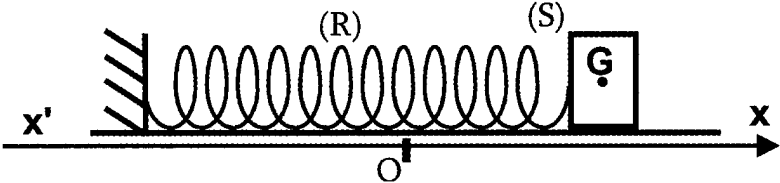


Enoncé



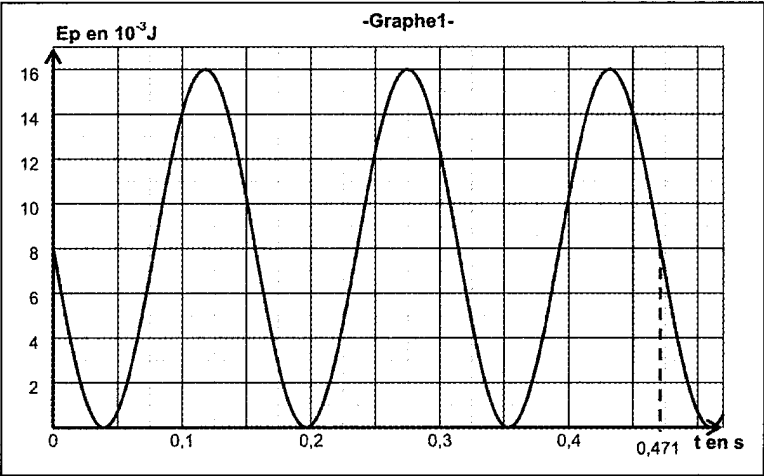
Un pendule élastique est constitué d'un ressort de raideur $k= 20\text{N.m}^{-1}$ et d'un solide de masse m qui peut osciller sur un banc à coussin d'air horizontal.



A l'instant $t = 0$, le solide est écarté de sa position d'équilibre de $x_0 = +2\sqrt{2}$ cm et lâché avec une vitesse initiale v_0 négative.

- I. Dans un premier temps, on néglige les frottements du chariot sur le banc.
- 1) Faire l'inventaire des forces exercées sur le chariot et les représenter.
 - 2) Etablir l'équation différentielle du mouvement.
 - 3) Vérifier que $x(t) = X_m \sin (\omega_0 t + \varphi)$ est solution de cette équation différentielle avec ω_0 une constante que l'on exprimera en fonction des grandeurs physiques du système.
 - 4) Etablir une relation entre x , v , X_m et ω_0 .
 - 5) En quel point la vitesse du mobile est maximale ?

II. Grâce à des capteurs appropriés, on enregistre l'évolution temporelle de l'élongation x du centre d'inertie du chariot. Sur le graphe1, on trace la courbe de la variation de l'énergie potentielle élastique E_p du système {chariot, ressort} en fonction du temps.



1) Montrer que E_p s'écrit sous la forme :

$$E_p(t) = \frac{1}{4} K X_m^2 \left[1 + \sin(2\omega_0 t + 2\varphi - \frac{\pi}{2}) \right].$$

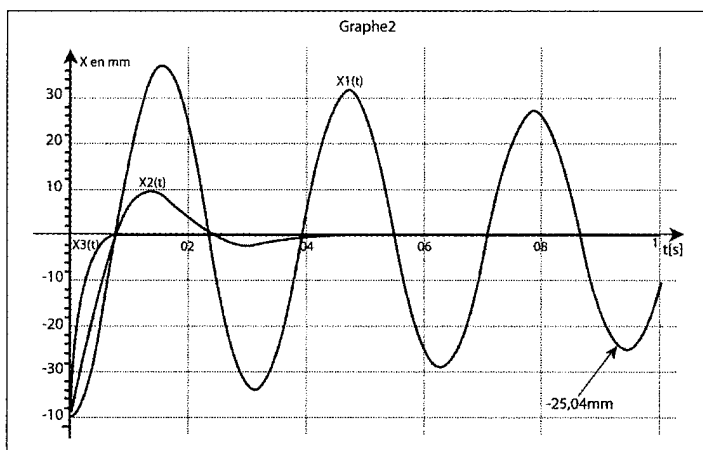
2) En exploitant le graphe1, déterminer la période propre des oscillations T_0 , l'amplitude X_M et la masse m du chariot.

3) Déterminer la phase initiale φ et l'expression de l'élongation $x(t)$.

4) Déterminer v_0 .

5) Montrer que l'énergie mécanique du pendule élastique est constante.

III. A l'aide d'un dispositif approprié, on soumet le chariot à des frottements visqueux. Le graphe2 représente l'enregistrement de la variation, en fonction du temps, de l'élongation x de son centre d'inertie G pour trois coefficients de frottement h_1 , h_2 et h_3 correspondant respectivement à $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$.



1) Etablir l'équation différentielle relative à x .

2) Montrer que l'énergie du pendule élastique diminue.

3) Parmi les enregistrements indiquer celui qui correspond à la valeur du coefficient de frottement le plus faible et donner le nom de son régime.

4) Nommer les autres régimes en comparant leur coefficient de frottement.

