

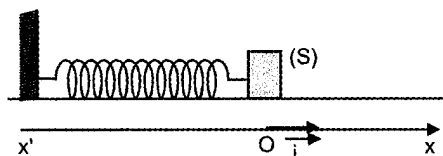
Enoncé



Un pendule élastique horizontal est formé par un solide de masse $m = 0,1 \text{ kg}$ lié à un ressort à spires non jointives de masse négligeable et de raideur $k = 25,6 \text{ N.m}^{-1}$.

Le pendule est soumis à une force excitatrice $\vec{F}$ horizontale de valeur algébrique $F = 3 \sin(\omega t)$ et à une force de frottement $\vec{f} = -h\vec{v}$ avec $h = 1,4 \text{ kg.s}^{-1}$.

La réponse est de la forme : $x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi)$

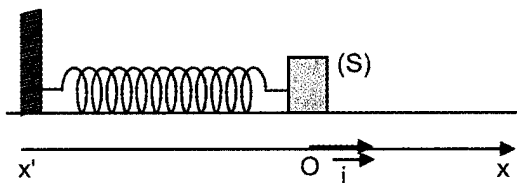


1) Pour une pulsation $\omega = 20 \text{ rad.s}^{-1}$, le solide (S) prend un mouvement sinusoïdal d'amplitude X_m .

- Etablir l'équation différentielle de l'oscillateur avec la variable x .
 - Calculer la pulsation propre de l'oscillateur.
 - Construire son diagramme de Fresnel.
 - En déduire la valeur de X_m et établir l'équation horaire du mouvement de (S).
- 2) Pour une pulsation ω_1 de l'excitateur, X_m prend sa valeur maximale X_1 .
- Préciser l'état d'oscillation du pendule élastique.
 - Calculer ω_1 et X_1 .
- 3) On fixe $\omega = 16 \text{ rad.s}^{-1}$
- Montrer que le pendule élastique est en état de résonance de vitesse.
 - Etablir l'expression de la vitesse instantanée du (s).
 - Représenter sur le même graphique les fonctions $F(t)$ et $f(t)$.
 - Montrer que l'énergie mécanique du système est constante, calculer sa valeur.



Un pendule élastique horizontal est formé par un solide de masse $m = 0,2 \text{ kg}$ lié à un ressort à spires non jointives de masse négligeable et de raideur $k = 45 \text{ N.m}^{-1}$.



Le pendule est soumis à une force excitatrice $\vec{F}$ horizontale $\vec{F} = 1,2 \sin(\omega t) \vec{i}$

et à une force de frottement $\vec{f} = -0,75\vec{v}$.

($\vec{v}$ étant la vitesse instantané de (S)).

L'abscisse du solide (S) dans le repère (O, $\vec{i}$) est $x = X_m \sin(\omega t + \varphi_x)$

1) Etablir l'équation différentielle de l'oscillateur relative à x .

2) Représenter le diagramme de Fresnel et en déduire les expressions de x_m et de $\tan \Delta\varphi$.

3) En modifiant ω , on constate que l'amplitude X_m passe par une valeur maximale pour une pulsation ω_1 .

a- Préciser l'état d'oscillation du système.

b- Etablir l'expression de la pulsation à la résonance ω_r en fonction de ω_0 , h et m .

c- En déduire l'expression de la fréquence à la résonance N_r en fonction de N_0 , h et m .

d- Calculer ω_1 et N_r .

e- Montrer que $(X_m)_r$ s'écrit sous la forme : $(X_m)_r = \frac{Fm}{h\sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{4m^2}}}$.

Calculer sa valeur

4) Représenter l'allure de la courbe de résonance d'amplitude dans chacun des cas suivants :

- h faible
- h important
- Que se passe-t-il si $h=0$?



Un oscillateur est formé d'un solide (S) supposé ponctuel de masse $m = 0,1 \text{ kg}$ accroché à un ressort horizontal de constante de raideur $k = 40 \text{ N.m}^{-1}$. Le solide (S) est soumis à une force excitatrice horizontale $\vec{F} = 4 \sin(\omega t) \vec{i}$ avec $\vec{i}$ dirigé suivant le mouvement de (S).

On considère le repère (O, $\vec{i}$) avec O position d'équilibre de (S). Au cours de son mouvement, (S) est soumis à une force de frottement visqueux $\vec{f} = -1,2\vec{v}$.

1) Etablir l'équation différentielle de l'oscillateur relative à x .

2) La solution de cette équation différentielle est : $x = X_m \sin(\omega t + \varphi_x)$

a- Représenter le diagramme de Fresnel pour $\omega = 10 \text{ rad.s}^{-1}$.

b- En déduire les expressions de X_m et de $\tan(\varphi_x - \varphi_F)$.

3) a- Etablir l'expression de la pulsation ω_r pour la quelle l'amplitude X_m prend sa valeur maximale en fonction K , m et h . Calculer ω_r et la valeur de X_m correspondante.

b- En déduire la valeur limite de h pour la quelle il n'y a pas résonance d'amplitude.

