

EXERCICES**Exercice 1 :**

Soit $z \in \mathbb{C} \setminus 1$ et $Z = \frac{z-1}{1-\bar{z}}$

1°/ Montrer que $|Z| = 1$

2°/ Montrer que $\frac{Z-1}{z-1} \in \mathbb{R}$

3°/ Etablir que $\frac{Z+1}{z-1}$ est un imaginaire pur

4°/ Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer une équation cartésienne de l'ensemble des points M d'affixes z tels que : $Z \in \mathbb{R}$. Construire cet ensemble.

Exercice 2 :

Soit $Z = z^2 + z - \bar{z}$ ou $z \in \mathbb{C}$

1°/ Trouver les nombres complexes z tels que $Z = 2i$.

2°/ Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z dans chacun des cas suivants :

a) $Z \in \mathbb{R}$.

b) $Z \in i\mathbb{R}$.

Exercice 3 :

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $Z = (1+i)\bar{z}$

1°/ Soit r le module de z . Exprimer en fonction de r le module de Z

2°/ Soit θ un argument de z . Exprimer en fonction de θ un argument de Z

3°/ Trouver l'ensemble des points M d'affixe z tel que $|Z| = 2$

4°/ Trouver l'ensemble des points M d'affixe z tel que le point N d'affixe Z soit situé sur la droite $\Delta: 2x + y + 4 = 0$.

5°/ Trouver l'ensemble des points M d'affixe z tel que $Z \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4 :

Le plan complexe $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$,

Soit A d'affixe $2i$.

Soit φ est l'application de $\mathcal{P} \setminus \{A\} \rightarrow \mathcal{P}$ et qui à tout point M

d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{2iz - 5}{z - 2i}$

1°/ Montrer que $M' \neq A$.

2°/ Exprimer z en fonction de z' .

3°/ Soit B, C les points d'affixes respectives $-i$ et $5i$. Montrer que B et C sont invariants par φ .

4°/ Montrer que si M appartient à la droite (BC) privée de A alors son image M' par φ , appartient à (BC) .

5°/a) Montrer que pour tout nombre complexe $z \neq 2$ on a :

$$|z' - 2i| \cdot |z - 2i| = 9$$

b) En déduire que pour tout point M appartenant au cercle Γ de centre A et de rayon 3, le point M' appartient à Γ .

Exercice 5 :

Soit a, b et c trois complexes non nuls de même module et vérifiant $a+b+c=0$.

A - 1°/ On pose $p = \frac{a}{c}$ et $q = \frac{b}{c}$

a) Prouver que $|p|=|q|=1$

b) Prouver que : $p+q=-1$

2°/ En déduire que $p = \frac{-1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ ou $p = \frac{-1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$

B - Soit A d'affixe a , B d'affixe b , C d'affixe c

1°/ Prouver que O est le centre de gravité du triangle ABC .

2°/ Prouver que A, B, C appartiennent à un même cercle de centre O .

Exercice 6 :

Soit a, b, c trois complexes non nuls et de même module.

1°/ On pose $W = \bar{b}c - b\bar{c}$.

Prouver que W est un nombre imaginaire pur.

2°/ On pose $t = \frac{b+c}{b-c}$. Prouver que t est un imaginaire pur

3°/ Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$ H d'affixe $a+b+c$

a) Prouver que $(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AH}) \equiv \arg(t) \pmod{2\pi}$

b) En déduire que $(CB) \perp (AH)$.

Exercice 7 :

Ecrire sous la forme trigonométrique le complexe z dans chacun des cas suivants :

1°/ $z = (-1+i)$;

2°/ $z = \frac{1+i \operatorname{tg} \alpha}{1-i \operatorname{tg} \alpha}$, où $\alpha \in \mathbf{R}$;

3°/ $z = \left(\frac{\sqrt{3}-i}{1+i} \right)^n$, où $n \in \mathbf{N}^*$;

4°/ $z = 1+i+(1-i) \operatorname{tg} \theta$ avec $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$;

5°/ $z = 1 + \cos \varphi + i \sin \varphi$ avec $\varphi \in]0, 2\pi[\setminus \{\pi\}$.

6°/ $z = \cos \alpha + i(1 + \sin \alpha)$ avec $\alpha \in]0, \pi[$.

Exercice 8 :

Soit z_1 et z_2 deux complexes de module 1. Soit $Z = \frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2}$.

1°/ Montrer que Z est un réel positif.

2°/ Soient deux points A et B d'affixes respectives a et b où a et b sont 2 complexes non nuls, dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Calculer en fonction de a et b l'affixe z_I du point I barycentre des points A et B affectés respectivement aux coefficients $|b|$ et $|a|$.

Exercice 9 :

1°/ Soit φ un réel de l'intervalle $[-\pi, \pi]$ et z le nombre complexe défini par : $z = \frac{1}{2}(\sin \varphi + i(1 - \cos \varphi))$

Déterminer en fonction de φ , le module et un argument de z .

2°/ Dans cette question, φ est un réel de l'intervalle $]0, \pi[$.

Déterminer le module et un argument de chacun des nombres complexes suivants : $z - i$ et $\frac{z}{z - i}$ où z étant le nombre complexe donné au 1°/.

3°/ Dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(o, \vec{i}, \vec{j})$ on considère les points M et N d'affixes respectives $z - i$ et $\frac{z}{z - i}$.

Déterminer les ensembles décrits respectivement par les points M et N lorsque φ varie dans l'intervalle $]0, \pi[$. Représenter ces ensembles.

Exercice 10 :

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

1°/ Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $\arg(z - i\bar{z} + 1) \equiv \frac{\pi}{4} (\pi)$.

2°/ Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $\frac{z + 2i}{(1 + i)z - 1}$ soit un réel strictement positif.

3°/ Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tel que : $(z + 3i)^3$ soit un réel.

Exercice 11 :

Soit a un complexe non nul.

On pose $a = [r, \theta]$. $0 \leq \theta \leq 2\pi$

Déterminer suivant les différentes valeurs de θ la forme trigonométrique des complexes : $b = a + i\bar{a}$ et $c = a + e^{i\frac{\pi}{3}}\bar{a}$

Exercice 12 :

1°/ Montrer que : $1 + e^{i\alpha} = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$.

2°/ Montrer que $\sum_{k=0}^n C_n^k e^{i\alpha k} = 2^n \cos^n\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{n\alpha}{2}}$.

3°/ En déduire $\sum_{k=0}^n C_n^k \cos(\alpha k)$ et $\sum_{k=0}^n C_n^k \sin(\alpha k)$

Exercice 13 :

1°/ Montrer que $\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} = \frac{2}{1 - e^{i\frac{\pi}{n}}}$

2°/ En déduire que $\sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \cotg\left(\frac{\pi}{2n}\right)$

3°/ Soit $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)$. Prouver que $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{2}{\pi}$

Exercice 14 :

1°/ On pose $Z = \frac{e^{i\alpha} - e^{-i\beta}}{e^{i\alpha} + e^{i\beta}}$ où $0 < \alpha < \pi$ et $0 < \beta < \pi$

Prouver que Z est un nombre imaginaire pur.

2°/ on pose $W = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} + 1}$ où $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

Prouver que $W = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \operatorname{tg}\left(\frac{\theta}{2}\right)$

3°/ Le plan P est rapporté orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. Soit A d'affixe $e^{i\alpha}$,

B d'affixe $e^{i\alpha}$ et C d'affixe $-e^{i\beta}$, supposé distinct.

a) Prouver que ABC est un triangle rectangle en A

b) Trouver une relation entre α et β pour que ABC soit isocèle.

Exercice 15 :

Soit z un complexe $\neq 0$; $R(O, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé.

A d'affixe z ; B d'affixe $\bar{z}$ et C d'affixe $\frac{z^2}{z}$

1°/ prouver que A , B et C appartiennent à un même cercle de centre O

2°/ prouver que ABC est un triangle isocèle de sommet principal A .

3°/ on suppose que la partie réelle de z est positive. Prouver que :

$$(\widehat{CB}, \widehat{CA}) \equiv \arg(z) \pmod{2\pi}$$

$$4^\circ \text{ soit } f : \begin{cases} p \setminus \{0\} \longrightarrow P \\ M(z) \longrightarrow M'(z') / z' = \bar{z} + \frac{z^2}{z} \end{cases}$$

a) on pose $z = r e^{i\theta}$ ($r > 0$). Prouver que $z' = 2r \cos(2\theta) \cdot e^{i\theta}$

b) prouver que : $\overline{OM'} = 2 \cos(2\theta) \cdot \overline{OM}$. Que peut-on conclure sur O , M et M' ?

c) trouver et construire l'ensemble (E) des points $M(z)$ tel que $z' = z$.

