a) $\overline{MA} \cdot \overline{BM} = k \Leftrightarrow (\overline{MI} + \overline{IA}) \cdot (\overline{MI} + \overline{IB}) = k$

$$\Leftrightarrow MI^2 + \overline{IA} \cdot \overline{IB} + \overline{MI} \cdot (\overline{IA} + \overline{IB}) = k \text{ or } \overline{IA} = -\overline{IB}$$

$$\Leftrightarrow MI^2 = k - \overline{IA} \cdot \overline{IB} \Leftrightarrow MI^2 = k + IA^2 = k + \frac{a^2}{4}$$

Si $k + \frac{a^2}{4} < 0$ ou encore $k < -\frac{a^2}{4}$ alors l'ensemble recherché est le vide.

Si $k + \frac{a^2}{4} = 0$ ou encore $k = -\frac{a^2}{4}$ alors $MI^2 = 0 \Leftrightarrow M = I$

donc l'ensemble recherché est $\{I\}$.

Si $k + \frac{a^2}{4} > 0$ ou encore $k > -\frac{a^2}{4}$ alors l'ensemble recherché est la sphère de

centre I et de rayon $\sqrt{k + \frac{a^2}{4}}$.

$$b) \frac{MA}{MB} = 2 \Leftrightarrow MA^2 = 4MB^2 \Leftrightarrow (\overline{MA} + 2\overline{MB}) \cdot (\overline{MA} - 2\overline{MB}) = 0$$

Soit G le barycentre de (A, 1) et (B, 2) $\Leftrightarrow \overline{GA} + 2\overline{GB} = \vec{0}$

Soit G' le barycentre de (A, 1) et (B, -2) $\Leftrightarrow \overline{G'A} - 2\overline{G'B} = \vec{0}$

d'où $\overline{MA} + 2\overline{MB} = 3\overline{MG}$ et $\overline{MA} - 2\overline{MB} = -\overline{MG'}$

$$\text{par suite } \frac{MA}{MB} = 2 \Leftrightarrow (3\overline{MG}) \cdot (-\overline{MG'}) = 0 \Leftrightarrow \overline{MG} \cdot \overline{MG'} = 0$$

$\Leftrightarrow \overline{MG} \perp \overline{MG'}$ d'où l'ensemble recherché est la sphère de diamètre $[GG']$



a) P le plan médiateur de [AB] passe par I le milieu de [AB] et de vecteur

$$\text{normal } \overline{AB} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ et } I(-1, 4, -3) \text{ d'où } P : -2x - 4z + d = 0$$

$$I \in P \Leftrightarrow 2 + 12 + d = 0 \Leftrightarrow d = -14 \text{ donc } P : -2x - 4z - 14 = 0$$

ou encore $P : x + 2z + 7 = 0$.

b) Soit H le centre de la sphère S comme A, B, C et D appartiennent à S

Alors $HA = HB = HC = HD = \text{rayon}$ donc $H \in P$ et $H \in P'$ et $H \in P''$

avec P' le plan médiateur de [BC] et P'' le plan médiateur de [CD]

$$B * C = I'(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, -5) \text{ et } C * D = I''(1, \frac{1}{2}, \frac{9}{2})$$

$$\overline{BC} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overline{CD} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\overline{BC}$ normal de P' d'où $P' : 3x - 3y + d = 0$

$$I' \in P' \Leftrightarrow -\frac{3}{2} - \frac{15}{2} + d = 0 \Leftrightarrow d = 9$$

$$P' : x - y + 3 = 0 \text{ de même } P'' : -y + z + 5 = 0$$

$$H \in P \cap P' \cap P'' \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2z + 7 = 0 & (1) \\ x - y + 3 = 0 & (2) \\ -y + z + 5 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow x = y - 3 \text{ et } (3) \Leftrightarrow z = y - 5$$

$$\text{On remplace dans (1)} \Rightarrow (y - 3) + 2y - 10 + 7 = 0 \Leftrightarrow y = 2$$

D'où $x = -1$ et $z = -3$ donc $H(-1, 2, -3)$, le rayon est $R = HA = 3$.