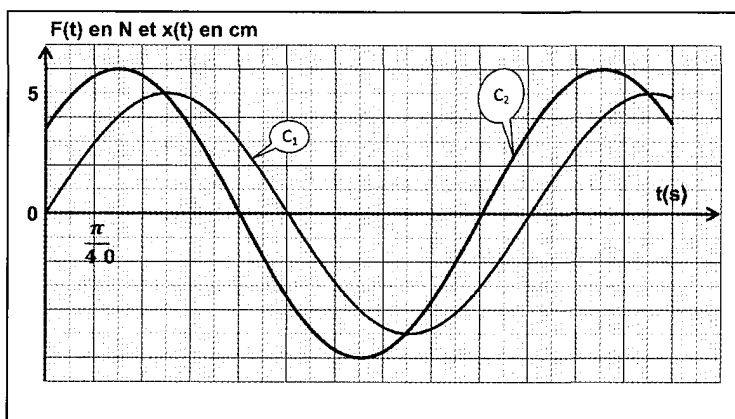
4) Pour $\omega = 20 \text{ rad.s}^{-1}$

- a- Etablir l'expression de la vitesse instantanée du solide (S).
- b- Déterminer le déphasage entre la force excitatrice et la vitesse. Que peut-on dire de l'état de l'oscillateur ?
- c- Calculer la puissance moyenne dissipée par l'oscillateur.



Un solide (S) de masse $m = 0,2 \text{ kg}$ est accroché à un ressort horizontal de raideur $K = 30 \text{ N.m}^{-1}$. il est soumis à une force de frottement $\vec{f} = -h \vec{V}$ et une force excitatrice $F = F_m \sin(\omega t + \varphi_F)$ de pulsation ω variable.

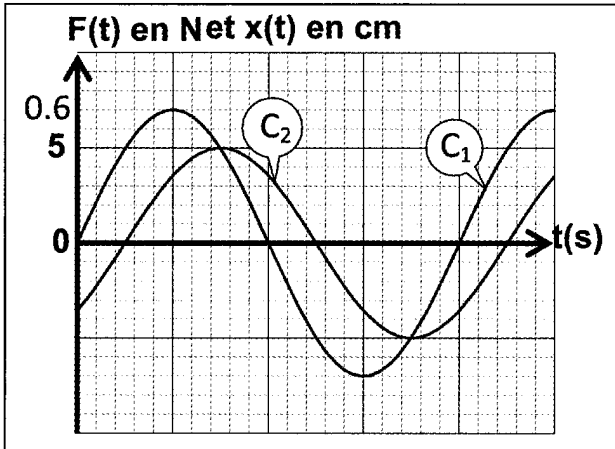
- 1) Etablir l'équation différentielle du mouvement relative à l'élongation x dont la solution est : $x = X_m \sin(\omega t + \varphi_x)$.
- 2) Les courbes $x(t)$ et $F(t)$ sont données par le graphe ci-dessous.
 - a- Laquelle des deux courbes représente $x(t)$?
 - b- Déterminer la pulsation ω le déphasage de F par rapport à x : $\Delta\varphi = \varphi_F - \varphi_x$.
 - c- Ecrire l'équation horaire $x(t)$ du mouvement du solide.
- 3) a- Faire la construction de Fresnel correspondante
- b- En déduire les valeurs de F_m et h .
- c- Ecrire l'expression de $F(t)$.



Un pendule élastique horizontal est constitué d'un ressort de raideur K lié à un solide (S) de masse $m = 50 \text{ g}$. Au cours des oscillations (S) est soumis à une force de frottement visqueux de la forme

$\vec{f} = -h \vec{V}$, où h est une constante positive et $\vec{V}$ le vecteur vitesse de (S), et à une force excitatrice $\vec{F}(t) = F_m \sin(6t) \cdot \vec{i}$.

Un dispositif approprié permet d'enregistrer les courbes de la figure ci- contre représentant $F(t)$ et $x(t)$.

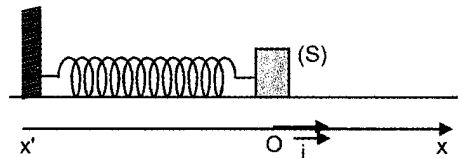


- 1) Préciser le rôle joué par l'excitateur.
- 2) a- Identifier chacune des deux courbes. Déterminer les expressions de $x(t)$ et $F(t)$.
b- En déduire l'expression de $v(t)$.
- 3) a- Etablir l'équation différentielle, en v , de l'oscillateur.
b- Faire la construction de Fresnel, et en déduire les valeurs de h et K .
c- Exprimer le rapport $\frac{F_m}{V_m}$ en fonction de h , K et m . Déduire l'expression de son analogie électrique et en donnera la signification physique.
- 4) On agit sur la pulsation ω , tout en gardant F_m constante, de manière à rendre $F(t)$ en quadrature avance de phase sur $x(t)$.
a- Montrer que l'oscillateur est le siège d'une résonance de vitesse.
b- Calculer la valeur de ω
c- Exprimer, puis calculer la puissance mécanique moyenne consommée par l'oscillateur. Que peut- on conclure ?
d- Faut-il augmenter ou diminuer ω pour avoir la résonance d'élongation ?