Exercice 16 :

Linéariser : 1°/ $\cos^3 x \cdot \sin 2x$

2°/ $\cos^2 2x \cdot \sin 3x$

3°/ $\cos^4 x \cdot \sin x$

Exercice 17 :

Soit dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes :

$$(E) : 2z^2 + (\sqrt{3} - 3i)z - 4 = 0$$

1°/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E).

2°/ On note z_1 et z_2 les deux solutions (z_1 étant la racine de module 1).

a) Mettre z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

b) On considère dans le plan $\mathbb{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$ les deux points M_1 et M_2 d'affixes respectives z_1 et z_2 .

Donner une construction géométriques des points M_1 et M_2 .

Exercice 18 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{i}, \vec{j})$. Soit ω un nombre complexe d'argument θ tel que $\theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$ et de partie imaginaire $\operatorname{tg} \theta$.

1°/ a) Ecrire la forme trigonométrique de ω .

b) En déduire la forme algébrique de ω .

2°/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation :

$$2z^2 - (1 + i\sqrt{3})z - 1 + i\sqrt{3} = 0$$

On appelle z_1 la solution réelle; z_2 l'autre solution.

3°/ On considère les points A , B et C d'affixes respectives : z_1 ; z_2 et ω .

a) Déterminer θ pour que $CA = CB$.

b) Montrer que dans ce cas le triangle ABC est équilatéral.

Exercice 19 :

Soit a un paramètre complexe non nul.

1°/ Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation à inconnu z :

$$z^2 - a(1+i)z + ia^2 = 0 \quad \text{On note } z_1 \text{ et } z_2 \text{ les deux solutions.}$$

2°/ On pose $a = \rho e^{i\theta}$ où $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$.

a) Mettre les solutions z_1 et z_2 sous forme trigonométrique.

b) Prouver que $z_1^{2n} + z_2^{2n} = a^{2n}(1 + (-1)^n)$

3°/ Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$. On donne A et B deux points d'affixes respectives z_1 et z_2 .

Prouver que OAB est un triangle isocèle rectangle.

Exercice 20 :

1°/ Montrer que : $1 + e^{i\alpha} = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$ avec $\alpha \in \mathbf{R}$.

$$1 - e^{i\alpha} = -2i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$$

2°/ Résoudre dans $\mathbf{C}$:

a) $z^{2n} + z^n + 1 = 0$ où $n \in \mathbf{N}^*$

b) $\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n + \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^n + 1 = 0$ (on pourra utiliser le 1°/ pour donner une écriture simple des solutions).

Exercice 21 :

Soit t un réel de l'intervalle $]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\mathcal{R}(o, \vec{i}, \vec{j})$ un repère orthonormé de P .

1°/ a) Résoudre dans $\mathbf{C}$ l'équation d'inconnu z

$(E) : z^2 - 2(1 + \cos 2t)z + 2(1 + \cos 2t) = 0$ (on notera z_1 la solution dont la partie imaginaire est strictement positive et z_2 l'autre solution).

b) Mettre z_1 sous forme trigonométrique.

2°/ soit A , M et M_1 les points d'affixes respectives 1 , $1 + e^{it}$ et z_1 .

a) Ecrire en fonction de t les affixes des vecteurs $\vec{OM}_1$ et $\vec{AM}$.

b) En déduire une relation entre $\vec{OM}_1$ et $\vec{AM}$.

Que peut-on conclure sur les droites (OM_1) et (AM) ?

Exercice 22 :

Pour tout nombre complexe z on pose

$$f(z) = z^3 + 2(-\sqrt{3} + i)z^2 + 4(1 - i\sqrt{3})z + 8i$$

1°/ a) Montrer que l'équation $f(z) = 0$ possède une racine imaginaire pure z_0 que l'on déterminera.

b) Résoudre alors l'équation $f(z) = 0$. On notera z_1 et z_2 les deux autres racines, z_1 étant celle qui a une partie imaginaire négative.

2°/ On pose $w = \frac{z_1}{z_0}$

a) Donner la forme trigonométrique de w

b) Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormé direct $(o, \vec{u}, \vec{v})$. A tout nombre complexe z non nul on associe les points M, M_1 et M_2 d'affixes respectives z, wz et w^2z .

Montrer que OMM_1M_2 est un losange.

Exercice 23 :

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{u}, \vec{v})$.

1°/ Soit dans $\mathcal{P}$ les points M_1, M_2 et M_3 d'affixes respectives les complexes z_1, z_2 et z_3 . Montrer que le triangle $M_1M_2M_3$ est équilatéral

si et seulement si $z_1 + jz_2 + j^2z_3 = 0$ où $j = e^{j\frac{2\pi}{3}}$

$$\text{ou } z_1 + j^2z_2 + jz_3 = 0$$

2°/ Soit dans l'ensemble $\mathbf{C}$ des nombres complexes l'équation

$$(E) : z^3 - (1 + a + ia)z^2 + a(1 + i + ia)z - ia^2 = 0$$

a désigne un paramètre complexe.

a) Vérifier que 1 est une solution de (E) .

b) Calculer les deux autres solutions z' et z'' de (E) .

c) Soit dans $\mathcal{P}$ les points A, B et C d'affixes respectives 1, z' et z'' .

Déterminer les différentes valeurs du complexe a de manière que le triangle ABC soit équilatéral (on pourra utiliser la question 1°/).

Exercice 24 :

On considère dans l'ensemble des nombre complexes l'équation :

$$(E) : z^3 + 2(1 - i)z^2 + (1 + m^2 - 4i)z - 2i(1 + m^2) = 0$$

où m est un paramètre réel .

1°/a) Montrer que (E) admet une racine imaginaire pure z_0 que l'on déterminera .

b) Calculer en fonction de m les deux autres racines .

2°/ Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, M' et M'' d'affixes respectives $2i$, $-2-2i$, $-1-im$ et $-1+im$.

a) Montrer que AM'BM'' est un parallélogramme .

b) Déterminer m pour que AM'BM'' soit un rectangle .

Exercice 25 :

Dans le plan complexe P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$ on considère les points A et B d'affixes respectives a et 1 où a est un nombre complexe donné différent de 1 .

Soit f l'application de $P \setminus \{B\}$ dans P qui, à tout point M d'affixe z , associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \frac{z-a}{z-1}$

1°) Montrer que les affixes des points invariants par f sont solutions de l'équation $E : z^2 - 2z + a = 0$.

2°) a) On suppose que $a = 1 + e^{2i\theta}$ où $\theta \in]\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}[$. Résoudre l'équation E

b) Mettre sous forme trigonométrique chacune des solutions de E.

3°) Dans cette question on suppose que $a = -1$.

Soit M un point de $P \setminus \{B\}$ d'affixe z et M' le point d'affixe $z' = f(z)$.

a) Montrer que $\overset{\wedge}{\rightarrow}(u, BM) + \overset{\wedge}{\rightarrow}(u, BM') \equiv 0 \pmod{2\pi}$.

En déduire que la demi-droite $[BA)$ est une bissectrice de

l'angle $\overset{\rightarrow}{\angle}(BM, BM')$.

b) Montrer que z' est imaginaire pur si et seulement si $|z| = 1$.

c) En déduire la construction du point M' image d'un point M du cercle trigonométrique privé de B .

Exercice 26 :

Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Soit Δ la droite d'équation $x = 2$ et A le point d'affixe 2.

1°/ Vérifier que Δ est l'ensemble des points M d'affixe z tels que $4 - z - \bar{z} = 0$.

2°/ Soit φ l'application de $P \setminus \Delta$ dans P , qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = \frac{4 - z\bar{z}}{4 - z - \bar{z}}$.

a) Montrer que z' est un nombre réel.

b) Déterminer l'ensemble (Γ) des points M d'affixe z tel que $z' = k$ où k est un réel donné différent de 2.