$$c) Q : x + y + z - 1 = 0$$

$$d = d(H, Q) = \frac{|-1 + 2 - 3 - 1|}{\sqrt{3}} = \sqrt{3} < R \text{ donc } Q \text{ est sécant à } S.$$

$$\text{le rayon du cercle est } \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{9 - 3} = \sqrt{6}.$$



$$1) \overrightarrow{OG} + 2\overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{BG} = \vec{0}$$

$$\text{On pose } G(x, y, z) \text{ alors } \overrightarrow{OG} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}; \overrightarrow{AG} \begin{pmatrix} x-6 \\ y \\ z \end{pmatrix}; \overrightarrow{BG} \begin{pmatrix} x \\ y-6 \\ z \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{OG} + 2\overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{BG} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 2(x - 6) + 3x = 0 \\ y + 2y + 3(y - 6) = 0 \\ z + 2z + 3z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 3 \\ z = 0 \end{cases} \text{ d'où } G(2, 3, 0)$$

$$2) (\overrightarrow{MO} + 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}) \cdot \overrightarrow{MC} = 0$$

$$\overrightarrow{MC} \cdot (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GO} + 2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{GB}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MC} \cdot 6\overrightarrow{MG} = 0 \text{ car } \overrightarrow{GO} + 2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MG} = 0 \text{ donc } S \text{ est la sphère de diamètre } [CG]$$

$$\overrightarrow{MC} \cdot \overrightarrow{MG} = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 3y - 6z = 0 \Leftrightarrow (x - 1)^2 + (y - \frac{3}{2})^2 + (z - 3)^2 = \frac{49}{4}$$

$$\text{donc } S \text{ est de centre } I(1, \frac{3}{2}, 3) \text{ de rayon } \frac{7}{2}.$$

$$3) d(I, P) = \frac{\left| 3 + 6 + \frac{17}{2} \right|}{\sqrt{3^2 + 4^2}} = \frac{7}{2} = \text{rayon de } S \text{ donc } P \text{ est tangent à } S.$$



$$1) \text{ Soit } G \text{ le barycentre des points pondérés : } (A, 1) \text{ et } (B, 2)$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{BG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$$

$$MA^2 + 2MB^2 = k \Leftrightarrow (\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA})^2 + 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})^2 = k$$

$$\Leftrightarrow 3MG^2 + GA^2 + 2GB^2 + 2\overrightarrow{MG} \cdot (\underbrace{\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB}}_{\vec{0}}) = k$$

$$\Leftrightarrow 3MG^2 + \frac{4}{9}AB^2 + 2 \cdot \frac{1}{9}BA^2 = k$$

$$\Leftrightarrow 3MG^2 = k - \frac{2}{3}AB^2 \Leftrightarrow MG^2 = \frac{3k - 2a^2}{9}$$

On a $k > 0$

• Si $3k - 2a^2 < 0$ ou encore $0 < k < \frac{2a^2}{3}$ alors l'ensemble recherché est le vide.

• Si $3k - 2a^2 = 0$ ou encore $k = \frac{2a^2}{3}$ alors l'ensemble recherché est $\{G\}$

• Si $3k - 2a^2 > 0$ ou encore $k > \frac{2a^2}{3}$

alors l'ensemble recherché est la sphère de centre G, de rayon $\frac{\sqrt{3k - 2a^2}}{3}$

2) $M(x, y, z)$; $A(1, -5, 2)$; $B(-2, 1, 2)$

$$MA^2 = (x - 1)^2 + (y + 5)^2 + (z - 2)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 10y - 4z + 30.$$

$$MB^2 = (x + 2)^2 + (y - 1)^2 + (z - 2)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 2y - 4z + 9.$$

$$MA^2 + 2MB^2 = k \Leftrightarrow 3x^2 + 3y^2 + 3z^2 + 6x + 6y - 12z + 48 = k$$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 2y - 4z + 16 - \frac{k}{3} = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 2)^2 = \frac{k}{3} - 10$$

• Si $\frac{k}{3} - 10 > 0$ ou encore $k > 30$ alors l'ensemble est la sphère de centre

$W(-1, -1, 2)$ de rayon $\sqrt{\frac{k}{3} - 10}$.

• Si $\frac{k}{3} - 10 = 0$ ou encore $k = 30$

Alors l'ensemble est réduit au singleton $\{W(-1, -1, 2)\}$.