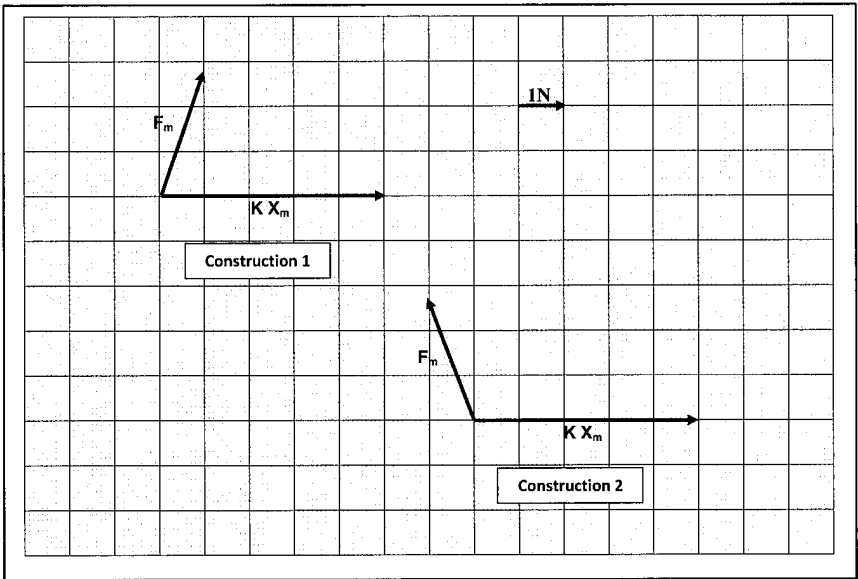
Un oscillateur mécanique est constitué d'un solide (S) de masse $m = 0,1\text{kg}$, attaché à l'extrémité d'un ressort (R) horizontal, à spires non jointives de masse négligeable et de raideur $K = 40\text{N.m}^{-1}$.

À l'équilibre, le centre d'inertie G de (S) coïncide avec l'origine O du repère $(O, \vec{i})$.



Le solide (S) est soumis à une force de frottement visqueux $\vec{f}$ portée par l'axe (x'x), opposée au mouvement de (S) et telle que $\vec{f} = -h \cdot \vec{v}$, où h est une constante positive et $\vec{v}$ est le vecteur vitesse instantanée du centre d'inertie G.
 Les oscillations de (S) sont imposées à l'aide d'une force excitatrice $\vec{F} = F_m \sin \omega t \vec{i}$.

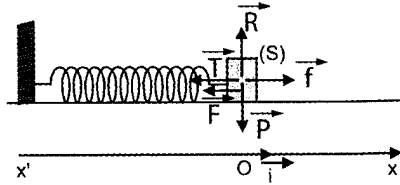
- 1) Etablir l'équation différentielle de l'oscillateur relative à x .
- 2) La solution de cette équation différentielle est de la forme $x = X_m \sin(\omega t + \varphi)$.
 - a- Faire la construction de Fresnel et en déduire les expressions de X_m et de φ .
 - b- En déduire l'expression de la vitesse maximale V_m du centre d'inertie du solide.
- 3) Pour une pulsation $\omega = \omega_1$, on constate que X_m prend sa valeur la plus élevée.
 - a- Préciser l'état de l'oscillateur.
 - b- Etablir l'expression de ω_1 en fonction de ω_0 , h et m .
 - c- En déduire l'expression de X_m en fonction de F_m , ω_0 , h et m .
- 4) On donne pour $\omega = \omega_1$ deux constructions de Fresnel incomplètes.



- a- Laquelle des deux constructions de Fresnel est celle qui traduit les oscillations de (S).
- b- Compléter la construction de Fresnel correspondante et en déduire les valeurs de : F_m , X_m , ω_1 , h et φ .

- 5) a- Tracer l'allure des variations de l'amplitude X_m en fonction de la pulsation ω on notera la position de la pulsation ω_1 par rapport à la pulsation propre ω_0 .
b- Quel est l'effet d'une augmentation de l'amortissement sur l'allure de cette courbe ?
- 6) En faisant l'analogie mécanique-électrique.
a- Faire la construction de Fresnel relative au circuit électrique pour $\omega = \omega_1$, en précisant si le circuit équivalent est inductif, capacitif ou résistif.
b- Le circuit est en état de résonance. De quelle résonance s'agit-il ?
c- Donner l'expression de la charge maximale Q_m du condensateur en fonction de : R, L, C, ω et U_m , puis en fonction de : U_m, R, L et ω_0

Corrigé



$$1) \text{ a- RFD : } \vec{P} + \vec{T} + \vec{R} + \vec{f} = m\vec{a}$$

Projection sur $(O, \vec{i})$

$$T + F + f = ma$$

$$-kx - hv + F = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = F_m \sin(\omega t)$$

$$\text{b- } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 16 \text{ rad.s}^{-1} = 16 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\text{c- } \text{sol}^\circ \quad x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi_x)$$

$$\omega_0 < \omega \Leftrightarrow \frac{k}{m} < \omega^2 \Leftrightarrow k < \omega^2 m$$

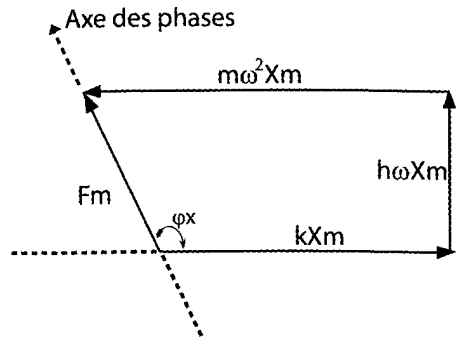
$$-\pi < \varphi_x < -\frac{\pi}{2}$$

$$\begin{aligned} \text{d- } F_m^2 &= (h\omega X_m)^2 + (m\omega^2 X_m - kX_m)^2 \\ &= X_m^2 [h^2\omega^2 + (m\omega^2 - k)^2] \end{aligned}$$

$$F_m = X_m \sqrt{h^2\omega^2 + (m\omega^2 - k)^2}$$

$$2) X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2\omega^2 - (k - m\omega^2)^2}}$$

$$\text{AN } X_m = \frac{3}{\sqrt{(1,4 \times 20)^2 + (25,6 - 0,1 \times 20^2)^2}} = 9,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$



