

ENONCES

1

Dans un sac sont placés dix jetons : six jetons portent le numéro 1, et les quatre autres le numéro 3.

On tire simultanément trois jetons du sac, les tirages étant supposés équiprobable, on désigne par X la variable aléatoire qui, à chaque tirage, fait correspondre la somme des numéros sur les trois jetons.

- Quelles sont les valeurs prises par X .
- Définir la loi de probabilité de X .
- Déterminer la probabilité de l'événement : « $X < 7$ ».

2

Un dé cubique A possède une de ses faces numérotés 2, les cinq autres étant numérotés 1. Un dé cubique B a ses faces numérotés 1, 2, 3, 4, 5, 6.

On suppose que chaque face de chaque dé a la même probabilité d'apparaître. On jette simultanément le dé A et le dé B.

Soit X la variable aléatoire réelle qui, à chaque lancer, associe la somme des points obtenus sur les faces supérieures des dés.

- Quelle est la loi de probabilité de X ?
- Quelle est la probabilité pour que la somme des points obtenus soit au moins égale à trois ?

3

On lance simultanément deux dés sur une table, l'un est cubique et ses faces sont numérotées 1, 2, 3, 4, 5 et 6, l'autre est tétraédrique et ses faces sont numérotées 1, 2, 3 et 4. On suppose que chacune des faces de chaque dé a la même probabilité d'apparition. On désigne par X la variable aléatoire qui à chaque lancer associe la valeur absolue de la différence des nombres figurant sur les deux faces en contact avec la table.

- Déterminer la loi de probabilité de X .
- Calculer l'espérance mathématique et la variance de X .

4

Une urne contient 9 boules blanches et une boule rouge.

1) Au cours de l'expérience qui consiste à extraire simultanément trois boules de l'urne, quelle est la probabilité d'obtenir la boule rouge ?

Tous les boules sont indiscernables au toucher.

2) L'expérience précédente est répétée 5 fois, avec remise à chaque fois dans l'urne, des trois boules qu'on a tirées.

Soit X le nombre de boules rouges obtenues au cours des cinq tirages. Déterminer la loi de probabilité de X , calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.

3) On extrait une première boule de l'urne, et on ne l'y remet que si elle est rouge. On extrait ensuite une deuxième boule de l'urne. Quelle est la probabilité qu'on obtienne une boule rouge au deuxième tirage ?

5 On lance cinq fois de suite un dé tétraédrique dont les quatre faces sont numérotées de 1 à 4. Les cinq lancers sont supposés indépendants.

Soit X la variable aléatoire indiquant le nombre des sorties du 4 en cinq lancers.

Déterminer la loi de probabilité de X et calculer son espérance mathématique.

6 Dans un sac sont placés dix jetons : six jetons portent le numéro 1 et les quatre autres les numéros 3. On tire simultanément trois jetons du sac. Soit A l'événement : « La somme des numéros sortis est strictement inférieure à 7 ».

a) Calculer la probabilité de l'événement A .

b) On recommence quatre fois de suite le tirage précédent en remettant à chaque fois dans le sac les jetons tirés.

Quelle est la probabilité pour que l'événement A se réalise exactement trois fois ? Au moins trois fois ?

7 Une urne contient 60 boules blanches et 40 boules noires.

On effectue dans cette urne des tirages successifs, avec remise de chaque boule après chaque tirage. On s'arrêtera à l'obtention d'une boule blanche. Les tirages sont indépendants.

A) Dans cette partie, on fera au maximum 4 tirages ; X est la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires à l'obtention de la première boule blanche.

Par convention, $X = 0$ si l'on n'obtient pas de boule blanche après les 4 tirages.

1) Calculer la probabilité pour que X prenne la valeur 0.

2) Calculer la probabilité pour que X prenne les valeurs 1, 2, 3, 4.

B) On procède maintenant à n tirages au maximum, n étant un entier naturel non nul.

1) Calculer la probabilité pour que X soit égal à K avec $1 \leq k \leq n$.

2) On considère le polynôme : $f(x) = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}$.

Soit $E(x)$ l'espérance mathématique de X .

Montrer $E(X) = \left(\frac{3}{5}\right) \cdot f\left(\frac{2}{5}\right)$

8 Soit $E\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$.

On écrit chacun des chiffres de l'ensemble E sur un jeton, et on place les dix jetons dans une urne.

On tire simultanément cinq jetons de l'urne. On suppose les conditions de tirage telles que tous les sous-ensembles de cinq chiffres de l'ensemble E ont la même probabilité d'être obtenus. Soit X la variable aléatoire qui à chaque tirage, associe la nombre de chiffres pairs portés par ces cinq jetons.

1) a) Déterminer la loi de probabilité de X .

b) Calculer la probabilité de l'événement $X < 3$ et de l'événement : $2 \leq X \leq 3$.

2) Calculer l'espérance et la variance de X .



On peint les six faces d'un cube de bois d'arête trois centimètres. On le débite, par traits de scie parallèles aux plans des faces, en vingt – sept petits cubes d'arête d'un centimètre. On place ces vingt – sept cubes dans un sac. On tire au hasard, et sans remise, deux cubes du sac, les tirages étant supposés équiprobables. Soit X la variable aléatoire réelle égale au nombre total de faces peintes que présentent les deux cubes tirés.

- Déterminer la loi de probabilité de X .
- Calculer l'espérance mathématique et l'écart type $\sigma(X)$ de X .



On dispose de deux dés cubiques. Toutes les faces ont la même probabilité d'apparaître. Le premier cube a cinq faces rouges et une face verte. Le deuxième cube a une face rouge, deux faces vertes et trois faces bleues.

1) On jette les deux dés. On regarde la couleur des faces supérieures de chaque dé. On note :

- A l'événement : « Les deux faces sont rouges ».
- B l'événement : « Les deux faces sont de la même couleur ».
- C l'événement : « L'une des faces est rouge et l'autre est verte ».
- D l'événement : « Les deux faces sont de couleurs différentes ».

Calculer les probabilités : $p(A)$; $p(B)$; $p(C)$ et $p(D)$.

2) A chaque jet de ces dés est associé un jeu qui permet :

- Un gain de 5^D si les deux faces sont rouges.
- Un gain de 2^D si les deux faces sont vertes,
- Une perte si les deux faces sont de couleurs différentes.

On note x le montant de cette perte. On définit une variable aléatoire X qui à chaque jet de deux dés, associe le gain ou la perte ainsi réalisés.

Déterminer $P(X = 5)$, $p(X = 2)$, $p(X = -x)$.

Un tel jeu est dit « équitable » lorsque l'espérance mathématique $E(X) = 0$;

Déterminer la valeur de x correspondante.



Une urne contient 6 boules noires et 4 boules blanches, toutes les boules sont indiscernables au toucher.

1) On tire successivement et sans remise 3 boules de l'urne.

Calculer la probabilité des événements suivants :

A : « La première boule tirée est noire et la seconde est blanche ».

B : « Les trois boules tirées sont de même couleur ».

2) On répète l'épreuve précédente cinq fois de suite en remettant les boules après chaque épreuve.

On considère l'aléa numérique X prenant pour valeur le nombre de réalisation de l'événement A. Déterminer la loi de probabilité de X ainsi que son espérance mathématique.

- 3) Un joueur tire successivement et sans remise trois boules de l'urne il gagne 5^D pour chaque boule blanche et il perd 3^D pour chaque boule noire.
Soit Y l'aléa numérique égale au gain algébrique de ce joueur. Etablir la loi de probabilité de Y puis calculer $E(Y)$.
- 4) On suppose que l'urne contient dix boules dont n sont noires ($n \geq 2$) et les autres sont blanches.
- Exprimer en fonction de n , la probabilité P_n de l'événement A .
 - Déterminer n pour que P_n soit maximale.



Tous les résultats demandés dans l'exercice seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

Une urne contient cinq boules : deux blanches, trois noires, indiscernables au toucher.