• Si $0 < k < 30$ alors l'ensemble recherché est le vide.



a) $AB = \sqrt{4^2 + 4^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2} = BC = AC$

donc ABC est un triangle équilatéral.

b) $M(x, y, z) \in S \Leftrightarrow \overline{BM} \perp \overline{CM} \Leftrightarrow x^2 + y(y - 4) + (z - 4)z = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 4z = 0 \text{ d'où } S: x^2 + y^2 + z^2 - 4y - 4z = 0$$

c) $I(2, 2, 0)$; $4 + 4 + 0 - 8 - 0 = 0$ donc $I \in S$

$$d) \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ vecteur normal de } P \text{ d'où } P : 4y - 4z + d = 0$$

$$I \in P \Leftrightarrow 8 - 0 + d = 0 \Leftrightarrow d = -8 \text{ d'où } P : y - z - 2 = 0.$$

S est la sphère de centre $H = B * C$ (donc $H(0, 2, 2)$) et de rayon :

$$\frac{BC}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}. \text{ Et } d(H, P) = \frac{|2 - 2 - 2|}{\sqrt{2}} = \sqrt{2} < 2 < 2\sqrt{2}$$

donc $S \cap P$ est le cercle de centre L le projeté orthogonal de H sur P et de rayon $\sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{8 - 2} = \sqrt{6}$.

$$\overrightarrow{HL} = \alpha \cdot \vec{n}; \vec{n} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ vecteur normal de } P \text{ d'où } \begin{cases} x = 0 \\ y = 4\alpha + 2 \text{ avec } \alpha \in \mathbb{R} \\ z = -4\alpha + 2 \end{cases}$$

$$\text{or } L \in P \Leftrightarrow (4\alpha + 2) - (-4\alpha + 2) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 8\alpha - 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{4} \text{ donc } L(0, 3, 1).$$

On conclut que $S \cap P = \zeta(L(0, 3, 1); \sqrt{6})$.



$$a) x^2 + y^2 + mx + 2(m-1)y + (m+4)z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + \frac{m}{2})^2 - (\frac{m}{2})^2 + (y + (m-1))^2 - (m-1)^2 + (z + \frac{m+4}{2})^2 - (\frac{m+4}{2})^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x + \frac{m}{2})^2 + (y + m - 1)^2 + (z + \frac{m+4}{2})^2 = \frac{3}{2}m^2 + 4$$

$$\text{donc } S_m \text{ est la sphère du centre } W_m(-\frac{m}{2}; -m+1; \frac{-m-4}{2})$$

$$\text{de rayon } R_m = \sqrt{\frac{3}{2}m^2 + 4}.$$

$$b) W_m(-\frac{m}{2}; -m+1; \frac{-m-4}{2});$$

$$\text{Soit } H_m = \{W_m(-\frac{m}{2}; -m+1; \frac{-m-4}{2}) \text{ avec } m \in \mathbb{R}\}.$$

$$M(x, y, z) \in H_m \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{m}{2} \\ y = -m+1; m \in \mathbb{R} \\ z = -\frac{m}{2} - 2 \end{cases}$$

C'est une représentation paramétrique d'une droite D passant par A(0,1,-2)

De vecteur directeur $\vec{U} = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{2} \\ -1 \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Donc l'ensemble H_m des points W_m lorsque m varie pour tout $m \in \mathbb{R}$

c) $x^2 + y^2 + mx + 2(m-1)y + (m+4)z + 1 = 0$

$\Leftrightarrow m(x+2y+z) + x^2 + y^2 + z^2 - 2y + 4z + 1 = 0$ est vraie pour tout $m \in \mathbb{R}$

Si et seulement si $\begin{cases} x+2y+z=0 \\ x^2+y^2+z^2-2y+4z+1=0 \end{cases}$

$x+2y+z=0$ est l'équation d'un plan R

$x^2+y^2+z^2-2y+4z+1=0 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2+(z+2)^2=4.$

C'est l'équation d'une sphère S de centre I(0, 1, -2) est de rayon 2.