5) Pour la courbe $x_1 = f(t)$

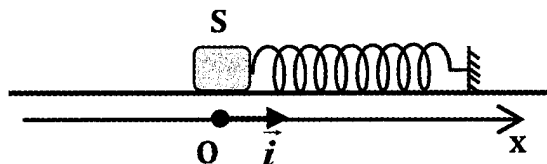
a- déterminer la variation de l'énergie mécanique de l'oscillateur entre les instants $t_0 = 0s$ et $t' = 3T$ avec T la pseudo période des oscillations.

b- A quoi est due cette variation ?

c- Calculer l'énergie cinétique du solide à $t = 0,2s$



Un solide (S) de masse m est fixé à l'extrémité d'un ressort (R) à spires non jointives, de masse négligeable et de raideur K . L'ensemble est placé sur un plan horizontal parfaitement lisse (voir figure ci-contre).

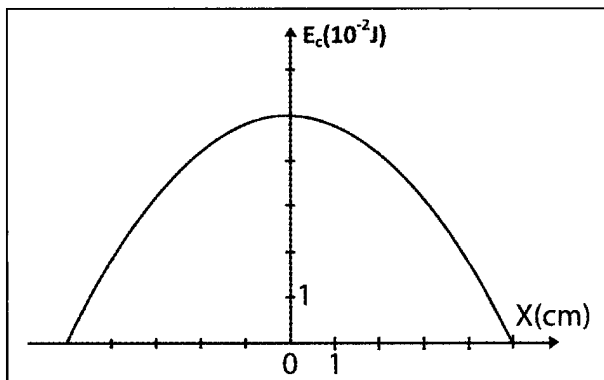


A partir de sa position d'équilibre, on communique au solide (S) une vitesse initiale V_0 dans le sens positif des élongations.

1)

- a- Etablir l'équation différentielle relative à x (élongation du centre d'inertie du solide) et donner l'expression de la période propre des oscillations.
- b- Montrer que l'énergie mécanique du système {solide, ressort} est constante.

2) La courbe ci-contre donne la variation de l'énergie cinétique du système en fonction de l'élongation x de (S).



- a- Justifier l'allure de la courbe en établissant l'expression de l'énergie cinétique E_c en fonction de x , K et E_{c0} ; énergie cinétique initiale du solide.
- b- Déterminer en utilisant la courbe les valeurs de E_{c0} , X_m et K .
- c- En déduire la valeur de la masse m sachant que la période propre est de valeur $T_0 = 0,4s$.

3) Etablir l'équation horaire du mouvement.

4) On immobilise le système, on écarte le solide (S) d'une distance $X_0 = 5cm$ et on l'abandonne à lui-même sans vitesse initiale à $t=0s$. Au cours de son mouvement le solide S est, maintenant, soumis à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -h \cdot \vec{v}$ (h constante positive).

- a- Etablir l'équation différentielle des oscillations en x (élongation de (S)).

b- L'amplitude des oscillations de (S) diminue de $\frac{2}{10}$ de sa valeur au cours de chaque pseudo période T .

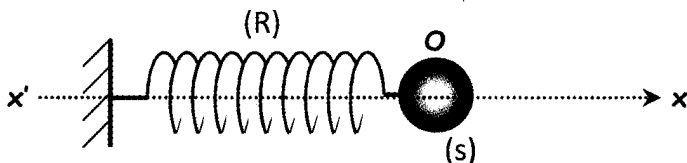
b₁- Nommer le régime d'oscillation.

b₂- Déterminer l'élongation du solide à $t_1=2T$.

b₃- Calculer la variation de l'énergie mécanique du système entre les instants de dates $t_0=0$ et $t_1=2T$.



Soit un pendule horizontal constitué d'un ressort (R) de raideur k et de masse négligeable, enfilé à travers une tige, à l'extrémité duquel est soudé un solide (S) de masse m ponctuel pouvant coulisser **sans frottement** à travers la tige.



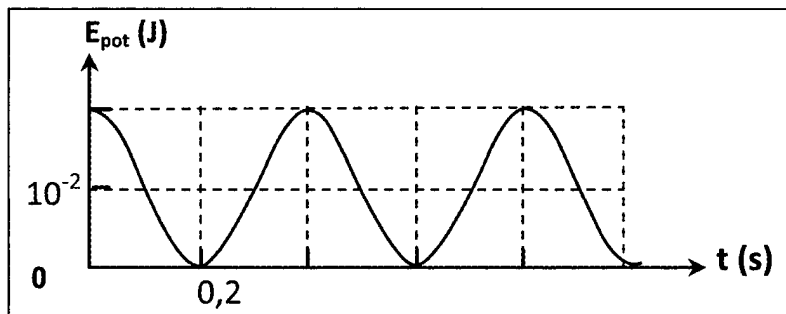
On comprime le ressort de **5 cm** puis on l'abandonne à lui-même **sans vitesse** à $t = 0$.

1) a- Donner l'expression de l'énergie mécanique du pendule élastique en fonction de k , m , x (élongation de (s) à l'instant t) et v (la vitesse de (s) à l'instant t).

b- Sachant que le système $\{(S),(R)\}$ est conservatif, déduire l'équation différentielle régissant les oscillations de (s),

c- Préciser la nature du mouvement du solide (S) et exprimer sa pulsation en fonction de k et m .

2) Le graphe suivant représente les variations de l'énergie potentielle élastique du pendule au cours du temps.