- On extrait simultanément, et au hasard deux boules de l'urne.
 - Calculer la probabilité de tirer :
 - deux boules blanches ;
 - deux boules de la même couleur.
 - Soit X la variable aléatoire égale au nombre de boules blanches figurant dans le tirage.

Donner la loi de probabilité de X ; calculer l'espérance de la variable X .

- On effectue un tirage de deux boules de l'urne de la manière suivante :
On tire une première boule de l'urne et on note sa couleur ; on la remet ensuite dans l'urne en ajoutant en plus dans l'urne une boule de la même couleur que la boule tirée (il y a donc l'urne six boules avant le second tirage) ; on tire ensuite une seconde boule :

On considère les événements suivants :

- B_1 : On obtient une boule blanche au premier tirage.
 - N_2 : On obtient une boule noire au premier tirage.
 - B_2 : On obtient une boule blanche au second tirage.
- Calculer : $p(B_2 / B_1)$ et $p(B_2 / N_1)$.
 - Calculer la probabilité de l'événement B_2 .



Un lot de bulbes de tulipes a un pouvoir germinatif de 80% cela

signifie que chaque bulbe a une probabilité égale à $\frac{4}{5}$ de produire une fleur et cela indépendamment des autres bulbes. Chaque bulbe contient l'un des trois gènes r (rouge) ; b (blanc) ; j (jaune) qui détermine la couleur de la future fleur éventuelle.

On suppose que la probabilité pour qu'un bulbe donné possède le gène r , b , j est respectivement $\frac{1}{2}, \frac{1}{10}, \frac{2}{5}$ et cela indépendamment des autres bulbes.

On suppose en outre que le pouvoir germinatif est indépendant de la nature des gènes.

- 1) Quelle est la probabilité d'obtenir cinq fleurs en plantant cinq bulbes.
- 2) a) Quelle est la probabilité pour qu'un bulbe planté produise une fleur rouge ?
 b) On fait une plantation de 5 bulbes, et on appelle X la variable aléatoire qui à chaque plantation associe le nombre de fleurs rouges obtenues. Déterminer la loi de probabilité de X et calculer $E(X)$
- 3) a) Quelle est la probabilité pour qu'un bulbe planté produise une fleur blanche ?
 b) Soit n un entier supérieur ou égale à 1. On désigne par P_n la probabilité de n'obtenir aucune tulipe blanche après avoir planté n bulbes. Calculer P_n .
 c) Combien de bulbes faut-il planter, au minimum, pour obtenir au moins une tulipe blanche, avec une probabilité supérieure ou égale à $\frac{19}{20}$

14 Une urne contient : trois boules blanches numérotés 1, 1,2 et trois boules noires numérotés 2, 2,3.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

- 1) On tire simultanément 3 boules de l'urne. Calculer la probabilité des événements suivants : A : « avoir 3 boules de même couleur » ; B : « avoir une somme égale à 5 ».
- 2) On recommence 4 fois de suite l'expérience de la 1^{er} question.
 « Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on obtient 3 boules de même couleur. Etablir la loi de probabilité de X . Calculer $E(X)$ et $\sigma(X)$.
- 3) Un joueur tire une boule au hasard.
 - Si le nombre 3 apparaît, il tire à nouveau une boule après avoir remis la première et le jeu s'arrête. Soit Y le nombre porté par le deuxième boule tiré.
 - Si un nombre différent de 3 apparaît, il tire successivement et avec remise de 2 boules après avoir remis la première et le jeu s'arrête.
 Soit Y la somme obtenue lors des deux derniers tirages.
 Etablir la loi de probabilité de Y .
 - Calculer l'espérance mathématique.

15 Une urne contient 2 boules blanches et 4 boules noires indiscernables au toucher.

- 1) On tire simultanément 2 boules de l'urne. Quelle est la probabilité pour que les deux boules tirées soient blanches.
- 2) On tire une boule de l'urne. On regarde sa couleur, on la remet dans l'urne, et l'on tire de nouveau une boule.
 a) Quelle est la probabilité pour que l'on obtienne une fois et une seule une

boule blanche.

b) On effectue 4 tirages en remettant à chaque fois dans l'urne la boule tirée. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois que l'on a tiré une boule blanche.

Donner la loi de probabilité de X . Calculer $E(X)$; $V(X)$; $\sigma(X)$.

3) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on effectue n tirages successifs numérotés $1, 2, 3, \dots, n$ en remettant à chaque fois dans l'urne la boule tirée.

Soit Y la variable aléatoire égale à zéro si l'on ne tire aucune boule blanche et, si non égale en numéro du $1^{\text{ère}}$ tirage ayant fourni une boule blanche.

Quelle est la probabilité $P(Y = 1)$? Calculer la probabilité $P(Y = 2)$

La probabilité $P(Y = k)$; $k \in \mathbb{N}$; $k \leq n$

Calculer la somme de $P_n = \sum_{k=1}^n P(Y = k)$

Trouver le résultat de P_n plus rapidement.



Une entreprise en matériel informatique fabrique des disquette 3.5 pouces.

4% des disquettes fabriquées sont défectueuses.

A l'issue de cette fabrication les disquettes sont contrôlées et tirées en trois lot

Les disquettes marquées, celles-ci portent la marque de l'entreprise :

Les disquettes démarquées ;

Les disquettes à déduire.

Partie A :

L'unité de contrôle rejette 3 % des bonnes disquettes et 95 % des disquettes défectueuses.

1) Quelle est la probabilité p_1 pour qu'une disquette soit défectueuse et acceptée ?

2) Quelle est la probabilité p_2 pour qu'une disquette soit bonne et refusée ?

3) Quelle est la probabilité p_3 pour qu'il ait une erreur de contrôle ?

4) Montrer que la probabilité p_4 pour qu'une disquette soit acceptée est égale à 0,933.

Partie B :

Le contrôle s'effectue par 5 tests successifs.

Une disquette reçoit la marque de l'entreprise si elle subit avec succès 5 contrôles successifs, elle est détruite si elle est refusée au moins deux fois et elle est démarquée sinon.

1) Quelle est la probabilité p_5 pour qu'une disquette soit démarquée ?

2) Quelle est la probabilité p_6 pour qu'une disquette reçoive la marque de l'entreprise ?

3) Quelle est la probabilité p_7 pour qu'une disquette soit détruite ?

17

Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(t) = \lambda t^4$. avec $\lambda > 0$.

- 1) Calculer λ pour que f soit la densité d'une loi de probabilité P définie sur $[0,1]$.
- 2) Calculer $P([0,2 ; 0,6])$

18

1) Calculer $I(a) = \int_{-a}^a \frac{1}{2} e^{-|x|} dx$. avec $a > 0$

En déduire $\lim_{x \rightarrow +\infty} I(a)$.

- 2) Que peut – on déduire pour la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{1}{2} e^{-|x|}$.

19

On s'intéresse à la durée de vie, exprimée en semaines, d'un composant électronique.

On modélise cette situation par une loi de probabilité p de durée de vie sans vieillissement définie sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$:

La probabilité que le composant ne soit plus en état de marche au bout de t semaines est $p([0 ; t]) = \int_0^t \lambda e^{-\lambda x} dx$

Une étude statistique, montrant qu'environ 50% d'un lot important de ces composants est encore en état de marche au bout de 200 semaines, permet de poser : $p([0 ; 200]) = 0,5$

1) Montrer que $\lambda = \frac{\text{Log}2}{200}$

- 2) Quelle est la probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 300 semaines ?

On donnera la valeur exacte et une valeur approchée décimale au centième près.

- 3) On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces composants est la limite quand A tend vers $+\infty$ de $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx$

a) Montrer que $\int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx = \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda}$

b) En déduire d_m ; on donnera la valeur exacte et une valeur approchée à la semaine près.

CORRIGES



Si Ω désigne l'univers associé à l'épreuve, on a card $\Omega = C_{10}^3 = 120$

a) L'ensemble des valeurs prises par X est : $X(\Omega) = \{3, 5, 7, 9\}$

b) Définir la loi de probabilité de X c'est déterminer la probabilité de chaque événement élémentaire de l'univers $X(\Omega)$.