Donc il faut chercher $R \cap S$:

$d(I, R) = \frac{|2-2|}{\sqrt{1^2+2^2+1^2}} = 0$ donc $R \cap S$ est le plus grand cercle de centre

I= Ω(0,1,-2) et de rayon 2.

d) $M_0 \in S_m \Leftrightarrow x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + mx_0 + 2(m-1)y_0 + (m+4)z_0 + 1 = 0$

$\Leftrightarrow m(x_0 + 2y_0 + z_0) + x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2y_0 + 4z_0 + 1 = 0.$

Comme M_0 n'appartient pas au plan du cercle ζ c'est -à -dire :

$x_0 + 2y_0 + z_0 \neq 0$ d'où l'équation est équivalente à :

$m = -\frac{x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 - 2y_0 + 4z_0 + 1}{x_0 + 2y_0 + z_0}$ donc il existe qu'une seule sphère passant par M_0 .

e) $d(W_m, Q) = \frac{\left| -\frac{m}{2} - 2 \right|}{\sqrt{1}} = \left| \frac{m}{2} + 2 \right|$

Q est tangent à S_m si et seulement si $\left| \frac{m}{2} + 2 \right| = R_m$

Ou encore $\left(\frac{m}{2} + 2 \right)^2 = R_m^2 \Leftrightarrow \frac{3}{2}m^2 + 4 = \frac{m^2}{4} + 2m + 4.$

$\Leftrightarrow \frac{5}{4}m^2 - 2m = 0 \Leftrightarrow m\left(\frac{5}{4}m - 2\right) = 0 \Leftrightarrow m = 0$ ou $m = \frac{8}{5}$

Donc il existe deux sphère S_0 et $S_{\frac{8}{5}}$ tangentes à Q.

24

1) Q est le plan médiateur de [AB] alors $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal de Q et passe par $I = A * B$.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3-1 \\ 5-1 \\ 1-3 \end{pmatrix} \text{ donc } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}; I = A * B \text{ alors } I \left(\frac{1+3}{2}, \frac{1+5}{2}, \frac{3+1}{2} \right) \text{ d'où } I(2, 3, 2).$$

$\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal de Q alors Q : $2x + 4y - 2z + d = 0$

$$I \in Q \Leftrightarrow 4 + 12 - 4 + d = 0 \Leftrightarrow d = -12$$

$$\text{donc } Q : 2x + 4y - 2z - 12 = 0 \text{ ou encore } Q : x + 2y - z - 6 = 0$$

2) a) $P_m // Q \Leftrightarrow \overrightarrow{AB}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires avec $\vec{n}$ est un vecteur normal de P_m .

$$\vec{n} \begin{pmatrix} m+2 \\ -m-1 \\ -m \end{pmatrix}; \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \text{ et } \overrightarrow{AB} \text{ sont colinéaires } \Leftrightarrow \begin{vmatrix} m+2 & 2 \\ -m-1 & 4 \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} m+2 & 2 \\ -m & -2 \end{vmatrix} = 0 \text{ et } \begin{vmatrix} -m-1 & 4 \\ -m & -2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow 4(m+2) + 2(m+1) = 0 \text{ et } -2(m+2) + 2m = 0 \text{ et } 2m + 2 + 4m = 0$$

$$\Leftrightarrow m = -\frac{5}{3} \text{ et } -4 = 0 \text{ impossible d'où } E_1 = \emptyset$$

$$b) P_m \perp Q \Leftrightarrow \vec{n} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$\Leftrightarrow 2(m+2) + 4(-m-1) - 2(-m) = 0 \Leftrightarrow 0.m = 0 \text{ d'où } E_2 = \mathbb{R}$$

$$3) a) x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - 2x + y^2 - 2y + z^2 - \frac{5}{2} = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y-1)^2 - 1 + z^2 - \frac{5}{2} = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \frac{9}{2}$$

c'est l'équation d'une sphère de centre I (1,1,0) de rayon $\sqrt{\frac{9}{2}}$.

$$b) d(I, P_m) = \frac{|(m+2) - (m+1) + 3m - 1|}{\sqrt{(m+2)^2 + (m+1)^2 + m^2}} = \frac{|3m|}{\sqrt{3m^2 + 6m + 5}}$$

$$d^2 - R^2 = \frac{9m^2}{3m^2 + 6m + 5} - \frac{9}{2} = 9 \frac{(-m^2 - 6m - 5)}{2(3m^2 + 6m + 5)}$$

$$-m^2 - 6m - 5 = 0 \text{ et } -1 + 6 - 5 = 0 \text{ donc } m = -1 \text{ ou } m = -5.$$

m	$-\infty$	-5	-1	$+\infty$	
$-m^2-6m-5$	-	○	+	○	-
d^2-R^2	-	○	+	○	-

Si $m \in]-\infty, -5[\cup]-1, +\infty[$ alors P_m est sécant à S .