3°/ a) Montrer que pour tout nombre complexe z dont la partie réelle est différente de 2, on a : $|z' - z| = |z' - 2|$.

b) En déduire que pour tout point M de $P \setminus \Delta$, le point M' est l'intersection de la médiatrice de $[AM]$ avec l'axe des abscisses.

4°/ Soit D la droite d'équation $x = 3$.

Pour tout point M de D , on désigne par M' le point $\varphi(M)$ et par M'' le symétrique de M' par rapport à (AM) .

Montrer que $MM'' = d(M'', D)$

SOLUTIONS

Solution 1 :

$$1^{\circ} / |Z| = \frac{|z-1|}{|1-\bar{z}|} = \frac{|z-1|}{|1-\bar{z}|} ; \text{ or } |1-\bar{z}| = |\overline{1-z}| = |1-z| = |z-1|$$

$$\text{d'où : } |Z| = \frac{|z-1|}{|z-1|} = 1.$$

$$2^{\circ} / \frac{Z-1}{z-1} = \frac{\frac{z-1}{1-\bar{z}} - 1}{z-1} = \frac{z+\bar{z}-2}{(z-1)(1-\bar{z})} = \frac{z+\bar{z}-2}{(z+\bar{z}-1-z\bar{z})}$$

$$\text{or : } z+\bar{z}=2 \quad \Re z \Rightarrow z+\bar{z} \in \mathbb{R} \quad \text{et } z\bar{z} = |z|^2 \geq 0 \in \mathbb{R}$$

$$\text{et par suite } \frac{Z-1}{z-1} \in \mathbb{R}$$

$$3^{\circ} / \frac{Z-1}{z-1} = \frac{\frac{z-1}{1-\bar{z}} + 1}{z-1} = \frac{z-\bar{z}}{(z-1)(1-\bar{z})} = \frac{z-\bar{z}}{z+\bar{z}-1-|z|^2}$$

$$\text{or : } z-\bar{z} = i \quad 2 \operatorname{Im}(z) \quad \text{donc } z-\bar{z} \in i\mathbb{R} \quad \text{et } z+\bar{z}-1-|z|^2 \in \mathbb{R}^*$$

$$\text{d'où } \frac{Z-1}{z-1} \text{ est un nombre imaginaire pur.}$$

$$4^{\circ} / Z = \frac{z-1}{(1-z)} = \frac{(z-1)(1-z)}{|1-z|^2} \quad (\text{car } |1-z|^2 = (1-\bar{z})(1-z))$$

$$\begin{aligned} \text{On pose } z = x + iy \Rightarrow 2z - z^2 - 1 &= 2(x + iy) - (x + iy)^2 - 1 \\ &= -x^2 + y^2 + 2x - 1 + i(2y - 2xy) \end{aligned}$$

$Z \in \mathbb{R}$ si et seulement si

$$\begin{cases} \operatorname{Im}(Z) = 0 \\ \text{avec } z \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2y - 2xy = 0 \\ (x, y) \neq (1, 0) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \text{ ou } x = 1 \\ (x, y) \neq (1, 0) \end{cases}$$

L'ensemble est la réunion des deux droites $D_1 : x = 1$ et $D_2 : y = 0$ privé du point $A(1, 0)$

Solution 2 :

1°/ Soit $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$Z = z^2 + z - \bar{z} = (x + yi)^2 + x + yi - (x - yi) = x^2 - y^2 + i(2xy + 2y) \\ = x^2 - y^2 + i2y(x + 1)$$

$$Z = 2i \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 0 \\ \text{et} \\ 2y(x + 1) = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \text{ ou } x = -y \\ \text{et} \\ y(x + 1) = 1 \end{cases}$$

$$\bullet 1^{\text{er}} \text{ cas : } \begin{cases} x = y \\ y(x + 1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x \\ x(x + 1) = 1 \end{cases}$$

$$* x(x + 1) = 1 \Leftrightarrow x^2 + x - 1 = 0 ; \Delta = 5 ;$$

$$x' = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}, \quad x'' = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

$$\text{D'où } z = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2}(1 + i) \quad \text{ou} \quad z = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}(1 + i)$$

$$\bullet 2^{\text{ème}} \text{ cas : } \begin{cases} x = -y \\ y(x + 1) = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x \\ -x(x + 1) = 1 \end{cases}$$

$$* -x(x + 1) = 1 \Leftrightarrow x^2 + x + 1 = 0 ;$$

$$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0 \text{ impossible car } x \in \mathbb{R}.$$

$$\text{Conclusion : les complexes } z \text{ sont : } -\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)(1 + i) \text{ ou } \frac{\sqrt{5} - 1}{2}(1 + i)$$

2°/

$$\text{a) } Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(Z) = 0 \Leftrightarrow 2y(x + 1) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } x = -1$$

D'où l'ensemble (E_1) est la réunion des deux droites $D_1 : y = 0$ et $D_2 : x = -1$; $E_1 = D_1 \cup D_2$

$$\text{b) } Z \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Re(Z) = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x = y \text{ ou } x = -y$$

Soit $\Delta_1 : x - y = 0$ et $\Delta_2 : x + y = 0$. D'où l'ensemble

$$(E_2) = \Delta_1 \cup \Delta_2.$$

Solution 3 :

$$1^\circ / |Z| = |(1+i)\bar{z}| = |1+i| \cdot |\bar{z}| = \sqrt{2}|z| = \sqrt{2}r \text{ donc } |Z| = \sqrt{2}r.$$

2°/ Soit α un argument de Z .

1^{ère} Méthode

$$Z = |Z|e^{i\alpha} = r\sqrt{2}e^{i\alpha}$$

$$\text{Or } Z = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}re^{-i\theta} = |Z|e^{i(-\theta+\frac{\pi}{4})} \quad \text{car } (1+i = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}})$$

$$\Rightarrow \alpha \equiv \frac{\pi}{4} - \theta \pmod{2\pi}.$$

2^{ème} Méthode

$$\arg Z \equiv \arg[(1+i)\bar{z}] \pmod{2\pi} \equiv \arg(1+i) + \arg(\bar{z}) \pmod{2\pi}$$

$$\equiv \frac{\pi}{4} - \theta \pmod{2\pi}$$

$$3^\circ / \text{Soit } E = \{M(z) \in \mathcal{P} / |Z| = 2\}$$

$$|Z| = 2 \Leftrightarrow r\sqrt{2} = 2 \Leftrightarrow r = \sqrt{2}$$

$$\text{Donc } E = \{M(z) \in \mathcal{P} / |z| = \sqrt{2}\} = \{M \in \mathcal{P} / OM = \sqrt{2}\}$$

Conclusion : E est le cercle de centre O et de rayon $\sqrt{2}$

$$4^\circ / \text{Soit } F = \{M(z) / N(z) \in \Delta : 2x + y + 4 = 0\}$$

Traisons cette question analytiquement :

On pose $z = x + iy$ avec $(x, y) \in \mathbf{R}^2$

$$\text{D'où } Z = (1+i)(x-iy) = x+y+i(x-y) \quad \text{ainsi } N(x+y, x-y)$$

$$N \in \Delta \Leftrightarrow 2(x+y) + x - y + 4 = 0 \Leftrightarrow 3x + y + 4 = 0$$

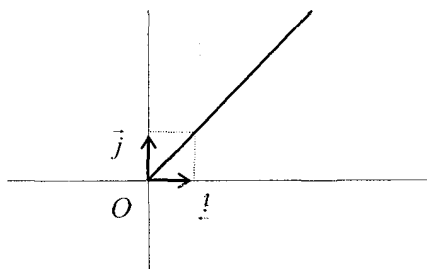
Conclusion : L'ensemble F est la droite Δ' d'équation $3x + y + 4 = 0$.

$$5^\circ / \text{Soit } H = \{M(z) / Z \in \mathbf{R}_+^*\}$$

1^{ère} Méthode

$$Z \in \mathbf{R}_+^* \Leftrightarrow x+y+i(x-y) \in \mathbf{R}_+^* \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=0 \\ x+y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 2x>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ x>0 \end{cases}$$

Conclusion : H est la demi droite d'origine O , de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$ située dans le demi-plan : $y > 0$ privé de O .