* $\{X = 3\}$ désigne l'événement « obtenir trois jetons portant le numéro 1 ».

On a card $(\{X = 3\}) = C_6^3 = 20$. Donc $P(\{X = 3\}) = \frac{20}{120} = \frac{1}{6}$

* $\{X = 5\}$ désigne l'événement : « obtenir deux jetons portant le numéro 1 et un jeton portant le numéro 3 ».

On a card $(\{X = 5\}) = C_6^2 \cdot C_4^1 = 60$ donc $P(\{X = 5\}) = \frac{60}{120} = \frac{1}{2}$.

De la même façon on obtient :

$$P(\{X = 7\}) = \frac{C_6^1 \times C_4^2}{C_{10}^3} = \frac{3}{10} \text{ et } P(\{X = 9\}) = \frac{C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{30}$$

On résume cette étude dans un tableau :

x_i	3	5	7	9	total
$P(\{X = x_i\})$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$	1

c) On a $\{X < 7\} = \{X = 3\} \cup \{X = 5\}$ et comme les événements $\{X = 3\}$ et $\{X = 5\}$ sont incompatibles donc $P(\{X < 7\}) = P(\{X = 3\}) + P(\{X = 5\})$

$$\text{donc } P(\{X < 7\}) = \frac{2}{3}.$$



Soit Ω_1 l'univers associé au lancer du dé A et Ω_2 l'univers associé au lancer du dé B.

L'univers Ω associé au lancer des deux dés est l'ensemble des couples formés d'un élément de Ω_1 et d'un élément de Ω_2 . On a $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$

Donc card $\Omega = 6 \cdot 6 = 36$.

a) L'univers Ω peut être représenté par un tableau cartésien.

Pour étudier la loi de probabilité de X , il suffit de noter dans chaque case du tableau la valeur de X .

A \ B	2	1	1	1	1	1
1	3	2	2	2	2	2
2	4	3	3	3	3	3
3	5	4	4	4	4	4

4	6	5	5	5	5	5
5	7	6	6	6	6	6
6	8	7	7	7	7	7

L'ensemble des valeurs prises par X est $X(\Omega) = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$.

La loi de probabilité de X est définie par le tableau :

x_i	2	3	4	5	6	7	8	Total
$P(\{X = x_i\})$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	$\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	1

$$b) \{X \geq 3\} = \{X = 3\} \cup \{X = 4\} \cup \{X = 5\} \cup \{X = 6\} \cup \{X = 7\} \cup \{X = 8\}$$

$$\text{Donc } P(\{X \geq 3\}) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{36} = \frac{31}{36}$$

2^{ème} méthode : Il est plus rapide d'utiliser l'évènement contraire de $\{X \geq 3\}$

$$\text{On a } \overline{\{X \geq 3\}} = \{X = 2\} \text{ et } P(\{X = 2\}) = \frac{5}{36}, \text{ donc } P(\{X \geq 3\}) = 1 - \frac{5}{36} = \frac{31}{36}$$



Si on désigne par Ω_1 l'ensemble des six faces du dé cubique et par Ω_2 l'ensemble des quatre faces du dé tétraédrique, une éventualité est un couple formé d'un élément de Ω_1 et d'un élément de Ω_2 . L'univers associé au lancer des deux dés est $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$; donc $\text{card } \Omega = 4 \cdot 6 = 24$.

L'univers Ω peut être représenté par un tableau cartésien, pour étudier la loi de probabilité de X il suffit de noter dans chaque case du tableau la valeur de X .

$\Omega_1 \backslash \Omega_2$	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2

$$\text{On a par exemple : } \{X = 4\} = \{(1,5)\}; \{(2,6)\}, \text{ donc } P(\{X = 4\}) = \frac{2}{24} = \frac{1}{12}$$

L'ensemble des valeurs prises par X est $X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

La loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant :

x_i	0	1	2	3	4	5	Total
$P(\{X = x_i\})$	$\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$	$\frac{7}{24}$	$\frac{6}{24} = \frac{1}{4}$	$\frac{4}{24} = \frac{1}{6}$	$\frac{2}{24} = \frac{1}{12}$	$\frac{1}{24}$	1

b) L'espérance mathématique de X est :

$$E(X) = 0 \cdot \frac{4}{24} + 1 \cdot \frac{7}{24} + 2 \cdot \frac{6}{24} + 3 \cdot \frac{4}{24} + 4 \cdot \frac{2}{24} + 5 \cdot \frac{1}{24} = \frac{44}{24} = \frac{11}{6}$$

La variance de X est :

$$V(X) = \left(0 - \frac{11}{6}\right)^2 \cdot \frac{4}{24} + \left(1 - \frac{11}{6}\right)^2 \cdot \frac{7}{24} + \left(2 - \frac{11}{6}\right)^2 \cdot \frac{6}{24} + \left(3 - \frac{11}{6}\right)^2 \cdot \frac{4}{24} \\ + \left(4 - \frac{11}{6}\right)^2 \cdot \frac{2}{24} + \left(5 - \frac{11}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{24}. \text{ Donc } V(X) = \frac{65}{36}.$$

L'écart type est $\sigma(X) = \sqrt{V(X)} \approx 1,34$



Si Ω désigne l'univers associé à l'expérience, on a :

$$\text{Card } \Omega = C_{10}^3 = 120$$

1) Soit l'événement R : « obtenir la boule rouge ».

$$\text{Card } R = C_1^1 \times C_9^2 = 36 \text{ d'où } p(R) = \frac{36}{120} = \frac{3}{10}.$$

2) On répète 5 fois la même épreuve, et les expériences sont indépendantes les unes des autres ; on s'intéresse au nombre de réalisations de l'événement rouge.

X est donc une variable aléatoire binomiale.

$$\text{On a } p(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

$$\text{Avec } n = 5; p = \frac{3}{10}; q = \frac{7}{10}; k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

Donc la loi de probabilité de X est résumée dans le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4	5
$P(X = k)$	$\left(\frac{7}{10}\right)^5$	$5 \cdot \left(\frac{3}{10}\right) \left(\frac{7}{10}\right)^4$	$10 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^2 \left(\frac{7}{10}\right)^3$	$10 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^3 \left(\frac{7}{10}\right)^2$	$5 \cdot \left(\frac{3}{10}\right)^4 \left(\frac{7}{10}\right)^1$	$\left(\frac{3}{10}\right)^5$

• L'espérance d'une variable aléatoire binomiale est : $E(X) = n \cdot p$

$$\text{D'où } E(X) = 5 \cdot \frac{3}{10} = 1,5.$$

• La variance d'une variable aléatoire binomiale est :

$$V(X) = n \cdot p \cdot q = 5 \cdot \frac{3}{10} \cdot \frac{7}{10} = 1,05$$

$$\bullet \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{1,05} \approx 1,02.$$

3) Désignons par R_k l'événement : « la k-ième boule est rouge ».

$$p(R_2) = p(R_1) \cdot p(R_2|R_1) + p(\bar{R}_1) \cdot p(\bar{R}_2|\bar{R}_1) = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{10} + \frac{9}{10} \cdot \frac{1}{10} = 0,11.$$



On lance 5 fois un dé tétraédrique, les 5 lancers sont supposés indépendants, on s'intéresse au nombre de sorties du 4 lors des 5 lancers.

$$\text{On a donc } p(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$$

Avec $p = (\text{probabilité d'avoir le numéros 4}) = \frac{1}{4}$

$q = \bar{p} = \frac{3}{4}$; $n = 5$ et $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

La loi de probabilité de X est définie par le tableau suivant :

k	0	1	2	3	4	5
$P(\{X=k\})$	$\left(\frac{3}{4}\right)^5$	$5 \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^4$	$C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$	$C_5^3 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^2$	$C_5^4 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^4 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)$	$\left(\frac{1}{4}\right)^5$
	$\frac{243}{1024}$	$\frac{405}{1024}$	$\frac{135}{512}$	$\frac{45}{512}$	$\frac{15}{1024}$	$\frac{1}{1024}$

On a : $E(X) = n \cdot p = 5 \cdot \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

6

a) L'univers Ω associé à l'épreuve est l'ensemble des parties à 3 éléments de l'ensemble des 10 jetons.