Si $m \in]-5, -1[$ alors P_m et S sont extérieurs.

Si $m = -5$ où $m = -1$ alors S et P_m sont tangents.

$$4) P_1 : 3x - 2y - z + 2 = 0$$

$$S : (x-1)^2 + (y-1)^2 + z^2 = \frac{9}{2}$$

$$d(I, P_1) = \frac{3}{\sqrt{14}} < \frac{9}{2} \text{ d'où } P_1 \cap S \text{ est un cercle de centre } H \text{ de rayon}$$

$$r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2 - \frac{9}{14}} = \sqrt{\frac{549}{28}}.$$

* H est le projeté orthogonal de I sur P_1 , donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\overrightarrow{IH} = \alpha \vec{n} \text{ et } H \in P_1, \vec{n} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ vecteur normal de } P_1, \overrightarrow{IH} = \alpha \vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 3\alpha + 1 \\ y_H = -2\alpha + 1 \\ z_H = -\alpha \end{cases}$$

$$H \in P_1 \Leftrightarrow 3x_H - 2y_H - z_H + 2 = 0. \text{ Donc } 3(3\alpha + 1) - 2(-2\alpha + 1) + \alpha + 2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{3}{14}$$

$$\text{d'où } H\left(\frac{5}{14}, \frac{10}{7}, \frac{3}{14}\right) \text{ donc } P_1 \cap S = \zeta(H, r).$$

$$\nabla 25) 1) \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ vecteur normal de } P; \vec{n}' \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ vecteur normal de } Q.$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 \neq 0 \text{ donc } \vec{n} \text{ et } \vec{n}' \text{ ne sont pas colinéaires,}$$

par suite P et Q sont sécants d'où $P \cap Q = \Delta$.

$$\Delta: \begin{cases} x + 2y - 2 = 0 & (1) \\ 2x + z - 8 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$\text{On pose } x = \alpha; \text{ alors } (1) \Rightarrow y = -\frac{\alpha}{2} + 1 \text{ et } (2) \Rightarrow z = -2\alpha + 8$$

$$\text{D'où une représentation paramétrique de } \Delta \text{ est } \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\frac{1}{2}\alpha + 1; \alpha \in \mathbb{R} \\ z = -2\alpha + 8 \end{cases}$$

$$2) a) x^2 + y^2 + z^2 - 2mx - 2y + 2(2m - 3)z - 12 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-m)^2 - m^2 + (y-1)^2 - 1 + (z+(2m-3))^2 - (2m-3)^2 - 12m + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-m)^2 + (y-1)^2 + (z+(2m-3))^2 = 5m^2 + 9$$

c'est l'équation d'une sphère d'où S_m est la sphère de centre

$I_m(m, 1, -2m+3)$ de rayon $\sqrt{5m^2+9}$.

b) Soit $D_m = \{I_m(m, 1, -2m+3) \text{ avec } m \in \mathbb{R}\}$

$$M(x, y, z) \in D_m \Leftrightarrow \begin{cases} x = m \\ y = 1 \\ z = -2m + 3 \end{cases} ; m \in \mathbb{R}$$

c'est une représentation paramétrique d'une droite de vecteur directeur :

$$\vec{U} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et passe par le point } A(0, 1, 3).$$

3) a) S_0 de centre $I_0(0, 1, 3)$ de rayon 3.

$$d(I_0, Q) = \frac{|3-8|}{\sqrt{4+1}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \sqrt{5} < 3 \text{ donc } S_0 \text{ et } Q \text{ sont sécants d'où } S_0 \cap Q = \zeta$$

cercle de centre H de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{9 - 5} = 2$