2^e Méthode

$$Z \in \mathbf{R}_+^* \Leftrightarrow \arg Z \equiv 0 (2\pi) \Leftrightarrow \arg[(1+i)\bar{z}] \equiv 0 (2\pi)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\pi}{4} - \arg z \equiv 0 (2\pi) \Leftrightarrow \arg z \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi) \Leftrightarrow (\vec{i}, \vec{OM}) \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi).$$

M décrit la demi-droite d'origine O , de vecteur directeur $\vec{u} = \vec{i} + \vec{j}$, située dans le demi-plan $y > 0$ privé de O .

Remarque : étant donné $\alpha \in \mathbf{R}$, l'ensemble des points M du plan tel que $(\vec{i}, \vec{WM}) \equiv \alpha (2\pi)$ est une demi-droite d'origine W , de vecteur directeur $\vec{u} = \cos \alpha \vec{i} + \sin \alpha \vec{j}$ privé du point W .

Solution 4 :

$$1^\circ / \text{ Si } M' = A \Leftrightarrow z' = 2i \Leftrightarrow \frac{2iz - 5}{z - 2i} = 2i \Leftrightarrow 2iz - 5 = 2iz + 4$$

$\Rightarrow -5 = 4$ ce qui est absurde. Donc $M' \neq A$.

$$2^\circ / z' = \frac{2iz - 5}{z - 2i} \Leftrightarrow zz' - 2iz' = 2iz - 5 \Leftrightarrow z(z' - 2i) = 2iz' - 5$$

$$\text{or } z' \neq 2i \text{ (d'après } 1^\circ) \text{ d'où } z = \frac{2iz' - 5}{z' - 2i}$$

3°/ • Soit $B' = \varphi(B)$

$$\text{On a : } z_{B'} = \frac{2iz_B - 5}{z_B - 2i} = \frac{2i(-i) - 5}{-i - 2i} = -i$$

d'où $B' = B$ et par suite B est un point invariant par φ

• Soit $C' = \varphi(C)$

$$\text{On a : } z_{C'} = \frac{2iz_C - 5}{z_C} = \frac{2i(5i) - 5}{5i - 2i} = \frac{-15}{3i} = 5i$$

d'où $C' = C$ et par suite C est un point invariant par φ

4°/ $M \in (BC) \Rightarrow M \in (O, \bar{j})$ d'où $z_M = yi$ où $y \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$$z_{M'} = \frac{2iz_M - 5}{z_M - 2i} = \frac{2i(yi) - 5}{yi - 2i} = \frac{-2y - 5}{(y - 2)i} = \frac{(2y + 5)}{y - 2}i = \lambda i \text{ où } \lambda = \frac{2y + 5}{y - 2}$$

d'où $z_{M'}$ est imaginaire et par suite $M' \in (O, \bar{j})$

conclusion : $M' \in (BC)$.

$$5)a) |z' - 2i| \cdot |z - 2i| = \left| \left(\frac{2iz - 5}{z - 2i} - 2i \right) (z - 2i) \right| = |(-5 - 4)| = 9$$

$$b) M \in \Gamma \Leftrightarrow M \in C(A, 3) \Leftrightarrow AM = 3 \Leftrightarrow |z - 2i| = 3$$

$$\text{Or } |z' - 2i| \cdot |z - 2i| = 9 \Rightarrow |z' - 2i| = 3 \Rightarrow AM' = 3 \Rightarrow M' \in \Gamma$$

Solution 5 :

$$A - 1^\circ/a) * |p| = \frac{|a|}{|c|} = \frac{|a|}{|c|} \text{ or } |a| = |c| \text{ d'où } |p| = 1$$

$$* |q| = \frac{|b|}{|c|} = \frac{|b|}{|c|} \text{ or } |b| = |c| \text{ d'où } |q| = 1$$

$$\text{Conclusion : } |p| = |q| = 1$$

$$\text{b) } p+q = \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c} \text{ or } a+b+c=0 \text{ d'où } a+b=-c \text{ et par}$$

$$\text{suite } p+q = \frac{-c}{c} = -1$$

$$2^\circ \text{ Soit } p = x + yi$$

$$\text{On a : } |p| = 1 \Leftrightarrow |x + yi| = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$$

$$\text{On a : } |q| = 1 \text{ or } q = -1 - p \text{ (d'après } 1^\circ \text{ b))}$$

$$\text{donc } |-1 - p| = 1 \Leftrightarrow |1 + p| = 1 \Leftrightarrow |1 + x + yi| = 1 \Leftrightarrow (1+x)^2 + y^2 = 1$$

$$\text{On a : } \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ (1+x)^2 + y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 1 - x^2 \\ (1+x)^2 + 1 - x^2 = 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$(2)$$

$$(2) : \Leftrightarrow 1 + 2x + x^2 + 1 - x^2 = 1 \Leftrightarrow 2x = -1 \text{ d'où } x = -\frac{1}{2}$$

$$x = -\frac{1}{2} \Rightarrow y^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \text{ d'où } y = \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{Conclusion : } p = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } p = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

B - 1° Pour montrer que O est le centre de gravité du triangle ABC , il

suffit de prouver que : $\vec{OA} + \vec{OB} + \vec{OC} = \vec{0}$ c'est à dire

$$(z_A - z_O) + (z_B - z_O) + (z_C - z_O) = a + b + c = 0 \text{ (d'après les données)}$$

d'où O est le centre de gravité de ABC .

$$2^\circ \text{ } OA = |z_A - z_O| = |a|$$

$$OB = |z_B - z_O| = |b| = |a|$$

$$OC = |z_C - z_O| = |c| = |a|$$

On a : $OA = OB = OC$ donc A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O .

Solution 6 :

$$1^\circ \overline{W} = b\bar{c} - \bar{b}c = -W \text{ donc } W \text{ est un nombre imaginaire pur.}$$

$$2^\circ t = \frac{b+c}{b-c} = \frac{(b+c)(\bar{b}-\bar{c})}{(b-c)(\bar{b}-\bar{c})} \text{ Or } (b-c)(\bar{b}-\bar{c}) = (b-c)(\overline{b-c}) = |b-c|^2$$

$$(b+c)(\bar{b}-\bar{c}) = b\bar{b} - b\bar{c} + \bar{b}c - c\bar{c} = |b|^2 + W - |c|^2 \text{ or } |b| = |c| \text{ donc}$$

$$(b+c)(\bar{b}-\bar{c}) = W \text{ et par suite } t = \frac{W}{|b-c|^2} \text{ d'où } t \text{ est un nombre}$$

imaginaire pur.

$$3^\circ / (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AH}) \equiv (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{i}) + (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{AH}) \pmod{2\pi}$$

$$\equiv -\arg(z_B - z_C) + \arg(z_H - z_A) \pmod{2\pi} \equiv \arg\left(\frac{z_H - z_A}{z_B - z_C}\right) \pmod{2\pi}$$

$$\equiv \arg\left(\frac{b+c}{b-c}\right) \pmod{2\pi} \text{ Or } \frac{b+c}{b-c} = t \text{ d'où } (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AH}) \equiv \arg t \pmod{2\pi}$$

$$\text{b) } t \text{ étant un nombre imaginaire pur donc } \arg t \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

$$\text{ou } \arg t \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \text{ d'où } (\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AH}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \text{ ou}$$

$$(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AH}) \equiv -\frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