$$\operatorname{tg}(\varphi_x - \varphi_F) = \frac{h\omega}{m\omega^2 - k} = \frac{1,4 \times 20}{0,1 \times 20^2 - 25,6} = 1,94$$

$$\Rightarrow \varphi_x - \varphi_F = 1,09 \text{ rad} \quad \text{ou} \quad \varphi_x - \varphi_F = \pi + 1,09 = 4,24 \text{ rad}$$

$$\text{or} \quad -\pi < \varphi_x - \varphi_F < -\frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_x - \varphi_F = 4,24 \text{ rad}$$

$$\varphi_F = 0 \Rightarrow \varphi_x = 4,24 \text{ rad} = -2,05 \text{ rad}$$

$$\text{d'où } x(t) = 9,5 \cdot 10^{-2} \sin(20t - 2,05)$$

2) a- Lorsque X_m prend sa valeur la plus grande c'est la résonance d'élongation (ou d'amplitude)

b- A la résonance d'élongation X_m est maximale

$$\Rightarrow \sqrt{h^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2} \text{ est minimale}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\omega} [h^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2] = 0$$

$$\Leftrightarrow 2h^2\omega + 2(2m\omega)(m\omega^2 - k) = 0$$

$$\omega \neq 0 \Rightarrow h^2 + 2m^2\omega^2 - 2mk = 0$$

$$\Rightarrow 2m^2\omega^2 = 2mk - h^2$$

$$\omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}$$

$$\omega_1 = \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}}$$

$$\text{AN } \omega_1 = 12,57 \text{ rad}$$

$$X_1 = X_{mr} = \frac{F_m}{\sqrt{h^2\omega_1^2 + (k - m\omega_1^2)^2}} = 14,9 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

3) a- $\omega = \omega_0$

$$V_m = \omega X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 + \left(\frac{k}{\omega} - m\omega\right)^2}}$$

Lorsque $\omega = \omega_0 \Rightarrow \frac{k}{\omega} - m\omega = 0 \Rightarrow V_m = \frac{F_m}{h}$ est maximale : c'est la résonance de vitesse.

$$\text{b- } v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega X_m \cos(\omega t + \varphi_x)$$

$$v(t) = V_m \sin(\omega t + \varphi_v) \quad \text{avec} \quad V_m = \omega X_m = \frac{F_m}{h} = 2,14 \text{ m.s}^{-1}$$

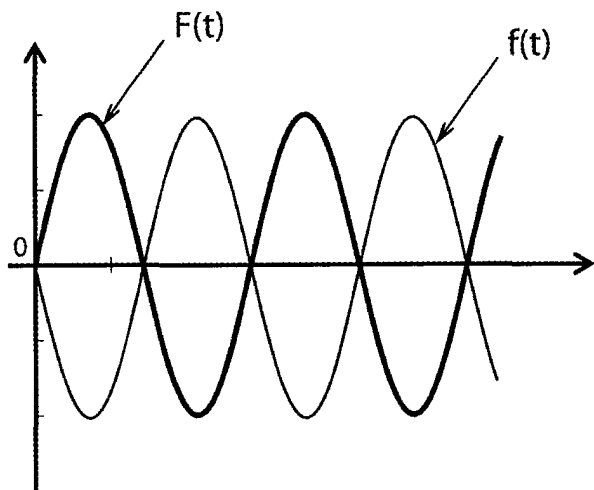
et $\varphi_v = \varphi_x + \frac{\pi}{2} = 0$ puisque pour $\omega = \omega_0 \Rightarrow \varphi_x = -\frac{\pi}{2}$ d'où

$$v(t) = 2,14 \sin(16t)$$

c- $F(t) = 3 \sin 16t$

$$f(t) = -h v = -1,4 \times 2,14 \sin 16t = -3 \sin 16t = 3 \sin(16t + \pi)$$

$F(t)$ et $f(t)$ sont en opposition de phase



RQ: $F(t) + f(t) = 0$

l'équation différentielle devient: $m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx = 0$

d- $E_m = E_c + E_p$

$$E_m = \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2} k x^2$$

$$\frac{dE_m}{dt} = m v a + k x v$$

$$= v \left(m \frac{d^2 x}{dt^2} + kx \right) = 0$$

$$E_m = c^{te}$$

Pour $x=0 \Rightarrow V = V_m = 2,14 \text{ m.s}^{-1}$

$$E_m = \frac{1}{2} m V_m^2 = \frac{1}{2} \times 0,1 \times (2,14)^2$$

$$\text{AN } E_m = 0,229 \text{ J}$$

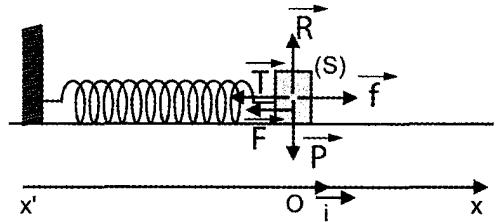


1) RFD :

$$\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} + \vec{f} + \vec{F} = m\vec{a}$$

projection sur $(o, \vec{i})$

$$T + f + F = ma \Rightarrow m \frac{d^2 x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$



2) Pour $\omega < \omega_0$ La construction de

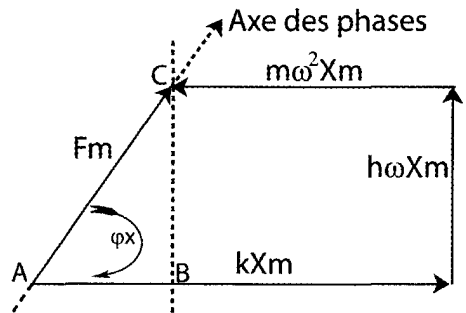
Fresnel est la suivante :