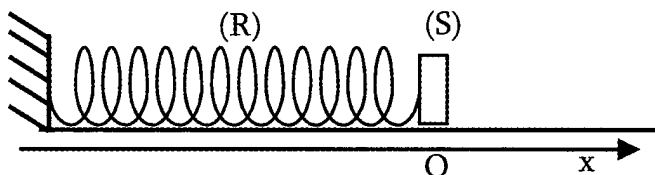


a- Etablir l'expression de l'énergie potentielle élastique en fonction de k , X_m , et t .

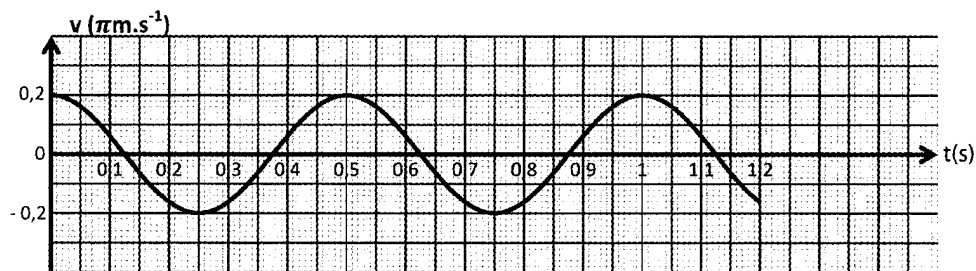
- 2) Dédurre l'expression de l'énergie mécanique en fonction de k et X_m : (X_m amplitude des oscillations).
- 3) En déduire la valeur de la raideur k du ressort.
- 4) Déterminer la période de l'énergie potentielle et en déduire la période des oscillations.
- 5) Calculer alors la masse m du solide (S).
- 3) Ecrire l'équation horaire du mouvement du solide (S).
- 4) Déterminer les positions pour lesquelles, la vitesse du solide (S) est réduite à moitié de sa valeur acquise au passage par sa position d'équilibre ?



On considère un pendule élastique formé par un solide (S) de masse m et un ressort (R) à spires non jointives et de raideur K . Le pendule peut se déplacer sur un plan horizontal parfaitement lisse.



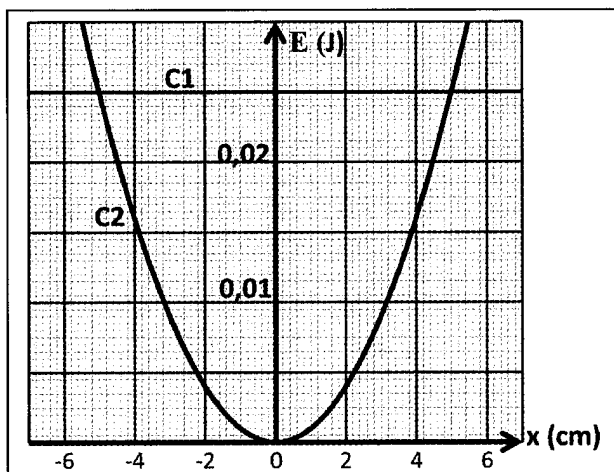
- 1) Etablir l'équation différentielle caractéristique du mouvement du solide (S).
- 2) Sachant que cette équation différentielle admet une solution de la forme $x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$.
 - a- Etablir la relation entre (V_m et X_m) et (φ_v et φ_x).
 - b- Ci-dessous on donne le chronogramme de la variation de la vitesse en fonction du temps, $v = f(t)$:



Déterminer : T_0 , V_m , φ_v et ω_0 .

- a- Dédurre X_m et φ_x , puis écrire $x(t)$.

- 3) Montrer que l'énergie mécanique du pendule élastique se conserve au cours du temps.
- 4) Le graphe suivant représente les courbes $E_p = f(x)$ et $E = g(x)$ où E_p et E représentent respectivement l'énergie potentielle et l'énergie mécanique du pendule élastique.



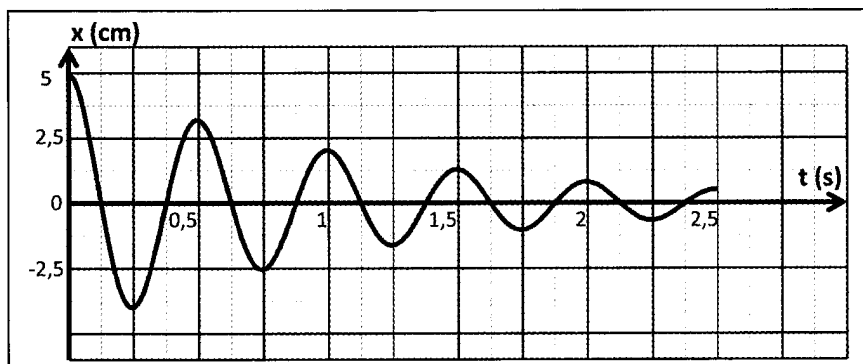
- a- Identifier chacune des deux courbes en justifiant la réponse.
- b- En exploitant le graphe, déterminer la raideur K du ressort et la masse m du solide.
- c- Déterminer l'énergie cinétique du solide lorsqu'il passe par le point d'abscisse $x = 4\text{ cm}$.
- 5) Le solide (S) est maintenant soumis à des forces de frottement de type visqueux $\vec{f} = -h\vec{v}$.