H le projeté orthogonal de I_0 sur Q donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\overrightarrow{I_0 H} = \alpha \cdot \vec{n} \text{ et } H \in Q \Leftrightarrow \begin{cases} x_H = 2\alpha \\ y_H = 1 \\ z_H = \alpha + 3 \end{cases} \text{ et } 2x_H + z_H - 8 = 0.$$

$$\text{donc } 2(2\alpha) + (\alpha + 3) - 8 = 0 \Leftrightarrow 5\alpha = 5 \Leftrightarrow \alpha = 1$$

d'où ζ est de centre H (2, 1, 4).

b) $M(x, y, z) \in S_0 \cap \Delta \Leftrightarrow M \in S_0 \text{ et } M \in \Delta$

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha \\ y = -\frac{1}{2}\alpha + 1 \\ z = -2\alpha + 8 \end{cases}$$

$$\text{et } M \in S_0 \Leftrightarrow \alpha^2 + \left(-\frac{1}{2}\alpha + 1 - 1\right)^2 + (-2\alpha + 8 - 3)^2 = 9$$

$$\Leftrightarrow \frac{21}{4}\alpha^2 - 20\alpha + 16 = 0$$

$$\Delta' = 16 \text{ d'où } \alpha = \frac{8}{3} \text{ ou } \alpha = \frac{8}{7} \text{ donc } S_0 \cap \Delta = \left\{ L\left(\frac{8}{3}, -\frac{1}{3}, \frac{8}{3}\right), L'\left(\frac{8}{7}, \frac{3}{7}, \frac{40}{7}\right) \right\}$$

26

$$1) * MA^2 = (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z + 14$$

$$MC^2 = x^2 + y^2 + (z+2)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 4z + 4.$$

$$MA^2 - MC^2 = 10 \Leftrightarrow -2x + 4y - 10z + 10 = 10 \Leftrightarrow -x + 2y - 5z = 0$$

D'où l'ensemble recherché est le plan P d'équation : $-x + 2y - 5z = 0$.

de vecteur normal $\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$* \overline{AC} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & +2 \\ -2 & -3 \end{pmatrix} \text{ d'où } \overline{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \text{ donc } \overline{AC} = \vec{n}$$

donc $\overline{AC}$ est un vecteur normal à P d'où $(AC) \perp P$.

$$2) x^2 + y^2 + z^2 - 2x + y + 2z = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 - 1 + (y + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} + (z+1)^2 - 1 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y + \frac{1}{2})^2 + (z+1)^2 = \frac{9}{4}$$

donc S est la sphère de centre $I(1, -\frac{1}{2}, -1)$ de rayon $R = \frac{3}{2}$

$$d(I, P) = \frac{|-1 - 1 + 5|}{\sqrt{1 + 2^2 + 5^2}} = \frac{3}{\sqrt{30}} < \frac{3}{2}$$

$$\text{d'où } S \cap P \text{ est un cercle de centre de rayon } r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{9}{30}} = \sqrt{\frac{39}{20}}$$

$$H(x, y, z) \text{ est le projeté orthogonal de } I \text{ sur } P \text{ donc } \overline{IH} = \alpha \vec{n} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\alpha + 1 \\ y = 2\alpha - \frac{1}{2} \\ z = -5\alpha - 1 \end{cases}$$

$$H \in P \Leftrightarrow x_H - 2y_H + 5z_H = 0 \Leftrightarrow -\alpha + 1 - 4\alpha + 1 - 25\alpha - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha = \frac{-1}{10} \text{ d'où } H(\frac{11}{10}, -\frac{7}{10}, -\frac{1}{2})$$

$$3) \overline{GA} + \overline{GB} - 3\overline{GC} = \vec{0}$$

$$\text{a) Soit } G(x, y, z) \in \xi, \overline{GA} \begin{pmatrix} 1 & -x \\ -2 & -y \\ 3 & -z \end{pmatrix}; \overline{GB} \begin{pmatrix} -2 & -x \\ 1 & -y \\ -8 & -z \end{pmatrix}; \overline{GC} \begin{pmatrix} -x \\ -y \\ -2 & -z \end{pmatrix}$$

$$\overline{GA} + \overline{GB} - 3\overline{GC} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-x) + (-2-x) - 3(-x) = 0 \\ (-2-y) + (1-y) - 3(-y) = 0 \\ (3-z) + (-8-z) - 3(-2-z) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x=1 \text{ et } y=1 \text{ et } z=-1 \text{ d'où } G(1,1,-1).$$