En appliquant Pythagore au triangle

ABC on obtient

$$X_m = \frac{F_m}{\sqrt{(h\omega)^2 + (k - m\omega^2)^2}}$$

$$\text{tg}(\varphi_x - \varphi_F) = \frac{h\omega}{m\omega^2 - k}$$



3) a/ Lorsque X_m est maximale : c'est la résonance d'élongation (ou d'amplitude).

b- X_m est maximale $\Rightarrow \sqrt{(h\omega)^2 + (k - m\omega^2)^2}$ est minimale

$$\Rightarrow \frac{d}{d\omega} [(h\omega)^2 + (k - m\omega^2)^2] = 0$$

$$\Rightarrow 2h^2\omega + 2(-2m\omega)(k - m\omega^2) = 0$$

$$\text{or } \omega \neq 0 \Rightarrow h^2 - 2mk + 2m^2\omega^2 = 0$$

$$\omega_r^2 = \frac{k}{m} - \frac{h^2}{2m^2} \quad \text{or} \quad \frac{k}{m} = \omega_0^2$$

$$d'ou \quad \omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2} \Rightarrow \omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}}$$

c- $\omega_r = 2\pi N_r$ et $\omega_0 = 2\pi N_0$

$$\Rightarrow 4\pi^2 N_r^2 = 4\pi^2 N_0^2 - \frac{h^2}{2m^2} \Rightarrow N_r^2 = N_0^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m^2}$$

soit alors $N_r = \sqrt{N_0^2 - \frac{h^2}{8\pi^2 m^2}}$

d- $\omega_1 = \omega_r = \sqrt{\frac{45}{0,2} - \frac{0,75^2}{2 \times 0,2^2}} = 14,76 \text{ rad.s}^{-1}$

$N_r = \frac{\omega_r}{2\pi} = 2,35 \text{ Hz}$

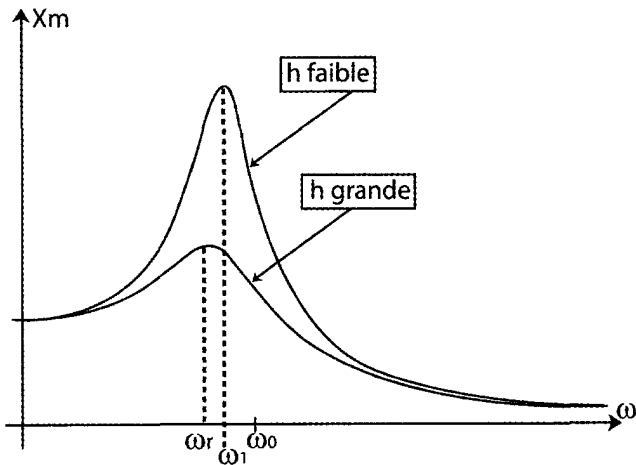
e-
$$X_{mr} = \frac{F_m}{\sqrt{(h\omega_r)^2 + (k - m\omega_r^2)^2}}$$

$$= \frac{F_m}{\sqrt{h^2(\omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}) + (m\omega_0^2 - m(\omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}))^2}}$$

$$= \frac{F_m}{\sqrt{h^2\omega_0^2 - \frac{h^4}{2m^2} + \frac{h^4}{4m^2}}}$$

$$= \frac{F_m}{h\sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{4m^2}}}$$

AN $X_{mr} = \frac{1,2}{0,75\sqrt{15^2 - \frac{0,75^2}{4 \times 0,2^2}}} = 10,75 \cdot 10^{-2} \text{ m}$



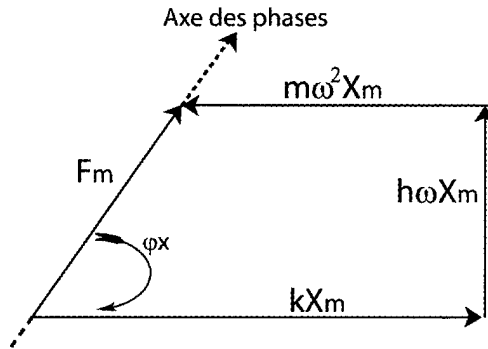
si $h=0$ $X_{mr} \rightarrow \infty$: c'est la rupture du ressort.



1) L'équation différentielle relative à x s'écrit $m \frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$

2) $\omega = 10 \text{ rad.s}^{-1}$; $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 20 \text{ rad.s}^{-1}$

a- $\omega < \omega_0$ D'où la construction du Fresnel.



b-
$$X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2}}$$

$$\text{tg}(\varphi_x - \varphi_F) = \frac{h\omega}{m\omega^2 - k}$$

3) a- X_m prend sa valeur maximale à la résonance d'élongation $\Rightarrow \sqrt{h^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2}$ est minimale.

$$\Rightarrow \frac{d}{d\omega} [(h\omega)^2 + (k - m\omega^2)^2] = 0$$

$$2h^2\omega - 2(2m\omega)(k - m\omega^2) = 0$$

$$\omega \neq 0 \Rightarrow h^2 - 2mk + 2m^2\omega_r^2 = 0$$

soit alors
$$\omega_r^2 = \frac{k}{m} - \frac{h^2}{2m^2}$$

$$\omega_r = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{h^2}{2m^2}}$$

AN
$$\omega_r = 18,11 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$X_{mr} = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 \omega_r^2 + (k - m\omega_r^2)^2}} = \frac{F_m}{h \sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{4m^2}}}$$