a- L'équation différentielle du mouvement du solide (S) est :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4,96 \frac{dx}{dt} + 157,91x = 0.$$

Trouver la valeur du coefficient du frottement h .

b- La courbe relative à l'élongation du centre d'inertie en fonction du temps, $x(t)$ est donnée par le graphe suivant :

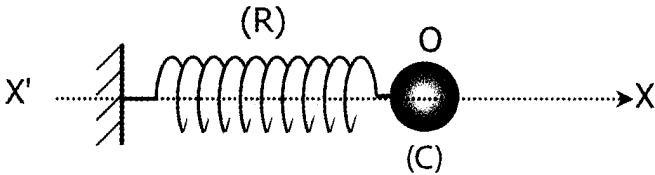


- Nommer le régime d'oscillation.
- Calculer la variation de l'énergie mécanique du pendule entre $t_1 = 0s$ et $t_2 = 1,5s$.

5

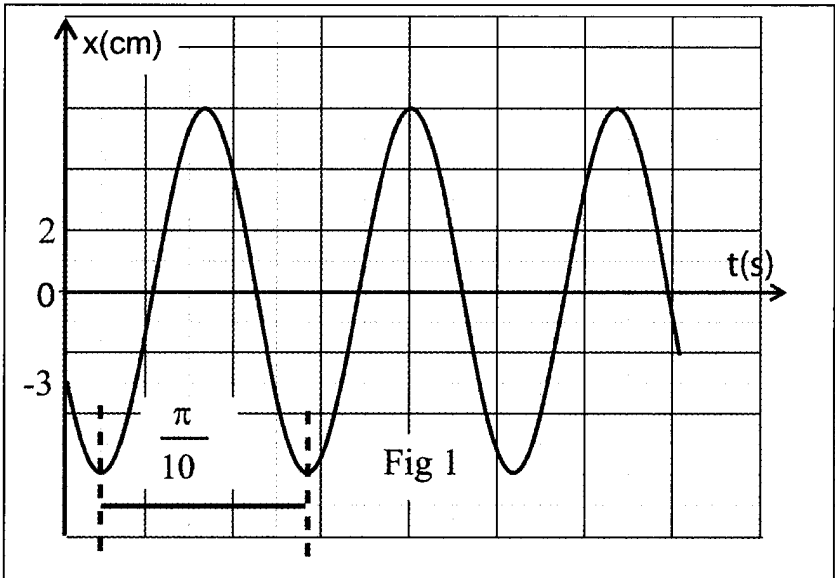
Un pendule élastique est constitué d'un ressort (R) de raideur K , dont l'une des extrémités est fixée à un support fixe. A l'autre extrémité est attaché un solide (C) supposé ponctuel masse m .

Le solide (C) peut glisser sans frottement sur un plan horizontal ; sa position est repérée sur un axe $X'OX$ confondu avec l'axe du ressort.



A l'équilibre (C) se trouve au point O : origine des espaces on écarte le solide (C) vers un point d'abscisse x_0 et lui communique une vitesse v_0 à l'origine des temps ($t=0$).

Le corps (C) effectue donc des oscillations. Un enregistrement a permis de tracer la courbe représentant la variation de l'élongation x du temps.



- I- 1) a- En appliquant la R.F.D, Etablir l'équation différentielle du mouvement.
 b- Vérifier que la solution de cette équation est une fonction sinusoïdale et déterminer sa pulsation propre.

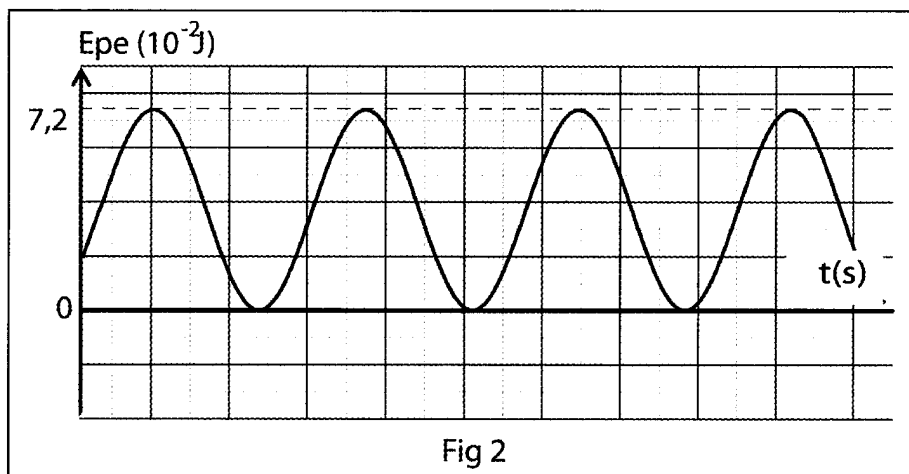
2) a- En exploitant la courbe de la figure (1) ; déterminer :

- la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur.
- L'abscisse initiale x_0 .
- L'amplitude X_m .
- La phase initiale φ .

b- En déduire l'équation horaire du mouvement.

c- Déterminer la valeur de vitesse v_0 .

II- Un dispositif approprié a permis de tracer la courbe de la variation de l'énergie cinétique du solide (C) au cours du temps (figure 2).