On a donc $\text{Card } \Omega = C_{10}^3 = 120$.

L'événement contraire de A est réalisé si on tire des jetons dont la somme des numéros est ≥ 7 , on a ça si on tire un jeton portant le numéro 1 et deux jetons portant le numéro 3, ou trois jetons portant le numéro 3.

On a $p(\bar{A}) = \frac{C_6^1 \cdot C_4^2 + C_4^3}{C_{10}^3} = \frac{1}{3}$ donc $p(A) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.

b) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'événement A est réalisé lors des quatre tirages.

On répète quatre fois de suite une expérience à deux issues (A et $\bar{A}$), les résultats des deux expériences étant indépendants.

La loi de probabilité de X est donc une variable aléatoire binomiale d'ordre 4

et de paramètre $p = p(A) = \frac{2}{3}$ et $q = \bar{p} = \frac{1}{3}$

$$P(\{X=3\}) = C_4^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} = \frac{32}{81}$$

Si B l'événement : « A se réalise au moins trois fois ».

On a : $B = \{X=3\} \cup \{X=4\}$.

$$\text{Donc } p(B) = p(\{X=3\}) + p(\{X=4\}) = C_4^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \frac{1}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{27}$$

7

A) 1) Désignons par B_k l'évènement : « La k -ième boule est blanche ».

L'évènement $(X=0)$ est l'évènement $\bar{B}_1 \cap \bar{B}_2 \cap \bar{B}_3 \cap \bar{B}_4$.

Comme les tirages sont indépendants, la probabilité de cet évènement est :

$$P(X=0) = P(\overline{B_1}) \cdot P(\overline{B_2}) \cdot P(\overline{B_3}) \cdot P(\overline{B_4}) = \left(\frac{40}{100}\right)^4 = \left(\frac{2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625}$$

$$2) P(X=1) = P(B_1) = \frac{60}{100} = \frac{3}{5}$$

$$P(X=2) = P(N_1 \cap B_2) = P(N_1) \cdot P(B_2)$$

$$\text{Car les tirages sont indépendants. Donc : } P(X=2) = \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{6}{25}$$

$$P(X=3) = P(N_1 \cap N_2 \cap B_3) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{12}{125}$$

$$P(X=4) = P(N_1 \cap N_2 \cap N_3 \cap B_4) = \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{5} = \frac{24}{625}$$

Vérification :

$$(X=0) + P(X=1) + P(X=2) + P(X=3) + P(X=4) = 1.$$

B) 1) $P(X=k) = P(N_1 \cap N_2 \cap \dots \cap N_{k-1} \cap B_k)$ comme les tirages sont indépendants :

$$P(X=k) = P(N_1) \cdot P(N_2) \dots P(N_{k-1}) \cdot P(B_k) = \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} \cdot \frac{3}{5}$$

$$2) E(X) = \sum_{k=1}^{k=n} k \cdot P(X=k) = \sum_{k=1}^{k=n} k \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1} \cdot \frac{3}{5}$$

$$= 1 \cdot \frac{3}{5} + 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^1 \cdot \frac{3}{5} + 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 \cdot \frac{3}{5} + \dots + n \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} \cdot \frac{3}{5}. \text{ Or } f\left(\frac{2}{5}\right) = \sum_{k=1}^{k=n} k \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}$$

$$\text{D'où } E(X) = \frac{3}{5} \left(1 + 2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^1 + 3 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2 + \dots + n \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}\right) = \frac{3}{5} \cdot \sum_{k=1}^{k=n} k \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^{k-1}$$

$$E(X) = \frac{3}{5} \cdot f\left(\frac{2}{5}\right).$$



1) a) Le nombre total de tirages est égal à : $C_{10}^5 = 252$

Le nombre des chiffres pairs que l'on peut obtenir est 0, 1, 2, 3, 4 ou 5, car il y a dans l'ensemble E, 5 chiffres pairs (0, 2, 4, 6, 8)

Donc $X \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

* Calcul de la loi de probabilité :

• $P(X=0) = P(\text{« obtenir aucun nombre pair »})$; il s'agit donc de tirer cinq jetons parmi les 5 nombres impaires de E.

$$\text{Donc } P(X=0) = \frac{C_5^5}{252} = \frac{1}{252}$$

• $P(X=1) = P(\text{« obtenir un nombre pair »})$; il s'agit donc de tirer un nombre pair parmi 5 et quatre parmi les 5 nombres impairs de E donc

$$P(X=1) = \frac{C_5^1 \cdot C_5^4}{252} = \frac{25}{252}.$$

$$\bullet P(X=2) = P(\text{« obtenir deux nombres pairs et deux seulement »}) \\ = \frac{C_5^2 \cdot C_5^3}{252} = \frac{100}{252}.$$

$$\bullet P(X=3) = P(\text{« obtenir trois nombres pairs et trois seulement »}) \\ = \frac{C_5^3 \cdot C_5^2}{252} = \frac{100}{252}.$$

$$\bullet P(X=4) = P(\text{« obtenir quatre nombres pairs et quatre seulement »}) \\ = \frac{C_5^4 \cdot C_5^1}{252} = \frac{25}{252}.$$

$$\bullet P(X=5) = P(\text{« obtenir cinq nombres pairs et cinq seulement »}) \\ = \frac{C_5^5}{252} = \frac{1}{252}.$$

b) On sait que la variable aléatoire définit une partition de l'univers, par conséquent :

$$\bullet P(X < 3) = P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$\text{Donc } P(X < 3) = \frac{1}{252} + \frac{25}{252} + \frac{100}{252} = \frac{1}{2}$$

$$\bullet P(2 \leq X \leq 3) = P(X=2) + P(X=3).$$

$$\text{Donc } P(2 \leq X \leq 3) = \frac{100}{252} + \frac{100}{252} = \frac{200}{252} = \frac{50}{63}$$

$$2) E(X) = \frac{0 + 1 \times 25 + 2 \times 100 + 3 \times 100 + 4 \times 25 + 5 \times 1}{252} = \frac{630}{252}.$$

Soit $E(X) = 2,5$.

$$E(X^2) = \frac{0 + 1^2 \times 25 + 2^2 \times 100 + 3^2 \times 100 + 4^2 \times 25 + 5^2 \times 1}{252} = \frac{1750}{252} = \frac{125}{18}.$$

$$V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2 = \frac{125}{18} - (2,5)^2 = \frac{25}{36}.$$

Soit $V(X) \approx 0,69$.

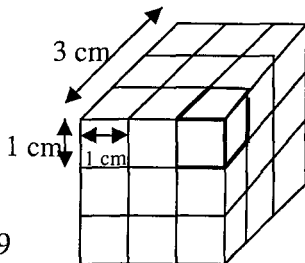


9 Nous devons d'abord voir les différents types de cube placés dans le sac.

Le sac contient :

- Huit cubes ayant trois faces peintes.
- Douze cubes ayant deux faces peintes
- Six cubes ayant une face peinte
- Un cube n'ayant pas de peinture.

L'univers Ω associé à l'épreuve est



l'ensemble des parties (combinaisons) à deux éléments de l'ensemble des 27 cubes.

On a donc $\text{card } \Omega = C_{27}^2 = 351$

a) $X(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

• $\{X = 1\}$ désigne l'événement : « on obtient un cube ayant une face peinte et l'autre n'ayant pas de face peinte ».

Donc $\text{card}(\{X = 1\}) = C_6^1 \times C_1^1 = 6$, d'où $P(\{X = 1\}) = \frac{6}{351} = \frac{2}{117}$.

• L'événement $\{X = 2\}$ est réalisé si on tire :

« Deux cubes ayant une face peinte ou un cube ayant deux faces peintes et l'autre cube n'ayant pas de faces peintes ».