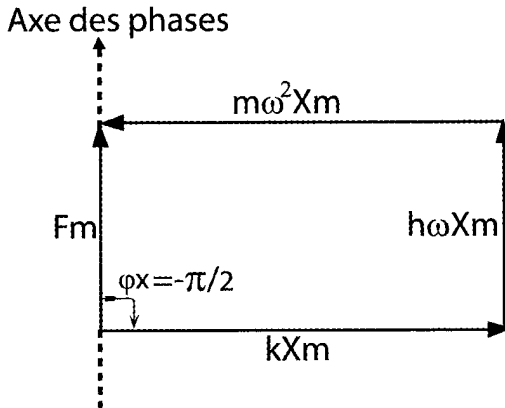
$$X_{mr} = \frac{4}{1,2 \sqrt{20^2 - \frac{1,2^2}{4 \times 0,1^2}}} = 17,47 \cdot 10^{-2} m$$

$$b- \omega_r^2 > 0 \Rightarrow \frac{k}{m} - \frac{h^2}{2m^2} > 0 \Rightarrow h < m\omega_0 \sqrt{2} = 2\sqrt{2} kg \cdot s^{-1}$$

$$h < h_2 = 2\sqrt{2} kg \cdot s^{-1}$$

$$4) a- \text{ Pour } \omega = \omega_0 = 20 \text{ rad} \cdot s^{-1}$$

La construction de Fresnel devient :



$$v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega X_m \cos(\omega t + \varphi_x)$$

$$= V_m \sin(\omega t + \varphi_v) \text{ avec } V_m = \omega X_m = \frac{F_m}{h} = 3,33 m \cdot s^{-1}$$

$$\text{et } \varphi_v = \varphi_x + \frac{\pi}{2} = 0$$

$$\text{D'où } v(t) = 3,33 \sin 20t$$

b- $\varphi_v - \varphi_F = 0 \Rightarrow v(t)$ et $F(t)$ sont en phases c'est la résonance de vitesse.

$$c- P_m = \frac{F_m V_m}{2} \cos(\varphi_v - \varphi_F) = \frac{4 \times 3,33}{2} = 6,66 W$$



1) RFD : $\vec{P} + \vec{T} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f} = m\vec{a}$

par projection sur (x'x) on obtient :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

2)a- $x(t)$ est toujours en retard de phase par rapport à $F(t)$ d'où la courbe C_1 représente $x(t)$.

b- $\omega = \frac{2\pi}{T}$ avec $T = \frac{\pi}{4} s$

$$\Rightarrow \omega = 8 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\Delta\varphi = \varphi_F - \varphi_x = \omega \Delta t = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{10} = \frac{\pi}{5} \text{ rad}$$

c- $x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi_x)$

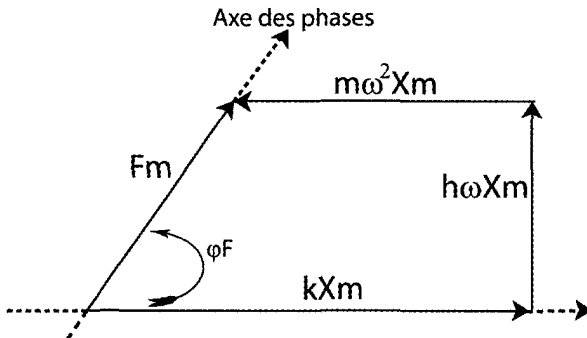
D'après le graphe $X_m = 5 \text{ cm}$

A $t = 0$ $x = 0 \Rightarrow \sin \varphi_x = 0 \Rightarrow \varphi_x = 0$ ou $\varphi_x = \pi$

or x est croissante $\Rightarrow \cos \varphi_x > 0$ d'où $\varphi_x = 0$

ainsi $x(t) = 5 \cdot 10^{-2} \sin(8t)$

3) a- $\omega = 8 \text{ rad.s}^{-1} < \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 12,25 \text{ rad.s}^{-1}$



b- $\cos \varphi_F = \frac{kX_m - m\omega^2 X_m}{F_m} \Rightarrow F_m = \frac{kX_m - m\omega^2 X_m}{\cos \varphi_F}$

$$= \frac{30 \times 5.10^{-2} - 0,2 \times 8^2 \times 5.10^{-2}}{\cos\left(\frac{\pi}{5}\right)}$$

$$AN \quad F_m = 1,06 N$$

$$\sin \varphi_F = \frac{h\omega X_m}{F_m} \Rightarrow h = \frac{F_m \sin \varphi_F}{\omega X_m}$$

$$AN \quad h = \frac{1,06 \times \sin\left(\frac{\pi}{5}\right)}{8 \times 5.10^{-2}} = 1,56 \text{ kg.s}^{-1}$$

$$d- \quad F(t) = F_m \sin(\omega t + \varphi_F)$$

$$F(t) = 1,06 \sin\left(8t + \frac{\pi}{5}\right)$$



1) L'excitateur fournit de l'énergie au résonateur qui se met à osciller non pas avec sa fréquence propre mais avec une fréquence imposée par l'excitateur d'où les oscillations sont dites forcées.