Conclusion : $(CB) \perp (AH)$

Solution 7 :

$$1^\circ / |-1+i| = \sqrt{2} ; \text{ on a : } \cos \alpha = \frac{-\sqrt{2}}{2}, \quad \sin \alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{d'où } \alpha \equiv \frac{3\pi}{4} \pmod{2\pi} \text{ d'où } z = \sqrt{2} \left(\cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right).$$

$$2^\circ / z = \frac{1+i \operatorname{tg} \alpha}{1-i \operatorname{tg} \alpha} = \frac{1+i \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}}{1-i \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}} = \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\cos \alpha - i \sin \alpha}$$

$$z = \frac{[1, \alpha]}{[1, -\alpha]} = [1, 2\alpha] \text{ d'où } z = 1 \cdot (\cos(2\alpha) + i \sin(2\alpha)).$$

$$3^\circ / \text{Soit } z_0 = \frac{\sqrt{3}-i}{1+i} = \frac{[2, \frac{-\pi}{6}]}{[\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}]} = [\sqrt{2}, -\frac{5\pi}{12}]$$

$$\text{d'où } z_0 = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right) + i \sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right) \right)$$

$$\text{or } z = z_0^n \text{ d'où } z = \sqrt{2}^n \left[\cos \frac{-5\pi n}{12} + i \sin \frac{-5\pi n}{12} \right]$$

$$4^\circ / z = 1+i+(1-i)\operatorname{tg} \theta = 1+i + \frac{(1-i)\sin \theta}{\cos \theta} = \frac{(1+i)\cos \theta + (1-i)\sin \theta}{\cos \theta}$$

$$z = \frac{\cos \theta + i \cos \theta + \sin \theta - i \sin \theta}{\cos \theta} = \frac{(\cos \theta - i \sin \theta) + (i \cos \theta + \sin \theta)}{\cos \theta}$$

$$z = \frac{(\cos\theta - i\sin\theta) + i(\cos\theta - i\sin\theta)}{\cos\theta} = \frac{(1+i)(\cos\theta - i\sin\theta)}{\cos\theta}$$

or $1+i = [\sqrt{2}, \frac{\pi}{4}]$ et $\cos\theta - i\sin\theta = [1, -\theta]$

$$\Rightarrow (1+i)(\cos\theta - i\sin\theta) = [\sqrt{2}, \frac{\pi}{4} - \theta]$$

or $\cos\theta > 0$ car $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ d'où $z = \frac{\sqrt{2}}{\cos\theta} (\cos(\frac{\pi}{4} - \theta) + i\sin(\frac{\pi}{4} - \theta))$.

$$5^\circ / z = 1 + \cos\varphi + i\sin\varphi = 1 + 2\cos^2\frac{\varphi}{2} - 1 + i \cdot 2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}$$

$$= 2\cos\frac{\varphi}{2}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2})$$

φ	0	π	2π
$\cos(\frac{\varphi}{2})$	1	-1	1

• Si $\varphi \in]0, \pi[$ alors $z = 2\cos\frac{\varphi}{2}(\cos\frac{\varphi}{2} + i\sin\frac{\varphi}{2})$

• Si $\varphi \in]\pi, 2\pi[$ alors $z = -2\cos\frac{\varphi}{2}(\cos(\frac{\varphi}{2} + \pi) + i\sin(\frac{\varphi}{2} + \pi))$

$$6^\circ / z = \cos\alpha + i(1 + \sin\alpha) = (\cos\alpha + i\sin\alpha) + i$$

$$= (\cos\alpha + i\sin\alpha) + (\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}) = (\cos\alpha + \cos\frac{\pi}{2}) + i(\sin\alpha + \sin\frac{\pi}{2})$$

$$\text{or } \cos X + \cos Y = 2\cos(\frac{X+Y}{2})\cos(\frac{X-Y}{2})$$

$$\sin X + \sin Y = 2\sin(\frac{X+Y}{2})\cos(\frac{X-Y}{2})$$

$$\Rightarrow z = 2\cos(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4})\cos(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}) + 2i\sin(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4})\cos(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4})$$

$$= 2\cos(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}) \left[\cos(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}) \right]$$

signe de : $\cos(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4})$ pour $\alpha \in]0, \pi[$:

$$0 < \alpha < \pi \Rightarrow 0 < \frac{\alpha}{2} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \frac{-\pi}{4} < \frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \cos(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4}) > 0$$

$$\text{d'où } z = 2\cos(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{4})(\cos(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}) + i\sin(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{4}))$$

Solution 8 :

$$1^{\circ} / Z = \frac{(z_1 + z_2)^2}{z_1 z_2} = \frac{z_1^2 + z_2^2 + 2z_1 z_2}{z_1 z_2} = \frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} + 2$$

$$\text{or } z_1 = [1, \alpha] \text{ et } z_2 = [1, \beta]$$

$$\text{d'où } \frac{z_1}{z_2} = [1, \alpha - \beta] \text{ et } \frac{z_2}{z_1} = [1, \beta - \alpha]$$

$$\Rightarrow Z = \cos(\alpha - \beta) + i \sin(\alpha - \beta) + \cos(\beta - \alpha) + i \sin(\beta - \alpha) + 2 \\ = 2 \cos(\alpha - \beta) + 2 \quad (\text{car } \cos(-X) = \cos X \text{ et } \sin(-X) = -\sin X)$$

$$\Rightarrow Z = 2(\cos(\alpha - \beta) + 1) \in \mathbb{R}_+ \text{ car } -1 \leq \cos(\alpha - \beta) \leq 1.$$

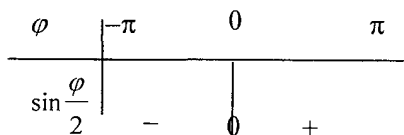
$$2^{\circ} / |b| \cdot \overline{AI} + |a| \cdot \overline{BI} = \vec{0} \Leftrightarrow |b|(z_1 - z_A) + |a|(z_1 - z_B) = 0$$

$$\Leftrightarrow z_1 = \frac{a|b| + b|a|}{|a| + |b|}.$$

Solution 9 :

$$1^{\circ} / z = \frac{1}{2}(\sin \varphi + i 2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}) = \sin \frac{\varphi}{2} (\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2})$$

$$\sin \frac{\varphi}{2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\varphi}{2} = k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$



$$\text{si } \varphi \in [-\pi, 0[\text{ on a : } z = \left[-\sin \frac{\varphi}{2} ; \frac{\varphi}{2} + \pi \right]$$

$$\text{si } \varphi = 0 \text{ on a : } z = 0$$

$$\text{si } \varphi \in]0, \pi] \text{ on a : } z = \left[\sin \frac{\varphi}{2} ; \frac{\varphi}{2} \right]$$

$$\begin{aligned}
 2^\circ / * \quad z - i &= \frac{1}{2} [\sin \varphi + i(1 - \cos \varphi)] - i \\
 &= \frac{1}{2} [\sin \varphi - i(1 + \cos \varphi)] = \frac{1}{2} \left[\sin \varphi - i 2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \right] \\
 &= \cos \frac{\varphi}{2} \left(\sin \frac{\varphi}{2} - i \cos \frac{\varphi}{2} \right) = -i \cos \frac{\varphi}{2} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right)
 \end{aligned}$$

$$\forall \varphi \in]0, \pi[\quad \text{on a : } \frac{\varphi}{2} \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\quad \text{d'où } \cos \frac{\varphi}{2} > 0$$

$$\text{d'où } z - i = \left[1, -\frac{\pi}{2} \right] \cdot \left[\cos \frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi}{2} \right] = \left[\cos \frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi - \pi}{2} \right]$$

$$* \quad \frac{z}{z - i} = \frac{\left[\sin \frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi}{2} \right]}{\left[\cos \frac{\varphi}{2}, \frac{\varphi}{2} - \frac{\pi}{2} \right]} = \left[\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \frac{\pi}{2} \right]$$

3°/ M d'affixe $z - i$ d'où M de coordonnées x et y tels que :

$$\begin{cases} x = \cos \frac{\varphi}{2} \cos \left(\frac{\varphi - \pi}{2} \right) = \cos \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi}{2} = \frac{1}{2} \sin \varphi \\ y = -\frac{(1 + \cos \varphi)}{2} \end{cases}$$

$$\sin \varphi = 2x \quad \text{et} \quad \cos \varphi = -1 - 2y$$

$$\text{comme } \sin^2 \varphi + \cos^2 \varphi = 1 \Leftrightarrow 4x^2 + 4\left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow x^2 + \left(y + \frac{1}{2}\right)^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

d'où M appartient au cercle de centre $\omega(0, -\frac{1}{2})$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

$$\text{Or } \forall \varphi \in]0, \pi[\quad \text{on a : } 0 < x \leq \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad -1 < y < 0$$

M décrit le cercle $C(\omega, \frac{1}{2}) \cap \mathcal{P}^{(+)}$ où $\mathcal{P}^{(+)}$ est le demi-plan

d'équation $x > 0$.