D'où $\text{card}(\{X = 2\}) = C_6^2 + C_{12}^1 \times C_1^1 = 27$ et $P(\{X = 2\}) = \frac{27}{351} = \frac{1}{13}$

On applique le même raisonnement pour les autres événements on obtient :

• $\text{card}(\{X = 3\}) = C_{12}^1 \times C_6^1 + C_8^2 = 80$ donc $P(\{X = 3\}) = \frac{80}{351}$

• $\text{card}(\{X = 4\}) = C_{12}^2 \times C_8^1 + C_6^1 = 114$ donc $P(\{X = 4\}) = \frac{114}{351} = \frac{18}{117}$

• $\text{card}(\{X = 5\}) = C_8^1 \times C_{12}^1 = 96$ donc $P(\{X = 5\}) = \frac{96}{351} = \frac{32}{117}$

• $\text{card}(\{X = 6\}) = C_8^2 = 28$ donc $P(\{X = 6\}) = \frac{28}{351}$.

On résume l'étude de la loi de probabilité de X dans un tableau :

x_i	1	2	3	4	5	6	total
$P(\{X = x_i\})$	$\frac{2}{117}$	$\frac{1}{13}$	$\frac{80}{351}$	$\frac{38}{117}$	$\frac{32}{117}$	$\frac{28}{351}$	1

b) $E(X) = 1 \cdot \frac{2}{117} + 2 \cdot \frac{1}{13} + 3 \cdot \frac{80}{351} + 4 \cdot \frac{38}{117} + 5 \cdot \frac{32}{117} + 6 \cdot \frac{28}{351}$

Donc $E(X) = \frac{1404}{351} = 4$.

$V(X) = (1-4)^2 \cdot \frac{2}{117} + (2-4)^2 \cdot \frac{1}{13} + (3-4)^2 \cdot \frac{80}{351} + (4-4)^2 \cdot \frac{38}{117} + (5-4)^2 \cdot \frac{32}{117} + (6-4)^2 \cdot \frac{28}{351}$

Donc $V(X) = \frac{450}{351} = \frac{50}{39}$

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{50}{39}} \approx 1,13.$$



La probabilité d'apparition de chaque face est de $\frac{1}{6}$ car nous sommes

dans l'hypothèse de l'équiprobabilité de l'apparition de toutes les faces. Les résultats obtenus sur chaque dé sont indépendants.

1) • Sur le premier dé la probabilité d'avoir une face rouge est $\frac{5}{6}$; et la

probabilité d'avoir une face verte est $\frac{1}{6}$.

• Sur le deuxième dé la probabilité d'avoir une face rouge est $\frac{1}{6}$, la probabilité

d'avoir une face verte est $\frac{2}{6}$, la probabilité d'avoir une face bleue est $\frac{3}{6}$. Par

conséquent $P(A) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{5}{36}$.

• L'événement C est la réunion des événements : « le premier dé est rouge et le deuxième est vert » et de l'événement : « le premier dé est vert et le deuxième est rouge » soit :

$$P(C) = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = \frac{11}{36}.$$

• L'événement B est la réunion des événements : « les deux dés sont rouges » et

l'événement « les deux dés sont verts » d'où $P(B) = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{2}{6} = \frac{7}{36}$.

• L'événement D est la réunion des événements : « le premier dé est rouge et le deuxième est vert » ; le premier dé est rouge et le deuxième est bleu » ; « le premier dé est vert et le deuxième est rouge » et « le premier dé est vert et le deuxième est bleu ».

$$D'ou P(D) = \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{6} + \frac{5}{6} \cdot \frac{3}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{6} = \frac{29}{36}.$$

On peut aussi considérer l'événement contraire de D est : « les deux faces sont de même couleur » c'est à dire l'événement B par conséquent

$P(D) = 1 - P(B)$, ce qui donne le même résultat.

$$2) P(\{X = 5\}) = P(A) = \frac{5}{36}; P(\{X = 2\}) = \frac{2}{36}$$

$$3) P(\{X = -x\}) = P(D) = \frac{29}{36}.$$

$$\bullet E(X) = 5 \cdot \frac{5}{36} + 2 \cdot \frac{2}{36} + (-x) \cdot \frac{29}{36} = \frac{29 - 29x}{36}$$

Le jeu sera équit probable si $E(X) = 0$; c'est à dire $x = 1$.

$$\nabla 11) 1) P(A) = \frac{C_6^1}{C_{10}^1} \times \frac{C_4^1}{C_9^1} \times \frac{C_8^1}{C_8^1} = \frac{6 \times 4}{10 \times 9} = \frac{4}{15}$$

$$P(B) = \frac{C_6^1}{C_{10}^1} \times \frac{C_5^1}{C_9^1} \times \frac{C_4^1}{C_8^1} + \frac{C_4^1}{C_{10}^1} \times \frac{C_3^1}{C_9^1} \times \frac{C_2^1}{C_8^1}$$

$$= \frac{6 \times 5 \times 4}{10 \times 9 \times 8} + \frac{4 \times 3 \times 2}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{6} + \frac{1}{30} = \frac{1}{5}.$$

2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'événement A est réalisé lors des cinq tirages.

On répète cinq fois de suite une expérience à deux issues (A et $\bar{A}$), les résultats de deux expériences étant indépendants.

La variable aléatoire X est donc une loi binomiale d'ordre $n = 5$ et de

paramètre $p = p(A) = \frac{4}{15}$ et $q = p(\bar{A}) = \frac{11}{15}$ tels que on a :

$$P(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} \text{ avec } k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}.$$

$$\text{D'où : } P(\{X = 0\}) = C_5^0 \left(\frac{4}{15}\right)^0 \cdot \left(\frac{11}{15}\right)^5 = \left(\frac{11}{15}\right)^5 = \frac{161051}{759375}$$

$$P(\{X = 1\}) = C_5^1 \left(\frac{4}{15}\right)^1 \cdot \left(\frac{11}{15}\right)^4 = \frac{5 \times 11^4 \times 4}{15^5} = \frac{292820}{759375}$$

$$P(\{X = 2\}) = C_5^2 \left(\frac{4}{15}\right)^2 \cdot \left(\frac{11}{15}\right)^3 = \frac{10 \times 4^2 \times 11^3}{15^5} = \frac{212960}{759375}$$

$$P(\{X = 3\}) = C_5^3 \left(\frac{4}{15}\right)^3 \cdot \left(\frac{11}{15}\right)^2 = \frac{10 \times 4^3 \times 11^2}{15^5} = \frac{77440}{759375}$$

$$P(\{X = 4\}) = C_5^4 \left(\frac{4}{15}\right)^4 \cdot \left(\frac{11}{15}\right)^1 = \frac{5 \times 4^4 \times 11}{15^5} = \frac{14080}{759375}$$

$$P(\{X = 5\}) = C_5^5 \left(\frac{4}{15}\right)^5 \cdot \left(\frac{11}{15}\right)^0 = \frac{4^5}{15^5} = \frac{1024}{759375}.$$

$$\bullet E(X) = n \cdot p = 5 \times \frac{4}{15} = \frac{4}{3}.$$

3) Le joueur tire : 3 boules blanches et il gagne 15^D ou 2 boules blanches et une boule noire et il gagne 7^D ou une boule blanche et 2 boules noires et il perd 1^D ou 3 boules noires et il perd 9^D .