1) a- Déterminer l'expression de l'énergie potentielle élastique **E_{pe}** en fonction du temps et vérifier qu'elle s'écrit sous la forme d'une somme d'un terme constant et d'une fonction sinusoïdale.

b- En déduire la valeur de période **T_{Epe}** de l'énergie potentielle élastique.

2) Montrer que le système {(C), ressort} est conservatif.

3) En exploitant la courbe de la **fig 2** déterminer la masse **m** et déduire la raideur **K** du ressort.

4) Représenter sur la **fig 2** la courbe de la variation de l'énergie cinétique en fonction du temps ; en indiquant les valeurs initiales de **E_C** et **E_p**.

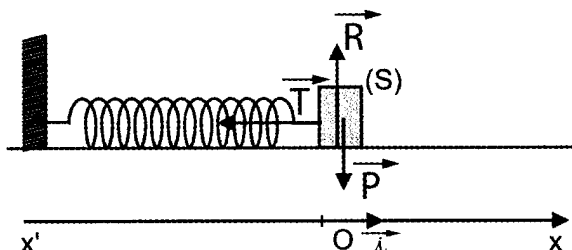
Corrigé

1

I-1) Le chariot est soumis à trois forces:

c- son poids $\vec{P}$ d- la réaction du banc $\vec{R}$ e- la tension du ressort $\vec{T}$

2)



RFD :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\vec{a}$$

Projection sur $(O, \vec{i})$: $T = ma \Leftrightarrow -kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$ d'où $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$

$$3) x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\frac{dx}{dt} = \omega_0 X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$$

L'équation différentielle devient : $-\omega_0^2 X_m \sin(\omega_0 t + \varphi) + \frac{k}{m} X_m \sin(\omega_0 t + \varphi) = 0$

$$\Rightarrow X_m \sin(\omega_0 t + \varphi) \left[-\omega_0^2 + \frac{k}{m} \right] = 0$$

Cette équation doit être vérifiée $\forall t \Rightarrow -\omega_0^2 + \frac{k}{m} = 0$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$4) x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad (1)$$

$$v(t) = \omega_0 X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \Rightarrow \frac{v}{\omega_0} = X_m \cos(\omega_0 t + \varphi) \quad (2)$$

$$(1)^2 + (2)^2 \text{ donne } x^2 + \frac{v^2}{\omega_0^2} = X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) + X_m^2 \cos^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\text{D'où } x^2 + \frac{v^2}{\omega_0^2} = X_m^2$$

$$5) \frac{v^2}{\omega_0^2} = X_m^2 - x^2 \Rightarrow v = \pm \omega_0 \sqrt{X_m^2 - x^2}$$

Cette vitesse est maximale lorsque x^2 est minimale $\Rightarrow x^2 = 0$ d'où $v = \pm \omega_0 X_m$

$$V_m = \omega_0 X_m$$

Ainsi la vitesse du chariot est maximale au passage du mobile par sa position d'équilibre.

II-

$$1) E_p = \frac{1}{2} k x^2 = \frac{1}{2} k X_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \Rightarrow E_p = \frac{1}{4} k X_m^2 [1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi)]$$

$$E_p = \frac{1}{4} k X_m^2 \left[1 - \sin\left(2\omega_0 t + 2\varphi + \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$E_p = \frac{1}{4} k X_m^2 \left[1 + \sin\left(2\omega_0 t + 2\varphi - \frac{\pi}{2}\right) \right]$$

$$2) E_p \text{ est périodique de période } T = \frac{T_0}{2} \Rightarrow T_0 = 2T$$

$$\text{D'après le graphe } 3T = 0,471 \text{ s} \Rightarrow T = \frac{0,471}{3} = 0,157 \text{ s} \quad T_0 = 0,314 \text{ s} \approx 0,1\pi \text{ s}$$

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}; \quad T_0^2 = 4\pi^2 \frac{m}{k} \Rightarrow m = \frac{k T_0^2}{4\pi^2}$$

$$\text{AN} \quad m = \frac{20 \times (0,1\pi)^2}{4\pi^2} = 0,05 \text{ kg}$$

$$E_{p_{\max}} = \frac{1}{2} k X_m^2 \Rightarrow X_m = \sqrt{\frac{2E_{p_{\max}}}{k}}; \text{ AN } X_m = \sqrt{\frac{2 \times 16 \cdot 10^{-3}}{20}} = 4 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$3) \text{ à } t=0 \quad x = X_m \sin \varphi \Rightarrow \sin \varphi = \frac{x}{X_m} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{4} \text{ ou } \varphi = \frac{3\pi}{4}$$

$$\text{Or } v_0 < 0 \Rightarrow \cos \varphi < 0 \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4} \text{ rad d'où}$$

$$x(t) = 4 \cdot 10^{-2} \sin(20t + \frac{3\pi}{4}); \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20 \text{ rad.s}^{-1}$$