N d'affixe $\frac{z}{z-i}$

$$\text{or } \frac{z}{z-i} = \left[\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] = i \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$$

N de coordonnées $(0, \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2})$ or φ décrit $]0, \pi[$ d'où $\operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}$ décrit l'intervalle $\mathbf{R}_+^*$

d'où N décrit la demi-droite $[oy)$ privée de o d'équation : $\begin{cases} x = 0 \\ y > 0 \end{cases}$

Solution 10 :

$$1^\circ \text{ Soit } E = \left\{ M(z) \in \mathcal{P} / \arg(z - i\bar{z} + 1) \equiv \frac{\pi}{4} + 2k\pi \right\}$$

$$\arg(z - i\bar{z} + 1) \equiv \frac{\pi}{4} + 2k\pi \Leftrightarrow \text{il existe } \alpha \in \mathbf{R}^* \text{ tel que :}$$

$$z - i\bar{z} + 1 = \alpha e^{i\frac{\pi}{4}} = \alpha \sqrt{2}(1+i) \text{ posons } \alpha \sqrt{2} = \beta$$

$$\text{donc } \arg(z - i\bar{z} + 1) \equiv \frac{\pi}{4} + k\pi \Leftrightarrow \text{il existe } \beta \in \mathbf{R}^* / z - i\bar{z} + 1 = \beta + \beta i$$

Posons $(z = x + iy)$

$$x - y + 1 + i(y - x) = \beta + \beta i \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 1 = \beta \\ y - x = \beta \end{cases} \quad (\beta \in \mathbf{R}^*)$$

$x - y + 1 = y - x \Leftrightarrow 2x - 2y + 1 = 0$ c'est une équation cartésienne d'une droite.

Conclusion : L'ensemble E est la droite dont une équation cartésienne est : $2x - 2y + 1 = 0$.

$$2^\circ \text{ Soit } F = \left\{ M(z) \in \mathcal{P} / \frac{z + 2i}{(1+i)z - 1} \in \mathbf{R}_+^* \right\}$$

$$\frac{z+2i}{(1+i)z-1} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{z+2i}{z - \frac{1}{1+i}} = \frac{1}{1+i} \cdot \frac{z+2i}{z - \frac{1-i}{2}}$$

$$\frac{z+2i}{(1+i)z-1} \in \mathbf{R}_+^* \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z+2i}{(1+i)z-1}\right) \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

$$\Leftrightarrow \arg\left(\frac{1}{1+i} \cdot \frac{z+2i}{z - \frac{1-i}{2}}\right) \equiv 0 \pmod{2\pi} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z+2i}{z - \frac{1-i}{2}}\right) - \arg(1+i) \equiv 0 \pmod{2\pi}$$

$$\arg\left(\frac{z+2i}{z - \frac{1-i}{2}}\right) \equiv \arg(1+i) \pmod{2\pi} \Leftrightarrow \arg\left(\frac{z+2i}{z - \frac{1-i}{2}}\right) \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$$

Soit le point A d'affixe $-2i$ et B le point d'affixe $\frac{1-i}{2}$

$$\arg\left(\frac{z+2i}{z - \frac{1-i}{2}}\right) \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi} \Leftrightarrow (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{MA}) \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$$

Conclusion : l'ensemble F est l'arc $[AB]$ privé de A et B , du cercle tangent à la demi-droite $[Bt)$, situé dans le demi-plan de frontière $[AB]$ ne contenant pas $[Bt)$ où $[Bt)$ est la demi droite telle que

$$(\overrightarrow{Bt}, \overrightarrow{BA}) \equiv \frac{\pi}{4} \pmod{2\pi}$$

$$3^\circ / (z+3i)^3 \in \mathbf{R} \Leftrightarrow \begin{cases} z+3i=0 \\ \text{ou} \\ \arg(z+3i)^3 \equiv 0 \pmod{\pi} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z=-3i \\ \text{ou} \\ 3\arg(z+3i) \equiv 0 \pmod{\pi} \end{cases}$$

$$3\arg(z+3i) \equiv 0 \pmod{\pi} \Leftrightarrow 3\arg(z+3i) = k\pi \quad \text{où } k \in \mathbf{Z}$$

$$\arg(z+3i) = \frac{k\pi}{3}$$

$$* \text{ Si } k=3p: \arg(z+3i) = p\pi \Leftrightarrow \arg(z+3i) \equiv 0 \pmod{\pi}$$

$$\Leftrightarrow (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{AM}) \equiv 0 \pmod{\pi} \quad \text{où } A(-3i) \Leftrightarrow M \in D(A, \vec{i}) \setminus \{A\}$$

* Si $k = 3p + 1$: $\arg(z + 3i) = \frac{(3p+1)\pi}{3} \Leftrightarrow \arg(z + 3i) = p\pi + \frac{\pi}{3}$

$\Leftrightarrow \arg(z + 3i) \equiv \frac{\pi}{3} (\pi) \Leftrightarrow$ il existe $\alpha \in \mathbf{R}^*$ tq : $z + 3i = \alpha e^{i\frac{\pi}{3}}$

Posons $z = x + iy \Rightarrow x + iy + 3i = \frac{\alpha}{2} + i \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \quad \alpha \in \mathbf{R}^*$

$$\begin{cases} x = \frac{\alpha}{2} \\ y = -3 + \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \alpha \in \mathbf{R}^*$$

d'où $M \in \Delta$: $y = -3 + \sqrt{3}x$ privé du point $A(0, -3)$

* Si $k = 3p + 2$

$\arg(z + 3i) = (3p + 2)\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \arg(z + 3i) = p\pi + \frac{2\pi}{3} \Leftrightarrow$

il existe $\alpha \in \mathbf{R}^* / z + 3i = \alpha e^{i\frac{2\pi}{3}} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{\alpha}{2} \\ y = -3 + \alpha \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \quad \alpha \in \mathbf{R}^*$

d'où $M \in \Delta'$: $y = -3 - x\sqrt{3}$ privé du point $A(0, -3)$

Conclusion : L'ensemble demandé est $D \cup \Delta \cup \Delta'$ où

$D : y = -3$; $\Delta : y = -3 + \sqrt{3}x$; $\Delta' : y = -3 - x\sqrt{3}$

Solution 11 :

$a = [r, \theta] = r e^{i\theta}$

* $b = a + i\bar{a} = r e^{i\theta} + i r e^{-i\theta} = r(e^{i\theta} + i e^{-i\theta})$ or $i = e^{i\frac{\pi}{2}}$ d'où

$e^{i\theta} + i e^{-i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta + i(\cos \theta - i \sin \theta)$

$= (\cos \theta + \sin \theta) + i(\cos \theta + \sin \theta)$

$= \sqrt{2}(\cos \theta + \sin \theta) e^{i\frac{\pi}{4}}$

$$b = \sqrt{2}r(\cos \theta + \sin \theta) e^{i\frac{\pi}{4}}$$

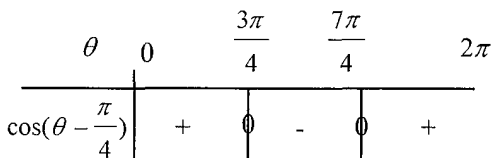
$$\text{Or } \cos \theta + \sin \theta = \sqrt{2} \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\text{d'où } b = 2r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) e^{i\frac{\pi}{4}}$$

• Signe de $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right)$:

$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) = 0 \Leftrightarrow \theta - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4} + k\pi \quad \text{or } 0 \leq \theta \leq 2\pi \text{ d'où } \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \theta = \frac{7\pi}{4}$$



$$\text{si } \theta \in \left[0, \frac{3\pi}{4}\right] \cup \left[\frac{7\pi}{4}, 2\pi\right] \text{ on a : } b = \left[2r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right), \frac{\pi}{4}\right]$$

$$\text{si } \theta = \frac{3\pi}{4} \text{ ou } \theta = \frac{7\pi}{4} : \quad b = 0$$

$$\text{si } \theta \in \left[\frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}\right] : \quad b = \left[-2r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right), \frac{5\pi}{4}\right]$$

$$* \quad c = a + e^{i\frac{\pi}{3}} \bar{a}$$

$$c = r e^{i\theta} + e^{i\frac{\pi}{3}} r e^{-i\theta} = r(e^{i\theta} + e^{i(\frac{\pi}{3}-\theta)})$$

$$c = r e^{i\frac{\pi}{6}} (e^{i(\theta-\frac{\pi}{6})} + e^{-i(\theta-\frac{\pi}{6})}) = r e^{i\frac{\pi}{6}} (2 \cos(\theta - \frac{\pi}{6}))$$

$$c = 2r \cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) e^{i\frac{\pi}{6}}$$