2) a- $x(t)$ est toujours au retard de phase par rapport à $F(t)$ d'où ζ_2 représente $x(t)$ et C_1 représente $F(t)$.

$$F(t) = 0,6 \sin 6t$$

$$x(t) = X_m \sin(\omega t + \varphi_x)$$

$$X_m = 5.10^{-2} m$$

$$\omega = 6 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\varphi_F - \varphi_x = \omega \Delta t = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{T}{8} = \frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

$$\text{or } \varphi_F = 0 \Rightarrow \varphi_x = -\frac{\pi}{4} \text{ rad}$$

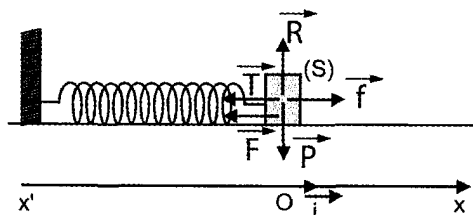
$$\text{d'où } x(t) = 5.10^{-2} \sin\left(6t - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$b- \quad v(t) = \frac{dx}{dt} = \omega X_m \cos(\omega t + \varphi_x)$$

$$= \omega X_m \sin(\omega t + \varphi_x + \frac{\pi}{2})$$

$$v(t) = 0,3 \sin(6t + \frac{\pi}{4})$$

3) a-



$$\text{RFD: } \vec{P} + \vec{T} + \vec{R} + \vec{f} + \vec{F} = m\vec{a}$$

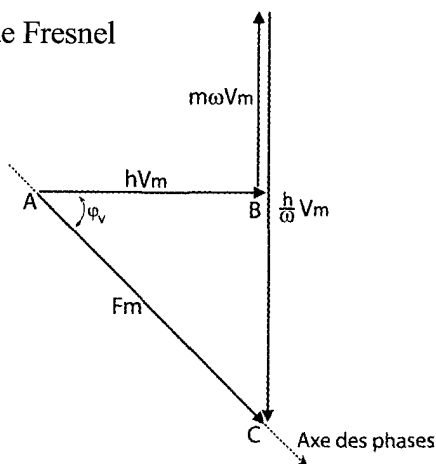
$$\text{Projection sur } (O, \vec{i}): T + f + F = ma$$

$$\Rightarrow -kx - hv + F = ma$$

$$\text{or } a = \frac{dv}{dt} \text{ et } x = \int v dt$$

$$\Rightarrow m \frac{dv}{dt} + k \int v dt + hv = F(t)$$

$$\text{b- } \varphi_v = \frac{\pi}{4} \text{ rad d'où la construction de Fresnel}$$



$$\cos \varphi_v = \frac{hV_m}{F_m} \Rightarrow h = \frac{F_m \cos \varphi_v}{V_m}$$

$$\text{AN } h = \frac{0,6\sqrt{2}}{2 \times 0,3} = \sqrt{2} \text{ kg.s}^{-1}$$

$$\sin \varphi_v = \frac{\frac{k}{\omega} V_m - m\omega V_m}{F_m} \Rightarrow k = \omega \left[\frac{F_m \sin \varphi_v}{V_m} + m\omega \right]$$

$$AN \quad k = 6 \left[\frac{0,6\sqrt{2}}{2 \times 0,3} + 0,05 \times 6 \right] = 10,28 N.m^{-1}$$

c- Dans la triangle ABC:

$$F_m^2 = h^2 V_m^2 + \left(\frac{k}{\omega} V_m - m\omega V_m \right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{F_m}{V_m} = \sqrt{h^2 + \left(\frac{k}{\omega} - m\omega \right)^2} = Z_{mec} : \text{impédance mécanique}$$

Mécanique	Electrique
x	q
v	i
m	L
k	$\frac{1}{C}$
h	R
F(t)	u(t)

$$D'où \frac{U_m}{I_m} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{C\omega} - L\omega \right)^2} = Z_{elec} : \text{impédance électrique}$$

$$4) \quad a- \quad \varphi_F - \varphi_x = \frac{\pi}{2} \quad \text{or} \quad \varphi_x = \varphi_v - \frac{\pi}{2}$$

$$D'où \quad \varphi_F - \varphi_v + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \varphi_F - \varphi_v = 0$$

$F(t)$ et $v(t)$ sont en phase $\Rightarrow$ c'est la résonance de vitesse

$$b- \quad \text{A la résonance de vitesse } \omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = 14,33 \text{ rad.s}^{-1}$$

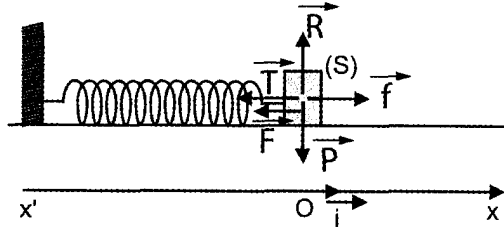
$$c- \quad P_m = \frac{F_m V_m}{2} \cos(\varphi_v - \varphi_F) = \frac{F_m F_m}{2h}$$

$$AN \quad P_m = 0,127 W$$

A la résonance de vitesse correspond une résonance de puissance.

d- Il faut diminuer ω à partir de ω_0 pour atteindre la résonance d'élongation car cette dernière est atteinte pour $\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}}$ soit alors

$$\omega_r < \omega_0.$$

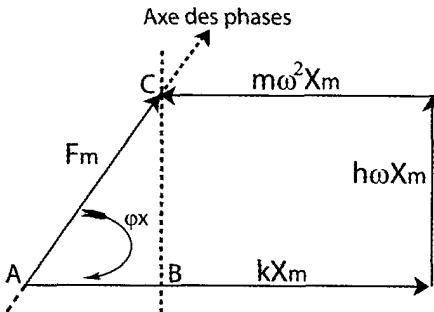


$$1) \text{ RFD : } \vec{P} + \vec{T} + \vec{R} + \vec{f} + \vec{F} = m\vec{a}$$

projection sur $(0, \vec{i})$:

$$T + f + F = ma \Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + kx = F(t)$$