Remarque : On peut déterminer φ à partir de l'expression de E_p

$$\text{A } t=0; \quad E_p = \frac{1}{2} k X_m^2 \left[1 + \sin(2\varphi - \frac{\pi}{2}) \right] = 8 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

$$\Rightarrow \sin\left(2\varphi - \frac{\pi}{2}\right) = 0 \quad \text{car } \frac{1}{2} k X_m^2 = 8 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 2\varphi - \frac{\pi}{2} = 0 \\ \text{ou} \\ 2\varphi - \frac{\pi}{2} = \pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\varphi = \frac{\pi}{2} \\ \text{ou} \\ 2\varphi = \frac{3\pi}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = \frac{\pi}{4} \\ \text{ou} \\ \varphi = \frac{3\pi}{4} \end{cases}$$

$$\text{Or } E_p \text{ est décroissante} \Rightarrow \cos(2\varphi - \pi) < 0 \Rightarrow \varphi = \frac{3\pi}{4} \text{ rad}$$

$$4) v = \omega_0 X_m \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

$$\text{à } t=0 \quad v_0 = \omega_0 X_m \cos \varphi = 20 \times 4 \cdot 10^{-2} \cos \frac{3\pi}{4} = -0,56 \text{ m.s}^{-1}$$

Remarque : On peut utiliser l'expression de

$$V = \pm \omega_0 \sqrt{X_m^2 - x^2}$$

$$\text{à } t=0 \quad V_0 = -\omega_0 \sqrt{X_m^2 - x^2} = -20 \sqrt{(4 \cdot 10^{-2})^2 - (2 \cdot 10^{-2} \sqrt{2})^2}$$

$$v_0 = -0,56 \text{ m.s}^{-1}$$

$$5) E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\frac{dE_m}{dt} = mva + kxv = V \underbrace{\left(m \frac{d^2x}{dt^2} + kx \right)}_{=0} = 0 \quad \text{D'où } E = \text{c}^{\text{te}}$$

III-

$$1) \text{ RFD : } \vec{P} + \vec{T} + \vec{R} + \vec{f} = m\vec{a}$$

Projection sur $(o, \vec{i})$: $T + f = ma$

$$-kx - h\dot{v} = m \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$2) E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{dE}{dt} = mva + kxv = v \left[m \frac{d^2x}{dt^2} + kx \right] = -h\dot{v}^2 < 0$$

 $\Rightarrow E_m$ diminue au cours du temps.

3) Plus l'amortissement est faible plus le nombre des oscillations est grand d'où $x_1(t)$ correspond à l'amortissement le plus faible : c'est un régime pseudo périodique.

4) $x_2(t)$: régime pseudo périodique.

$x_3(t)$: régime apériodique.

$$h_3 > h_2$$

$$5)a- E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\text{Si } x = \pm X_m \Rightarrow v = 0$$

$$\text{A } t = 0s \Rightarrow E_{1m} = \frac{1}{2}kX_m^2 = 16.10^{-3}$$

$$\text{A } t^1 = 3T \Rightarrow E_{2m} = \frac{1}{2}kX_m^2 = 6,27.10^{-3}J$$

$$\Delta E_m = E_{2m} - E_{1m} = -9,73.10^{-3}J$$

b- ΔE_m est négative $\Rightarrow$ il y'a une perte d'énergie qui est due aux forces de frottements qui dissipent l'énergie sous forme de chaleur.

$$c- E_c = \frac{1}{2}mv^2$$

$$v = \frac{dx}{dt} = p(t)$$

$$v = \frac{30.10^{-3} - (-10.10^{-3})}{-0,08}$$

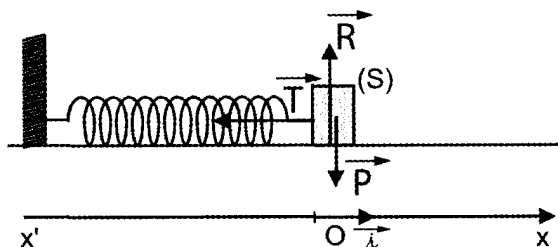
$$X \text{ est max } \Rightarrow v = 0$$

$$V \text{ est max } \Rightarrow x = 0$$

$$v = -0,5 \text{ m.s}^{-1}$$

$$E_c = \frac{1}{2} \times 5 \times 10^{-2} \times (-0,5)^2$$

$$E_c = 6,25 \cdot 10^{-3} \text{ J}$$



1) a- RFD : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} = m\vec{a}$

Projection sur $(O, \vec{i})$: $T = ma \Rightarrow -kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$ d'où

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Cette équation différentielle admet une solution de la forme $x(t) = X_m \sin$

$(\omega_0 t + \varphi)$ de période propre $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$

b- $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$

$$\frac{dE_m}{dt} = mva + kxv = v \underbrace{[ma + kx]}_{=0} = 0$$

D'où $E_m = C^{te}$

2) a- $E_c = E_m - E_p = E_m - \frac{1}{2}kx^2$ or $E_m = C^{te} = E_{c_0}$

d'où $E_c = E_{c_0} - \frac{1}{2}kx^2$: de la forme $ax^2 + b$

avec $a = -\frac{1}{2}k$ et $b = E_{c_0}$

$E_c = f(x^2)$ est alors une parabole

b- Lorsque $x=0 \Rightarrow E=E_{c_0}=5.10^{-2}J$; $X_m = 5.10^{-2}m$

Lorsque $x = X_m \Rightarrow E_c = 0 \Rightarrow E_{c_0} - \frac{1}{2}kX_m^2 = 0 \Rightarrow k = \frac{2E_{c_0}}{X_m^2}$