• Signe de $\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right)$

$$\cos\left(\theta - \frac{\pi}{6}\right) = 0 \Leftrightarrow \theta - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2} + k\pi \Leftrightarrow \theta = \frac{2\pi}{3} + k\pi$$

θ	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π	
$\cos(\theta - \frac{\pi}{6})$	+	0	-	0	+

$$\text{si } \theta = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \theta = \frac{5\pi}{3} \text{ alors } c = 0$$

$$\text{si } \theta \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right] \text{ alors } c = \left[2r \cos(\theta - \frac{\pi}{6}), \frac{\pi}{6}\right]$$

$$\text{si } \theta \in \left]\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right[\text{ alors } c = \left[-2r \cos(\theta - \frac{\pi}{6}), \frac{7\pi}{6}\right]$$

θ	0	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π	
$\cos(\theta - \frac{\pi}{6})$	+	0	-	0	+

$$\text{si } \theta = \frac{2\pi}{3} \text{ ou } \theta = \frac{5\pi}{3} \text{ alors } c = 0$$

$$\text{si } \theta \in \left[0, \frac{2\pi}{3}\right[\cup \left]\frac{5\pi}{3}, 2\pi\right] \text{ alors } c = \left[2r \cos(\theta - \frac{\pi}{6}), \frac{\pi}{6}\right]$$

$$\text{si } \theta \in \left]\frac{2\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right[\text{ alors } c = \left[-2r \cos(\theta - \frac{\pi}{6}), \frac{7\pi}{6}\right]$$

Solution 12 :

$$1^\circ / 1 + e^{i\alpha} = e^{i\frac{\alpha}{2}} e^{-i\frac{\alpha}{2}} + e^{i\frac{\alpha}{2}} e^{i\frac{\alpha}{2}} = e^{i\frac{\alpha}{2}} (e^{-i\frac{\alpha}{2}} + e^{i\frac{\alpha}{2}}) = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{Conclusion : } \forall \alpha \in \mathbf{R}; \quad 1 + e^{i\alpha} = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$$

$$2^\circ / \text{On a : } \forall z \in \mathbf{C}, \forall z' \in \mathbf{C} : \sum_{k=0}^n C_n^k z^k z'^{n-k} = (z + z')^n$$

$$\text{On pose } z = e^{i\alpha} \text{ et } z' = 1 \text{ d'où : } \sum_{k=0}^n C_n^k e^{i\alpha k} = (1 + e^{i\alpha})^n$$

$$\text{Or on a montré que } 1 + e^{i\alpha} = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{\alpha}{2}}$$

$$\text{d'où } \sum_{k=0}^n C_n^k e^{i\alpha k} = 2^n \cos^n\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{n\alpha}{2}}$$

$$3^\circ / \text{ On a : } \sum_{k=0}^n C_n^k e^{i\alpha k} = 2^n \cos^n\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{i\frac{n\alpha}{2}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \sum_{k=0}^n C_n^k \cos(\alpha k) + i \sum_{k=0}^n C_n^k \sin(\alpha k) \\ = 2^n \cos^n\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{n\alpha}{2}\right) + i 2^n \cos^n\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } \sum_{k=0}^n C_n^k \cos(\alpha k) = 2^n \cos^n\left(\frac{\alpha}{2}\right) \cos\left(\frac{n\alpha}{2}\right)$$

$$\sum_{k=0}^n C_n^k \sin(\alpha k) = 2^n \cos^n\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{n\alpha}{2}\right)$$

Solution 13 :

1°/ On sait que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \{1\}$;

$$\sum_{k=0}^{n-1} z^k = \frac{1-z^n}{1-z} \text{ donc pour } z = e^{i\frac{\pi}{n}} \in \mathbb{C} \setminus \{1\}, \text{ on a :}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(e^{i\frac{\pi}{n}} \right)^k = \frac{1-e^{i\pi}}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}} = \frac{1-\cos\pi}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}} = \frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}$$

$$\text{Conclusion : Pour tout } n \in \mathbb{N}^* ; \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} = \frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}$$

$$2^\circ / \text{ On a : } \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} = \frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}}$$

$$* \sum_{k=0}^{n-1} e^{i\frac{k\pi}{n}} = \sum_{k=0}^{n-1} \cos\left(\frac{k\pi}{n}\right) + i \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) \text{ donc } \sum_{k=0}^{n-1} \sin\left(\frac{k\pi}{n}\right) = \Im_m \left(\frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}} \right)$$

$$* \frac{2}{1-e^{i\frac{\pi}{n}}} = \frac{2}{e^{i\frac{\pi}{2n}} (e^{-i\frac{\pi}{2n}} - e^{i\frac{\pi}{2n}})} = \frac{2}{e^{i\frac{\pi}{2n}} (-2i \sin(\frac{\pi}{2n}))}$$

$$= \frac{i e^{-i \frac{\pi}{2n}}}{\sin(\frac{\pi}{2n})} = \frac{i(\cos(\frac{\pi}{2n}) - i \sin(\frac{\pi}{2n}))}{\sin(\frac{\pi}{2n})} = \frac{\cos(\frac{\pi}{2n})}{\sin(\frac{\pi}{2n})} + i = 1 + i \cotg(\frac{\pi}{2n})$$

Conclusion : $\sum_{k=0}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n}) = \cotg(\frac{\pi}{2n})$

3°/ $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \sin(\frac{k\pi}{n})$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \cotg(\frac{\pi}{2n}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \frac{\cos(\frac{\pi}{2n})}{\sin(\frac{\pi}{2n})}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} t)}{\frac{\pi}{2} t} \cdot t = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\cos(\frac{\pi}{2} t)}{\sin(\frac{\pi}{2} t)} = \frac{2}{\pi} \quad \text{car} \quad \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin at}{t} = a$$

Solution 14 :

$$1^\circ/ \overline{Z} = \frac{e^{-i\alpha} - e^{-i\beta}}{e^{-i\alpha} + e^{-i\beta}} = \frac{\frac{1}{e^{i\alpha}} - \frac{1}{e^{i\beta}}}{\frac{1}{e^{i\alpha}} + \frac{1}{e^{i\beta}}}$$

$$\overline{Z} = \frac{e^{-i\beta} - e^{i\alpha}}{e^{i\alpha} \cdot e^{-i\beta}} \cdot \frac{e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta}}{e^{i\beta} + e^{i\alpha}} = \frac{e^{i\beta} - e^{i\alpha}}{e^{i\beta} + e^{i\alpha}} = -Z$$

On a : $\overline{Z} = -Z$ donc Z est un nombre imaginaire pur .

2°/ soit $W = \frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta} + 1}$

On a : $e^{i\theta} + 1 = e^{i \frac{\theta}{2}} (e^{i \frac{\theta}{2}} + e^{-i \frac{\theta}{2}}) = 2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i \frac{\theta}{2}}$

$$\text{D'où } W = \frac{e^{i\theta}}{2 \cos \frac{\theta}{2} e^{i \frac{\theta}{2}}} = \frac{e^{i \frac{\theta}{2}}}{2 \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{\cos \frac{\theta}{2} + i \sin \frac{\theta}{2}}{2 \cos \frac{\theta}{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \tg(\frac{\theta}{2})$$

3°/

$$a) \quad (\overrightarrow{AB}, \widehat{\overrightarrow{AC}}) \equiv (\overrightarrow{AB}, \widehat{\vec{i}}) + (\vec{i}, \widehat{\overrightarrow{AC}}) (2\pi)$$

$$\equiv -\arg(z_B - z_A) + \arg(z_C - z_A) (2\pi) \equiv \arg\left(\frac{z_C - z_A}{z_B - z_A}\right) (2\pi)$$

$$\equiv \arg\left(\frac{-e^{i\beta} - e^{i\alpha}}{e^{i\beta} - e^{i\alpha}}\right) (2\pi) \equiv \arg\left(\frac{e^{i\alpha} - e^{i\beta}}{e^{i\alpha} - e^{i\beta}}\right) (2\pi)$$

$$\equiv \arg\left(\frac{1}{Z}\right) (2\pi) \equiv -\arg(Z) (2\pi)$$

$$\text{or d'après 1°/ } Z \text{ est un nombre imaginaire alors } \arg(Z) \equiv \begin{cases} \frac{\pi}{2} (2\pi) \\ \text{ou} \\ -\frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases}$$

et par suite ABC est un triangle rectangle en A .