$$\text{b) } \overrightarrow{IG} \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{3}{2} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur normal de } Q \text{ d'où } Q : \frac{3}{2}y+d=0$$

$$G \in Q \Leftrightarrow \frac{3}{2}+d=0 \Leftrightarrow d=-\frac{3}{2} \text{ d'où } Q : \frac{3}{2}y-\frac{3}{2}=0 \text{ ou encore } Q: y-1=0$$

$$4) \bar{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ vecteur normal de } P, \bar{n}_Q \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ vecteur normal de } Q$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ alors } \bar{n} \text{ et } \bar{n}_Q \text{ sont non colinéaires, donc } P \text{ et } Q$$

sont sécants ; $P \cap Q = \Delta$

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} y-1=0 \\ x-2y+5z=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=1 \\ z=\frac{2}{5}-\frac{1}{5}\alpha \end{cases} \text{ d'où } \Delta \begin{cases} x=\alpha \\ y=1 \\ z=-\frac{1}{5}\alpha+\frac{2}{5} \end{cases} ; \alpha \in \mathbb{R}.$$

$$M(x, y, z) \in S \cap \Delta \Leftrightarrow M \in S \text{ et } M \in \Delta$$

$$M \in \Delta \Leftrightarrow \begin{cases} x=\alpha \\ y=1 \\ z=-\frac{1}{5}\alpha+\frac{2}{5} \end{cases} \text{ et } M \in S \text{ donc } (\alpha-1)^2 + \left(\frac{1}{2}+1\right)^2 + \left(-\frac{1}{5}\alpha+\frac{7}{5}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$\Leftrightarrow 26\alpha^2 - 64\alpha + 74 = 0 \Leftrightarrow 13\alpha^2 - 32\alpha + 37 = 0$$

$$\Delta' = 16^2 - 13 \cdot 37 < 0 \text{ donc } S \cap \Delta = \emptyset$$

$$\text{27} \quad 1) \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{AC} \text{ non colinéaires } A, B, C \text{ non alignés ils}$$

déterminent un plan.

Soit $\bar{n}(X, Y, Z)$ normal à (ABC) .

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \text{ avec :}$$

$$X = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \text{ et } Y = -\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \text{ et } Z = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \text{ donc } \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$D' \text{ où } (ABC) : x - 2y + 2z + d = 0$$

$$\text{Or } A(1,2,2) \in (ABC) \Rightarrow 1 - 4 + 4 + d = 0 \Rightarrow d = -1$$

$$\text{Ainsi } (ABC) : x - 2y + 2z - 1 = 0$$

$$2) \text{ a) } \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ normal de } P_1 \text{ et } \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ normal de } P_2.$$

$$\vec{n}_1 \text{ et } \vec{n}_2 \text{ ne sont pas colinéaires car } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} \neq 0$$

Donc P_1 et P_2 sont sécants selon une droite Δ

$$b) C \in P_1 = (ABC) \text{ et } x_c - 3y_c + 2z_c + 2 = 1 - 9 + 6 + 2 = 0 \\ \text{donc } C \in P_2 \text{ d'où } C \in \Delta.$$

$$c) \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ on a } \vec{n}_1 \cdot \vec{u} = 2 - 2 = 0 \Rightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{u}$$

$$\Rightarrow \vec{u} \text{ est un vecteur de } P_1.$$

$$\vec{u} \cdot \vec{n}_2 = 2 - 2 = 0 \text{ donc } \vec{n}_2 \perp \vec{u}$$

$$\Rightarrow \vec{u} \text{ est un vecteur de } P_2.$$

$$\text{D'où } \vec{u} \text{ est un vecteur de } \Delta$$

$$d) \Delta \text{ passe par } C \text{ et de vecteur directeur } \vec{u} \text{ d'où une représentation}$$

$$\text{Paramétrique de } \Delta : \begin{cases} x = 2\alpha + 1 \\ y = 3 \\ z = -\alpha + 3 \end{cases}, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$3) \text{ a) } \overrightarrow{AM} \cdot \vec{u} = 0 \Leftrightarrow 2k \times 2 + (3-2) \times 0 + (-k+1) \times (-1) = 0 \Leftrightarrow k = \frac{1}{5}$$