AN $k = \frac{2 \times 5.10^{-2}}{(5.10^{-2})^2} = 40 N.m^{-1}$

c- $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow m = \frac{kT_0^2}{4\pi^2} = \frac{40 \times 0,4^2}{4\pi^2} = 0,162 kg$

3) $x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi)$ avec $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 5\pi rad.s^{-1}$

A $t=0$; $x = X_m \sin \varphi = 0 \Rightarrow \sin \varphi = 0 \Rightarrow \varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$ or $v_0 > 0 \Rightarrow \varphi = 0$ d'où
 $x(t) = 5.10^{-2} \sin(5\pi t)$

4) a- L'équation différentielle devient : $m \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{hdx}{dt} + kx = 0$

b- b_1 : c'est le régime pseudo périodique car l'amplitude des oscillations diminue au cours du temps.

b_2 : Après $1T$: $x_1 = x_0 - \frac{2}{10} X_0 = \frac{8}{10} X_0$

Après $2T$: $x_2 = x_1 - \frac{2}{10} X_1 = \frac{8}{10} X_1 = \frac{8}{10} \left(\frac{8}{10} X_0 \right) = 0,64 X_0 = 3,2 cm$

b_3 : Lorsque x est extrême $v=0$ d'où $E_m = \frac{1}{2} k X_m^2$

$$\Delta E_m = E_{m_2} - E_{m_1} = \frac{1}{2} k [X_2^2 - X_0^2]$$

AN $\Delta E_m = \frac{1}{2} \times 40 [(3,2.10^{-2})^2 - (5.10^{-2})^2] = -2,95.10^{-2} J$



1)a- $E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2$

b- $E_m = C^{te} \Rightarrow \frac{dE_m}{dt} = 0 \Rightarrow kxv + mva = 0$

$v \left[kx + m \frac{d^2x}{dt^2} \right] = 0$ or $v \neq 0 \Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$

c- Le solide s est en mouvement rectiligne sinusoïdal puisque l'équation différentielle précédente admet une solution de la forme :

$$x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi) \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$2) a- E_p = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kX_m^2 \sin^2(\omega_0 t + \varphi) \text{ or}$$

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2} \text{ d'où } E_p = \frac{1}{4} kX_m^2 [1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi)]$$

b-

$$E_m = E_C + E_m = C^{te} \text{ or lorsque } x = \pm X_m \Rightarrow v = 0 \Rightarrow E_C = 0 \text{ d'où } E_m = \frac{1}{2} kX_m^2$$

$$c- k = \frac{2E_m}{X_m^2} = \frac{2 \times 2 \cdot 10^{-2}}{(5 \cdot 10^{-2})^2} = 16 \text{ N.m}^{-1}$$

$$d- T = 0,4 \text{ s} \Rightarrow T_0 = 2T = 0,8 \text{ s}$$

$$e- T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow m = \frac{kT_0^2}{4\pi^2} = \frac{16 \times 0,8^2}{4\pi^2} = 0,259 \text{ kg}$$

$$3) x(t) = X_m \sin(\omega_0 t + \varphi); \omega_0 = \frac{2\pi}{T_0} = 2,5\pi \text{ rad.s}^{-1}$$

A t=0

$$X_m \sin \varphi = -X_m \Rightarrow \sin \varphi = -1 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2} \text{ rad} \text{ d'où } x(t) = 5 \cdot 10^{-2} \sin(2,5\pi t - \frac{\pi}{2})$$

4) Au passage par la position d'équilibre la vitesse est maximale $\Rightarrow v = \pm V_m$

Lorsque v est réduite à la moitié de sa valeur maximale $\Rightarrow v = \pm \frac{1}{2} V_m$

La vitesse est liée à la position x par $v = \pm \omega_0 \sqrt{X_m^2 - x^2}$ et $V_m = \omega_0 X_m$

$$v^2 = \omega_0^2 (X_m^2 - x^2);$$

$$\frac{V_m^2}{4} = \omega_0^2 (X_m^2 - x^2);$$

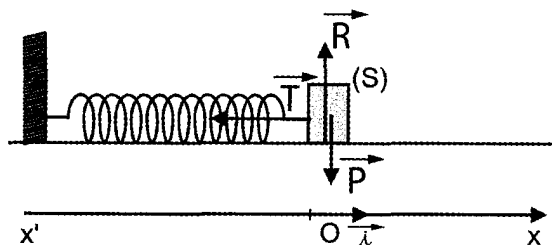
$$\frac{\omega_0^2 X_m^2}{4} = \omega_0^2 X_m^2 - \omega_0^2 x^2$$

$$x^2 = X_m^2 - \frac{1}{4} X_m^2 = \frac{3}{4} X_m^2$$

$$x = \pm \frac{X_m}{2} \sqrt{3} \quad \text{AN} \quad x = \pm 4,33 \text{ cm}$$



1) *système $\{s\}$



*Bilan des forces : $\vec{P}$: poids

$\vec{T}$: tension du ressort

$\vec{R}$: réaction du plan

$$RFD : \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$$

$$-kx = ma = m \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0}$$

$$2) \text{ a- } v = \frac{dx}{dt} = X_m \omega_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_x)$$

$$= X_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi_x + \frac{\pi}{2})$$