Donc $Y(\Omega) = \{15, 7, -1, -9\}$.

$$P(\{Y=15\}) = \frac{C_4^1}{C_{10}^1} \times \frac{C_3^1}{C_9^1} \times \frac{C_2^1}{C_8^1} = \frac{4 \times 3 \times 2}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{30}$$

$$P(\{Y = -9\}) = \frac{C_6^1}{C_{10}^1} \times \frac{C_5^1}{C_9^1} \times \frac{C_4^1}{C_8^1} = \frac{6 \times 5 \times 4}{10 \times 9 \times 8} = \frac{1}{6}$$

$$\begin{aligned} P(\{Y = -1\}) &= P(B, N, N) + P(N, B, N) + P(N, N, B) \\ &= \frac{C_4^1}{C_{10}^1} \times \frac{C_6^1}{C_9^1} \times \frac{C_5^1}{C_8^1} + \frac{C_6^1}{C_{10}^1} \times \frac{C_4^1}{C_9^1} \times \frac{C_5^1}{C_8^1} + \frac{C_6^1}{C_{10}^1} \times \frac{C_5^1}{C_9^1} \times \frac{C_4^1}{C_8^1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(\{Y = 7\}) &= P(B, B, N) + P(N, B, B) + P(B, N, B) \\ &= 3 \times \frac{C_4^1 \times C_3^1 \times C_6^1}{C_{10}^1 \times C_9^1 \times C_8^1} = \frac{3}{10}. \end{aligned}$$

D'où la loi de probabilité de Y est définie dans ce tableau :

$Y = y_i$	-1	-9	7	15
$P(\{Y = y_i\})$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{1}{30}$

$$\bullet E(Y) = -\frac{1}{2} - 9 \times \frac{1}{6} + 7 \times \frac{3}{10} + 15 \times \frac{1}{30} = \frac{3}{5}.$$

4) L'urne contient 10 boules dont n sont noires.

On a $n \in \{2, 3, \dots, 10\}$ et les autres sont blanches donc on a :

$\begin{cases} (10 - n) \text{ boules blanches} \\ \text{et } n \text{ boules noires avec } n \in \{2, 3, \dots, 10\}. \end{cases}$

$$a) P_n = \frac{C_{10-n}^1}{C_{10}^1} \times \frac{C_n^1}{C_9^1} \times \frac{C_8^2}{C_8^2} = \frac{(10 - n) \times n}{90} = \frac{-1}{90} n^2 + \frac{1}{9} n$$

$$b) \text{ Soit la fonction } f(x) = -\frac{1}{90} x^2 + \frac{1}{9} x.$$

$$f \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et on a } f'(x) = -\frac{1}{45} x + \frac{1}{9}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 5.$$

x	$-\infty$	5	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
$f(x)$		$\nearrow$	$\searrow$

$$\text{Donc } P_n = -\frac{1}{90} n^2 + \frac{1}{9} n \text{ est maximal lorsque } n = 5.$$



Le nombre total des tirages est égal à C_5^2 .

1) a) • Soit A l'événement : « Tirer deux boules blanches »

$$\text{D'où } P(A) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}$$

- Soit B l'événement : « Tirer deux boules de même couleur »

$$P(B) = \frac{C_2^2 + C_3^2}{C_5^2} = \frac{1+3}{10} = \frac{2}{5}$$

b) Calcul de la loi de probabilité :

$$P(\{X=0\}) = P(\text{« aucune boule blanche ne figure dans le tirage »})$$

$$= \frac{C_3^2}{C_5^2} = \frac{3}{10}$$

$$P(\{X=1\}) = P(\text{« obtenir une seule boule blanche »}) = \frac{C_2^1 \times C_3^1}{C_5^2} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$$

$$P(\{X=2\}) = P(\text{« obtenir 2 boules blanches »}) = \frac{C_2^2}{C_5^2} = \frac{1}{10}.$$

D'où la loi de probabilité de X est définie dans ce tableau :

X_i	0	1	2
$P[X = x_i]$	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

$$\bullet E(X) = 0 \times \frac{3}{10} + 1 \times \frac{6}{10} + 2 \times \frac{1}{10} = \frac{8}{10} = \frac{4}{5}.$$

- 2) a) $P(B_2 / B_1)$ est la probabilité d'obtenir une boule blanche au second tirage sachant qu'on a tiré une boule blanche au premier tirage donc le nombre de boules blanches est devenu 3 on a déjà 3 boules noires donc :

$$\bullet P(B_2 / B_1) = \frac{C_3^1}{C_2^1} = \frac{3}{2} = \frac{1}{2}.$$

On considérons le même raisonnement si au premier tirage on a tiré une boule noire donc on aura l'urne 2 boules blanches et 4 boules noires

$$\text{d'où } P(B_2 / N_1) = \frac{C_2^1}{C_4^1} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

b) On remarque que $B_2 = (B_2 \cap B_1) \cup (B_2 \cap \bar{B}_1)$ et comme $B_2 \cap B_1$ et $B_2 \cap \bar{B}_1$ sont disjoints donc :

$$\begin{aligned} P(B_2) &= P(B_2 \cap B_1) + P(B_2 \cap \bar{B}_1) \\ &= P(B_1) \times P(B_2 / B_1) + P(\bar{B}_1) \times P(B_2 / \bar{B}_1) \\ &= P(B_1) \times P(B_2 / B_1) + P(N_1) \times P(B_2 / N_1) \end{aligned}$$

$$\text{On a : } P(B_1) = \frac{C_2^1}{C_5^1} = \frac{2}{5} ; P(N_1) = \frac{C_3^1}{C_5^1} = \frac{3}{5}$$

$$\text{D'où } P(B_2) = \frac{2}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} = \frac{2}{5} \text{ d'où } P(B_2) = \frac{2}{5}$$



Pouvoir germinatif

Probabilité d'avoir probabilité de ne pas

une fleur est $\frac{4}{5}$. avoir une fleur est : $\frac{1}{5}$

Nature des gènes

$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{2}{5}$
Rouge Blanc Jaune

1) Chaque bulbe a une probabilité égale à $\frac{4}{5}$ de produire une fleur et la production d'une fleur par un bulbe est indépendante de celle des autres bulbes donc la probabilité d'obtenir 5 fleurs en plantant 5 bulbes est : $\left(\frac{4}{5}\right)^5$.

2) a) Le pouvoir germinatif est indépendant de la nature des gènes, donc la probabilité d'obtenir une fleur qui soit rouge est $\frac{4}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{5}$.

b) Les seules valeurs que peut prendre la variable X sont : 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5.

Une plantation de 5 bulbes est une suite de 5 épreuves indépendantes, ayant chacune deux issues possibles :

- A : « On n'obtient pas de fleur rouge ».
- $\bar{A}$: « On obtient une fleur rouge ».

Donc X suit la loi binomiale de paramètre $n = 5$; $p = p(A) = \frac{2}{5}$

$$\text{et } q = p(\bar{A}) = \frac{3}{5}.$$

Tels que on a : $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$.

Il vient :

$$P(X = 0) = C_5^0 \times \left(\frac{2}{5}\right)^0 \times \left(\frac{3}{5}\right)^5 = \frac{243}{3125}$$

$$P(X = 1) = C_5^1 \times \left(\frac{2}{5}\right)^1 \times \left(\frac{3}{5}\right)^4 = \frac{810}{3125}$$

$$P(X=2) = C_5^2 \times \left(\frac{2}{5}\right)^2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{1080}{3125}$$

$$P(X=3) = C_5^3 \times \left(\frac{2}{5}\right)^3 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{720}{3125}$$

$$P(X=4) = C_5^4 \times \left(\frac{2}{5}\right)^4 \times \left(\frac{3}{5}\right)^1 = \frac{240}{3125}$$

$$P(X=5) = C_5^5 \times \left(\frac{2}{5}\right)^5 \times \left(\frac{3}{5}\right)^0 = \frac{32}{3125}$$

$$\bullet E(X) = n \cdot p = 5 \times \frac{2}{5} = 2.$$

3) a) En appliquant la même raisonnement de 2°) a) on obtient que la

probabilité qu'un bulbe planté produise une fleur blanche est : $\frac{4}{5} \times \frac{1}{10} = \frac{2}{25}$.

b) D'après 3°) a) la probabilité pour qu'un bulbe planté ne produise pas une fleur blanche est $\frac{23}{25}$.