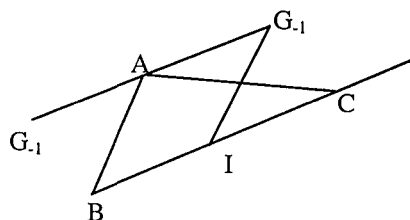
$$\text{Donc } M\left(\frac{7}{5}, 3, \frac{14}{5}\right)$$

$$b) \text{ ainsi de } d(A, \Delta) = AM = \sqrt{\left(\frac{7}{5}-1\right)^2 + (3-2)^2 + \left(\frac{14}{5}-2\right)^2} = \frac{3\sqrt{5}}{5}$$

28

$$1) \overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$$

$$\overrightarrow{AG_{-1}} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BI}$$



$$2) a) \overrightarrow{AG_k} = \frac{1}{k^2+1}(k\overrightarrow{AB} - k\overrightarrow{AC})$$

$$= \frac{-k}{k^2+1}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}) = -\frac{k}{k^2+1}\overrightarrow{BC}$$

$$b) f(x) = \frac{-x}{x^2+1} \text{ dérivable sur } [-1,1] \text{ et } f'(x) = \frac{x^2-1}{(x^2+1)^2}$$

x	-1	1
f'(x)	0	0
f(x)	1/2	-1/2

$$c) k \in [-1,1] \text{ alors } G_k \text{ décrit le segment } [G_{-1}G_1] \text{ car } -\frac{1}{2} \leq \frac{k}{k^2+1} \leq \frac{1}{2}$$

$$3) \|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{MC}\|$$

$$\|2\overrightarrow{MG_1}\| = \|2\overrightarrow{MG_{-1}}\| \quad \text{car } G_1 \text{ barycentre } \{(A, 2) (B, 1) (C, 1)\}$$

$$MG_1 = MG_{-1} \quad \text{et } G_{-1} \text{ barycentre } \{(A, 2) (B, -1) (C, 1)\}$$

M appartient au plan médiateur de $[G_1G_2]$

ξ = plan médiateur de $[G_1G_{-1}]$

$$4) \|2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\| = \|2\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC}\|$$

$$\|2\overrightarrow{MG_1}\| = \|\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{CM}\|$$

$$\Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MG_1}\| = \|\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BA}\|$$

$$\Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MG_1}\| = \|\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}\|$$

$$\Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MG_1}\| = \|2\overrightarrow{AI}\| \quad \text{car } I = B * C$$

$$\Leftrightarrow MG_1 = AI$$

$\Leftrightarrow M$ appartient à la sphère de centre G_1 de rayon AI .

D'où $\mathcal{P} = S(G_1, AI)$

$$5) a) A(0,0,2) B(-1,2,1) \text{ et } C(-1,2,5)$$

$$\overrightarrow{AG_1} = \frac{1}{2} \overrightarrow{CB} \Leftrightarrow x_{G_1} = 0 \text{ et } y_{G_1} = 0 \text{ et } z_{G_1} = 0 \text{ d'où } G_1(0,0,0)$$

$$\overrightarrow{AG_{-1}} = -\frac{1}{2} \overrightarrow{CB} \Rightarrow G_{-1}(0,0,4) \text{ et } I(-1,2,3)$$

$$AI = \sqrt{1+4+1} = \sqrt{6}$$

La sphère de centre G_1 et de rayon $\sqrt{6}$

On a A est le milieu de $[G_1 G_{-1}]$ car $\overrightarrow{AG_1} = -\overrightarrow{AG_{-1}}$

$$\text{Donc } A \in \xi \text{ d'où } d(G_1, \xi) = AG_1 = \frac{1}{2} G_{-1} G_1 = 2$$

Ainsi $d(G_1, \xi) = 2 < \sqrt{6}$ Donc $\mathcal{F}$ et ξ sont sécants.

b) $\mathcal{F} \cap \xi = \zeta$ le cercle de rayon $r = \sqrt{R^2 - d^2} = \sqrt{6 - 4} = \sqrt{2}$ de centre H le projeté orthogonal de G_1 sur le plan.

Ainsi ζ est le cercle de centre A de rayon $\sqrt{2}$.