$$= V_m \sin(\omega_0 t + \varphi_v)$$

$$\text{d'où } \boxed{V_m = X_m \omega_0} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi_v = \varphi_x + \frac{\pi}{2}}$$

$$\text{b- } T_0 = 0,5 \text{ s; } V_m = 0,2 \pi \text{ m.s}^{-1}$$

$$\text{A } t = 0; \quad V = V_m = V_m \sin \varphi_v \Rightarrow \sin \varphi_v = 1 \Rightarrow \varphi_v = \frac{\pi}{2}$$

$$c- X_m = \frac{V_m}{\omega_0} = \frac{V_m}{\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)} = \frac{V_0 \cdot T_0}{2\pi} = 0,05\text{m} = 5\text{cm}$$

$$\varphi x = \varphi_v - \frac{\pi}{2} = 0\text{rad}$$

$$x(t) = 0,05 \sin 4\pi t$$

$$3) E = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{dE}{dt} = mv \frac{dv}{dt} + kx \frac{dx}{dt} = v(ma + kx) = 0 \rightarrow \frac{dE}{dt} = 0 \Rightarrow E = C^{te} :$$

$\Rightarrow E = C^{te}$ L'énergie se conserve.

4) a - $E = C^{te} \Rightarrow$ la courbe ζ_1 correspond à $e = f(x)$ donc la courbe ζ_2 correspond à $E_p = f(x)$

$$b- E = E_c + E_p = E_{p_{\max}} = \frac{1}{2}kX_m^2 \Rightarrow k = \frac{2E}{X_m^2} \quad \text{AN } k = 20\text{N.m}^{-1}$$

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \boxed{m = \frac{k}{\omega_0^2}} \quad \text{AN} \quad m = 0,127\text{kg}$$

$$c- E_c = E - E_p \quad \text{avec} \quad \begin{cases} E = 0,025\text{J} \\ E_p = 0,016\text{J} \end{cases} \quad \text{donc} \quad E_c = 0,009\text{J}$$

$$5) a- \text{RFD: } \vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f} = m\vec{a}$$

$$\text{Projection : } -kx - hv = ma$$

$$\Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{h}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x = 0$$

$$\text{Par identification terme à terme : } \frac{h}{m} = 4,96\text{s}^{-1}$$

$$\rightarrow h = 4,96m = 0,63\text{kg.s}^{-1}$$

b-Régime pseudo périodique :

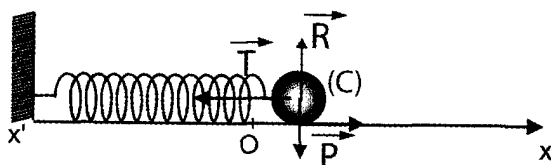
$$\Delta E_m = E_{m_2} - E_{m_1} = \frac{1}{2}k(X_{m_2}^2 - X_{m_1}^2)$$

$$= \frac{1}{2} \times 20 \left[(1,25 \cdot 10^{-2})^2 - (5 \cdot 10^{-2})^2 \right] = -2,34 \cdot 10^{-2} \text{ J}$$

5

I- 1) a-

- système {C}
- Les forces $\vec{P}, \vec{R}_N, \vec{T}$
- RFD : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} = m\vec{a}$



$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2} \Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0 \quad ; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\text{b- } x = X_m \omega_0 \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad ; \quad \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x$$

$$= -\omega_0^2 x + \omega_0^2 x = 0$$

$$= V_m \sin(\omega_0 t + \varphi) \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$2) \text{ a- } \pi_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{\pi_0} \Rightarrow \omega_0 = \frac{2\pi}{\pi_0} = \frac{2\pi}{\pi/10} = 20 \text{ rad s}^{-1}$$

$$x_0 = -3 \text{ cm}$$

$$X_m = 6 \text{ cm}$$

$$\cos \varphi = \frac{x_0}{X_m} = -\frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} \varphi = -\frac{\pi}{6} \text{ rad} \\ \text{ou} \\ \varphi = -\frac{5\pi}{6} \text{ rad} \end{cases}$$

$$v_0 = X_m \cos \varphi < 0 \Rightarrow \cos \varphi < 0 \Rightarrow \varphi = -\frac{5\pi}{6} \text{ rad}$$

$$b- x = 6.10^{-2} \sin\left(20t - \frac{5\pi}{6}\right)$$

$$c- v_0 = 6.10 - 2 \times 20 \cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) = -1,039 ms^{-1}$$

II-

$$1) a- E_{pe} = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{4} kX_m^2 \cos(2\omega_0 t + 2\varphi)$$

$$\omega' = 2\omega_0$$

$$A = \text{cte} ; f(t) \text{ est sinusoïdale de } T' = \frac{T_0}{2}$$

$$b- T_{Epe} = \frac{T_0}{2} = \frac{\pi}{20} = 0,157 s$$

$$2) E = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} mv^2$$

$$\frac{dE}{dt} = kxx' + mvv' = \underbrace{V\left(kx + m \frac{d^2x}{dt^2}\right)}_0 = 0$$

$$\Rightarrow E = \text{cte}$$

$$3) E_{pe_{\max}} = \frac{1}{2} mX_m^2 \omega_0^2 \Rightarrow m = 0,1 kg$$

$$E_{pe_{\max}} = \frac{1}{2} kX_m^2 \Rightarrow k = 40 Nm^{-1}$$

4)