Les n plantations étant indépendantes donc $P_n = \left(\frac{23}{25}\right)^n$.

c) Soit l'événement E : « obtenir au moins une tulipe blanche ».

$$P(E) = 1 - P_n = 1 - \left(\frac{23}{25}\right)^n.$$

$$P(E) \geq \frac{19}{20} \text{ signifie que } 1 - \left(\frac{23}{25}\right)^n \geq \frac{19}{20} \text{ c'est à dire } \left(\frac{23}{25}\right)^n \leq \frac{1}{20}$$

$$\Leftrightarrow n \log \frac{23}{25} \leq -\log 20 \Leftrightarrow n > \frac{\log 20}{\log 25 - \log 23} \approx 35,92 ;$$

Il faut planter au minimum 36 bulbes pour obtenir au moins une tulipe blanche avec une probabilité au moins égale à $\frac{19}{20}$.

14 Le nombre de tous les cas possibles est $\text{card } \Omega = C_6^3 = 20$

$$1) \bullet P(A) = \frac{C_3^3 + C_3^2}{20} = \frac{1}{10}$$

$$\bullet P(B) = \frac{C_2^2 \times C_1^1 + C_2^1 \times C_3^2}{20} = \frac{7}{20}$$

2) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'événement A est réalisé lors des quatre tirages.

On répète quatre fois de suite une expérience à deux issues (A et $\bar{A}$), les résultats de deux expériences étant indépendants. La loi de probabilité de X est donc une loi binomiale d'ordre $n = 4$ et de paramètre :

$$P(A) = p = \frac{1}{10} \text{ et } q = p(\bar{A}) = \frac{9}{10} \text{ tel que on a :}$$

$$P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k} \text{ avec } k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

$$\text{D'où on a : } P(X = 0) = C_4^0 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^0 \left(\frac{9}{10}\right)^4 = \frac{6561}{10^4}$$

$$P(X = 1) = C_4^1 \cdot \frac{1}{10} \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^3 = \frac{2916}{10^4}$$

$$P(X = 2) = C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^2 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^2 = \frac{486}{10^4}$$

$$P(X = 3) = C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^3 \cdot \left(\frac{9}{10}\right) = \frac{36}{10^4}$$

$$P(X = 4) = C_4^4 \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^4 \cdot \left(\frac{9}{10}\right)^0 = \frac{1}{10^4}$$

$$\bullet E(X) = n \cdot p = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}$$

$$\bullet V(X) = n \cdot p \cdot q = \frac{36}{100} = \frac{9}{25}$$

$$\bullet \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \frac{3}{5}$$

3) • Si le nombre 3 apparaît, le joueur tire une 2^{ème} boule après avoir remis la première et le jeu s'arrête.

La variable aléatoire Y égale au nombre porté par la 2^{ème} boule donc Y prend les valeurs 1, 2 et 3.

• Si le nombre tiré est différent de 3, le joueur tire successivement et avec remise 2 boules après avoir remis la 1^{ère}. La variable aléatoire Y égale à la somme obtenue lors des deux derniers tirages donc Y prend la valeur 2, 3, 4, 5, 6. Donc $Y(\Omega) = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

Soit $P(n, m)$ = probabilité d'avoir tiré la 1^{ère} boule qui porte le nombre n et la 2^{ème} boule qui porte le nombre m.

$$P(Y=1) = P(3,1) = \frac{C_1^1}{C_6^1} \times \frac{C_2^1}{C_6^1} = \frac{2}{36} = \frac{12}{216}$$

$$P(Y=2) = P(3,2) + P(\text{non } 3, 1,1)$$

$$= \frac{C_1^1}{C_6^1} \times \frac{C_3^1}{C_6^1} + \frac{C_5^1}{C_6^1} \times \frac{C_2^1}{C_6^1} \times \frac{C_2^1}{C_6^1} = \frac{38}{216}$$

$$P(Y=3) = P(3,3) + P(\text{non } 3, 1, 2) + P(\text{non } 3, 2, 1)$$

$$= \frac{C_1^1}{C_6^1} \times \frac{C_1^1}{C_6^1} + \frac{C_5^1}{C_6^1} \times \frac{C_2^1}{C_6^1} \times \frac{C_3^1}{C_6^1} + \frac{C_5^1}{C_6^1} \times \frac{C_3^1}{C_6^1} \times \frac{C_2^1}{C_6^1} = \frac{66}{216}$$

$$P(Y=4) = P(\text{non } 3, 1, 3) + P(\text{non } 3, 2, 2) + P(\text{non } 3, 3, 1)$$

$$= \frac{C_5^1}{C_6^1} \times \frac{C_5^1}{C_6^1} \times \frac{C_2^1}{C_6^1} + \frac{C_5^1}{C_6^1} \times \frac{C_3^1}{C_6^1} \times \frac{C_3^1}{C_6^1} + \frac{C_5^1}{C_6^1} \times \frac{C_2^1}{C_6^1} \times \frac{C_5^1}{C_6^1} = \frac{65}{216}$$

$$P(Y=5) = P(\text{non } 3, 2, 3) + P(\text{non } 3, 3, 2)$$

$$= \left(\frac{C_5^1}{C_6^1} \times \frac{C_3^1}{C_6^1} \times \frac{C_1^1}{C_6^1} \right) \times 2 = \frac{30}{216}$$

$$P(Y=6) = P(\text{non } 3, 3, 3) = \frac{C_5^1}{C_6^1} \times \frac{C_1^1}{C_6^1} \times \frac{C_1^1}{C_6^1} = \frac{5}{216}$$

La loi de probabilité de Y est décrite dans le tableau suivant :

y_i	1	2	3	4	5	6	Σ
$P(Y=y_i)$	$\frac{12}{216}$	$\frac{38}{216}$	$\frac{66}{216}$	$\frac{65}{216}$	$\frac{30}{216}$	$\frac{5}{216}$	1

$$E(Y) = \frac{12}{216} + 2 \cdot \frac{38}{216} + 3 \cdot \frac{66}{216} + 4 \cdot \frac{65}{216} + 5 \cdot \frac{30}{216} + 6 \cdot \frac{5}{216} = \frac{726}{216}$$



$$1) P(A) = \frac{C_2^2}{C_6^2} = \frac{1}{15}$$

$$2) a) P(B) = \frac{C_2^1}{C_6^1} \times \frac{C_4^1}{C_6^1} + \frac{C_4^1}{C_6^1} \times \frac{C_2^1}{C_6^1} = \frac{16}{36} = \frac{4}{9}$$

b) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'événement A est réalisé lors des 4 tirages.

On répète 4 fois de suite une expérience à deux issues (A et $\bar{A}$), les résultats de deux expériences étant indépendants.

La loi de probabilité de X est donc une loi binomiale d'ordre $n=4$ et de

paramètre $P(A) = p = \frac{1}{3}$ et $q = \bar{p} = \frac{2}{3}$ tels que on a :

$$P(X=k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k} \text{ avec } k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

$$P(X=0) = C_4^0 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^0 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{16}{81}$$

$$P(X=1) = C_4^1 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^1 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^3 = \frac{32}{81}$$

$$P(X=2) = C_4^2 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{24}{81}$$

$$P(X=3) = C_4^3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{8}{81}$$

$$P(X=4) = C_4^4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^0 = \frac{1}{81}$$

$$\bullet E(X) = n \cdot P = \frac{4}{3}; V(X) = n \cdot P \cdot q = 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{9}$$

$$\bullet \sigma(X) = \sqrt{V(X)} = \sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

3) La variable aléatoire $Y = \begin{cases} 0 & \text{si l'on ne tire aucune boule blanche} \\ \text{numéros du 1}^{\text{er}} \text{ tirage ayant fourni} \\ \text{une boule blanche} \end{cases}$

$$P(Y=1) = \frac{C_2^1}{C_6^1} \times \left(\frac{C_6^1}{C_6^1}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}$$

$$P(Y=2) = \frac{C_4^1}{C_6^1} \times \frac{C_2^1}{C_6^1} \times \left(\frac{C_6^1}{C_6^1}\right) = \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{2}{9}$$