2) a-



3) Dans le triangle ABC:

$$F_m^2 = (h\omega X_m)^2 + (kX_m - m\omega^2 X_m)^2$$

$$= X_m^2 [\omega^2 h^2 + (k - m\omega^2)^2]$$

$$d'où X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2\omega^2 + (k - m\omega^2)^2}}$$

$$\text{tg } \varphi = \frac{h\omega}{m\omega^2 - k} \text{ avec } \varphi = \varphi_x - \varphi_f$$

$$b/ V_m = \omega X_m = \frac{\omega F_m}{\sqrt{h^2 \omega^2 + (k - m\omega^2)^2}} = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 + (\frac{k}{\omega} - m\omega)^2}}$$

3) a- X_m est maximale : c'est la résonance d'élongation.

b- X_m est maximale $\Rightarrow \sqrt{h^2 \omega^2 + (k - m\omega^2)^2}$ est minimale

$$\Rightarrow \frac{d}{d\omega} [h^2 \omega^2 + (k - m\omega^2)^2] = 0$$

$$\Rightarrow 2h^2 \omega - 2(2m\omega)(k - m\omega^2) = 0$$

$$\omega \neq 0 \Rightarrow h^2 - 2mk + 2m^2 \omega^2 = 0$$

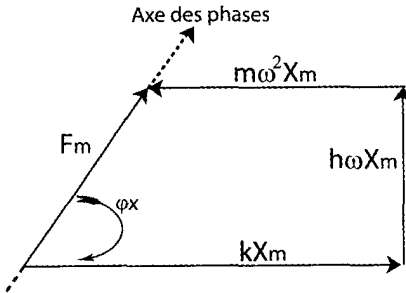
$$\text{soit alors } \omega_1^2 = \omega_r^2 = \omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}$$

$$\omega_1 = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{2m^2}}$$

$$c- X_m = \frac{F_m}{\sqrt{h^2 \omega_1^2 + (k - m\omega_1^2)^2}} = \frac{F_m}{h \sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{4m^2}}}$$

4) a- $\omega_1 < \omega_0$: c'est la construction 1 qui traduit les oscillations de (s)

b- D'après la construction



$$F_m = 4 \text{ N}$$

$$kX_m = 5 \text{ N}$$

$$\Rightarrow X_m = \frac{5}{k} = 12,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$$

$$m\omega_1^2 X_m = 3 \text{ N}$$

$$\Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{3}{mX_m}} = 15,49 \text{ rad.s}^{-1}$$

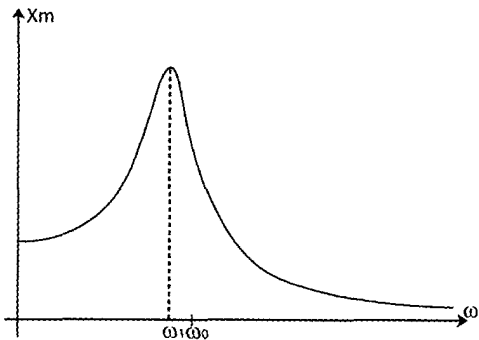
$$h\omega X_m = 3,5N$$

$$\Rightarrow h = \frac{3,5}{\omega_1 X_m} = 1,8kg.s^{-1}$$

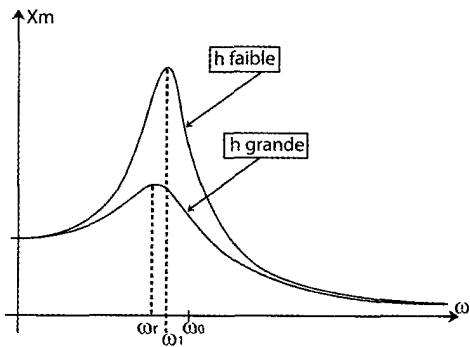
b-
$$\sin|\varphi_x| = \frac{h\omega X_m}{R_m} = 0,875$$

$$\Rightarrow \varphi_x = -1,06rad$$

5) a- si h augmente X_{mr} diminue et $\omega_r < \omega_0$



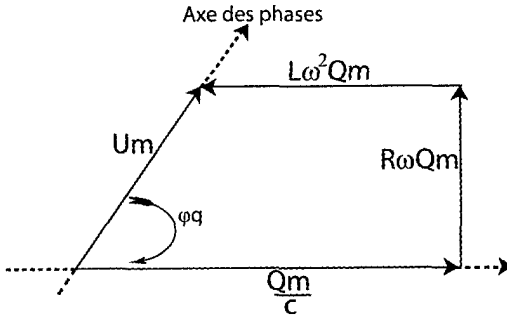
b- si h augmente X_{mr} diminue et $\omega_r < \omega_0$.



6)

a-

Mécanique	Electrique
x	q
v	i
m	L
k	$\frac{1}{C}$
h	R
F(t)	u(t)



$$\frac{1}{C} < L\omega^2 \Rightarrow \frac{1}{C\omega} > L\omega \Rightarrow \text{Le circuit est capacitif}$$

b- Le circuit est en état de résonance de charge.

$$c- Q_m = \frac{U_m}{\sqrt{R^2\omega^2 + \left(\frac{1}{C} - L\omega^2\right)^2}} = \frac{U_m}{R\sqrt{\omega_0^2 - \frac{R^2}{4L^2}}}$$