Pour $k \in \mathbb{N}^*$ et $k \leq n$,

$$P(Y=k) = \left(\frac{C_4^1}{C_6^1}\right)^{k-1} \times \frac{C_2^1}{C_6^1} \times \left(\frac{C_6^1}{C_6^1}\right)^{n-k} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}$$

$$P(Y=0) = \left(\frac{C_4^1}{C_6^1}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$P_n = \sum_{k=1}^n P(Y=k) = P(Y=1) + P(Y=2) + \dots + P(Y=n).$$

$$= \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^0 + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right) + \dots + \frac{1}{3} \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}.$$

P_n est la somme des n termes consécutifs d'une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$

et de 1^{ère} terme $\frac{1}{3}$.

$$\text{D'où } P_n = \frac{1}{3} \cdot \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 - \frac{2}{3}} = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n.$$

• 2^{ème} façon :

$$\text{On a : } P(Y=0) + \underbrace{P(Y=1) + \dots + P(Y=n)}_{P_n} = 1$$

$$\text{D'où } P(Y=0) + P_n = 1 \Leftrightarrow P_n = 1 - P(Y=0) \text{ d'où } P_n = 1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n$$

16 A) 1) Soit l'événement D « choisir une disquette défectueuse ».

$$P(D) = \frac{4}{100} = 0,04. \text{ Parmi les disquettes défectueuses, il y en a 95 \% qui sont}$$

rejetées, donc 95% des 4% sont rejetées.

Soit R : « rejeter une disquette » et $D \cap \bar{R}$ « être défectueuse et acceptée », c'est à dire faire partie des 5 % (non rejetées) des 4% des disquettes défectueuse donc $P(D \cap \bar{R}) = 0,05 \times 0,04 = 0,002 = P_1$.

2) On a les hypothèses :

$$D : \text{ " Choisir une disquette défectueuse " , } p(D) = \frac{4}{100} = 0,04$$

$$\bar{D} : \text{ " Choisir une bonne disquette " } p(\bar{D}) = 1 - \frac{4}{100} = 0,96.$$

L'événement « être bonne et refusée » se traduit donc par $\bar{D} \cap R$

C'est à dire faire partie des 3% (rejetées) des 96% de bonnes disquettes

$$\text{D'où } p(\bar{D} \cap R) = 0,03 \cdot 0,96 = 0,0288 ; \text{ soit } p_2 = 0,0288.$$

3) Il y a erreur de contrôle si la disquette est bonne et refusée ou défectueuse et acceptées, ces deux événements sont incompatibles nous avons donc :

$$P_3 = P_1 + P_2. \text{ Soit } P_3 = 0,0308$$

4) On a les hypothèses D : « Choisir une disquette défectueuse »

$$P(D) = \frac{4}{100} = 0,04.$$

$$\bar{D} : \text{ " Choisir une bonne disquette " , } p(\bar{D}) = 1 - \frac{4}{100} = 0,96$$

Une disquette est acceptée si elle est bonne et acceptée ou si elle est défectueuse et acceptée soit $A = (\bar{D} \cap \bar{R}) \cup (D \cap \bar{R})$.

$$\text{Avec } p(D \cap \bar{R}) = p_1 \text{ et } p(\bar{D} \cap \bar{R}) = 0,97 \cdot 0,96 \text{ d'où } p_4 = 0,9332$$

B) 1) Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fois pour qu'une disquette soit acceptée lors des 5 tests successifs. On répète 5 fois de suite les

tests à deux issues ; acceptées ou non acceptées, les résultats de deux expériences étant indépendants. La loi de probabilité de X est donc une loi binomiale d'ordre $n = 5$ et de paramètre $p = p_4 = 0,933$ et $q = 1 - p = 0,067$, tel que on a : $P(X = k) = C_n^k \cdot p^k \cdot q^{n-k}$ avec $k \in \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

Une disquette est démarquée si elle subit 4 tests avec succès

$$D'où p_5 = p(X = 4) = C_5^4 (0,933)^4 \cdot 0,067$$

$$D'où p_5 = 0,254$$

2) Une disquette est marquée si elle subit 5 tests avec succès d'où :

$$p_6 = p(X = 5) = C_5^5 \cdot (0,933)^5 = 0,707$$

3) Une disquette est détruite si elle est refusée au moins deux fois on peut donc écrire $p_7 = p(X \leq 3)$.

Il s'agit de l'événement contraire d'être démarquée ou marquée.

$$D'où p(X \leq 3) = 1 - (p(X = 4) + p(X = 5)).$$

$$\text{Soit } p_7 = 1 - (p_5 + p_6). \text{ Finalement } p_7 \approx 0,039$$



1) Pour que la fonction f continue et positive sur $[0, 1]$

Soit la densité d'une loi de probabilité il faut que $\int_0^1 f(t) dt = 1$

$$\text{Soit } \int_0^1 \lambda t^4 dt = 1$$

$$\lambda \left[\frac{t^5}{5} \right]_0^1 = 1 \Leftrightarrow \frac{\lambda}{5} = 1 \Leftrightarrow \lambda = 5$$

$$2) P([0, 2; 0, 6]) = \int_{0,2}^{0,6} 5t^4 dt = [t^5]_{0,2}^{0,6} = (0,6)^5 - (0,2)^5 = 0,077.$$



1) On remarque que les bornes de l'intégrale sont opposés et que la

fonction $\frac{1}{2} e^{-|x|}$ est paire car $x \in [-a, a] \Rightarrow -x \in [-a, a]$ et $\frac{1}{2} e^{-|-x|} = \frac{1}{2} e^{-|x|}$

$$d'où I(a) = 2 \int_0^a \frac{1}{2} e^{-|x|} dx = 2 \int_0^a \frac{1}{2} e^{-x} dx \quad \text{car } x \geq 0$$

$$= [-e^{-x}]_0^a = 1 - e^{-a}$$

$$\lim_{a \rightarrow +\infty} I(a) = \lim_{a \rightarrow +\infty} 1 - e^{-a} = 1 \quad \text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

2) f est une fonction continue positive sur $\mathbb{R}$ et son intégrale sur l'ensemble des réels est égale à 1 :

f est la densité d'une loi de probabilité définie sur $\mathbb{R}$.

19

$$1) \int_0^{200} \lambda e^{-\lambda t} dt = \frac{1}{2}$$

$$\left[-e^{-\lambda t} \right]_0^{200} = \frac{1}{2}$$

$$1 - e^{-200\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$e^{-200\lambda} = \frac{1}{2}$$

$$-200\lambda = \text{Log} \frac{1}{2} \text{ d'où } \lambda = \frac{\text{Log} 2}{200}$$

$$2) P([0, 300]) = \int_0^{300} \lambda e^{-\lambda t} dt = \left[-e^{-\lambda t} \right]_0^{300} = 1 - e^{-300\lambda}$$

$$\text{Ainsi } P(T \geq 300) = P(\overline{[0, 300]}) = 1 - P([0, 300]) = e^{-300\lambda} = e^{-\frac{3 \text{Log} 2}{2}} \approx 0,354$$

$$3) a) \int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx ?$$

$$\text{On pose } \begin{cases} U(x) = \lambda x \\ V'(x) = e^{-\lambda x} \end{cases} \quad \begin{cases} U'(x) = \lambda \\ V(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx &= \left[-x e^{-\lambda x} \right]_0^A + \int_0^A e^{-\lambda x} dx = -A e^{-\lambda A} + \left[-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda x} \right]_0^A \\ &= -A e^{-\lambda A} + \left(-\frac{1}{\lambda} e^{-\lambda A} \right) + \frac{1}{\lambda} = \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda} \end{aligned}$$

$$b) d_n = \lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A \lambda x e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{-\lambda A e^{-\lambda A} - e^{-\lambda A} + 1}{\lambda} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\text{Car } \lim_{x \rightarrow -\infty} x e^x = 0 \text{ et } \lim_{-\infty} e^x = 0 \text{ en posant } x = -\lambda A$$

$$\text{D'où } d_n = \frac{1}{\lambda} = \frac{200}{\text{Log} 2} \approx 289 \text{ semaines}$$