b) Pour que ABC soit un triangle isocèle il suffit que $AB = AC$

on a : $AB = AC$

$$\Leftrightarrow |z_B - z_A| = |z_C - z_A| = |e^{i\beta} - e^{i\alpha}| = |-e^{i\beta} - e^{i\alpha}|$$

$$\Leftrightarrow |(\cos \beta - \cos \alpha) + i(\sin \beta - \sin \alpha)| = |(\cos \beta + \cos \alpha) + i(\sin \beta + \sin \alpha)|$$

$$(\cos \beta - \cos \alpha)^2 + (\sin \beta - \sin \alpha)^2 = (\cos \beta + \cos \alpha)^2 + (\sin \beta + \sin \alpha)^2$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha - 2 \cos \beta \cos \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha - 2 \sin \beta \sin \alpha$$

$$= \cos^2 \beta + \cos^2 \alpha + 2 \cos \beta \cos \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \alpha + 2 \sin \beta \sin \alpha$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2 \cos \beta \cos \alpha - 2 \sin \beta \sin \alpha = 2 + 2 \cos \beta \cos \alpha + 2 \sin \beta \sin \alpha$$

$$\Leftrightarrow \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha = 0 \Leftrightarrow \cos(\beta - \alpha) = 0$$

$$\Leftrightarrow \beta - \alpha = \frac{\pi}{2} + k\pi \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{or } -\pi < \beta - \alpha < \pi \text{ d'où } -\pi < \frac{\pi}{2} + k\pi < \pi \Rightarrow \frac{-3\pi}{2} < k\pi < \frac{\pi}{2}$$

$$\Rightarrow k = -1 \text{ ou } k = 0 \text{ d'où } \beta - \alpha = -\frac{\pi}{2} \text{ ou } \beta - \alpha = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Conclusion : } \beta = \alpha - \frac{\pi}{2} \text{ ou } \beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$$

Solution 15 :

$$1^\circ / OA = |z_A - z_O| = |z|$$

$$OB = |z_B - z_O| = |\bar{z}| = |z|$$

$$OC = |z_C - z_O| = \left| \frac{z^2}{z} \right| = \frac{|z^2|}{|z|} = |z|$$

D'où $OA = OB = OC$ et par suite A, B et C appartiennent à un même cercle de centre O.

$$2^\circ / \text{On a : } AB = |z_B - z_A| = |\bar{z} - z|$$

$$AC = |z_C - z_A| = \left| \frac{z^2}{z} - z \right| = \left| \frac{z^2 - z\bar{z}}{\bar{z}} \right| = \left| \frac{z(z - \bar{z})}{\bar{z}} \right| = \frac{|z| |z - \bar{z}|}{|\bar{z}|}$$

Or $|\bar{z}| = |z|$ donc $AC = |z - \bar{z}| = |\bar{z} - z|$ d'où $AB = AC$ et par suite ABC est un triangle isocèle de sommet principal A.

$$3^\circ / (\widehat{CB, CA}) \equiv (\widehat{CB, i}) + (\widehat{i, CA}) (2\pi)$$

$$\equiv -\arg(z_B - z_C) + \arg(z_A - z_C) (2\pi) \equiv \arg\left(\frac{z_A - z_C}{z_B - z_C}\right) (2\pi)$$

$$\equiv \arg\left(\frac{z - \frac{z^2}{\bar{z}}}{\bar{z} - \frac{z^2}{z}}\right) (2\pi). \quad \text{Or } \frac{z - \frac{z^2}{\bar{z}}}{\bar{z} - \frac{z^2}{z}} = \frac{z\bar{z} - z^2}{(\bar{z})^2 - z^2} = \frac{z(\bar{z} - z)}{(\bar{z} - z)(\bar{z} + z)} = \frac{z}{\bar{z} + z}$$

$$\text{Or } \bar{z} + z = (x - iy) + (x + iy) = 2x \quad \text{d'où } (\widehat{CB, CA}) \equiv \arg\left(\frac{z}{2x}\right) (2\pi)$$

$$\equiv \arg(z) - \arg(2x) (2\pi) \quad \text{or } x > 0 \text{ donc } \arg(2x) \equiv 0 (2\pi)$$

$$\text{Conclusion : } (\widehat{CB, CA}) \equiv \arg z (2\pi)$$

$$4^{\circ} / a) z' = \bar{z} + \frac{z^2}{z} = re^{-i\theta} + \frac{r^2 e^{i2\theta}}{re^{-i\theta}} = re^{-i\theta} + re^{i3\theta} \\ = re^{i\theta} (re^{i2\theta} + e^{-i2\theta}) = re^{i\theta} 2 \cos 2\theta = 2r \cos 2\theta e^{i\theta}$$

$$b) \text{aff } \overline{OM'} = z_{M'} - z_O = 2r \cos 2\theta e^{i\theta}$$

$$\text{aff } \overline{OM} = z_M - z_O = z = re^{i\theta} \text{ d'où } \text{aff } \overline{OM'} = 2 \cos 2\theta \cdot \text{aff } \overline{OM}$$

Conclusion : $\overline{OM'} = 2 \cos 2\theta \cdot \overline{OM}$ et par suite O, M et M' sont alignés.

$$c) z' = z \Leftrightarrow \bar{z} + \frac{z^2}{z} = z \Leftrightarrow \frac{(\bar{z})^2 + z^2}{\bar{z}} = z \\ \Leftrightarrow (\bar{z})^2 + z^2 = z\bar{z} \Leftrightarrow (\bar{z})^2 + z^2 = |z|^2 \text{ or } z = x + iy$$

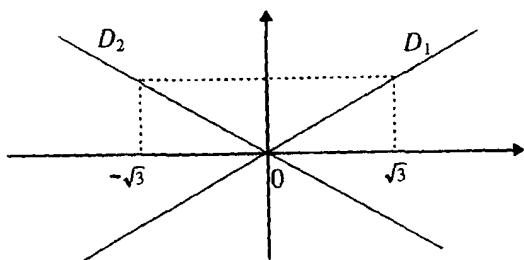
$$\text{on a : } (x + yi)^2 + (x - yi)^2 = x^2 + y^2 \Leftrightarrow$$

$$x^2 - y^2 - 2xyi + x^2 - y^2 + 2xyi = x^2 + y^2 \Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt{3}y \text{ ou } x = -\sqrt{3}y$$

L'ensemble (E) est la réunion des deux droites $D_1 : x - \sqrt{3}y = 0$ et

$D_2 : x + \sqrt{3}y = 0$ privée du point O.



Solution 16 :

$$1^{\circ} / f = \cos^3 x \sin 2x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^3 \left(\frac{e^{i2x} - e^{-i2x}}{2i} \right)$$

$$f = \frac{(e^{i3x} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-i3x})(e^{i2x} - e^{-i2x})}{16i}$$

$$f = \frac{e^{i5x} - e^{ix} + 3e^{i3x} - 3e^{-ix} + 3e^{ix} - 3e^{-i3x} + e^{-ix} - e^{-i5x}}{16i}$$

$$f = \frac{(e^{i5x} - e^{-i5x}) + 2(e^{ix} - e^{-ix}) + 3(e^{i3x} - e^{-i3x})}{16i}$$

$$f = \frac{2i \sin 5x + 4i \sin x + 6i \sin 3x}{16i} = \frac{1}{8} \sin 5x + \frac{1}{4} \sin x + \frac{3}{8} \sin 3x$$

$$2^\circ / g = \cos^2 2x \sin 3x = \left(\frac{e^{i2x} + e^{-i2x}}{2} \right)^2 \left(\frac{e^{i3x} - e^{-i3x}}{2i} \right)$$

$$= \frac{(e^{i4x} + 2 + e^{-i4x})(e^{i3x} - e^{-i3x})}{8i}$$

$$= \frac{e^{i7x} - e^{ix} + 2e^{i3x} - 2e^{-i3x} + e^{-ix} - e^{-i7x}}{8i}$$

$$= \frac{(e^{i7x} - e^{-i7x}) - (e^{ix} - e^{-ix}) + 2(e^{i3x} - e^{-i3x})}{8i}$$

$$= \frac{2i \sin 7x + 4i \sin 3x - 2i \sin x}{8i} = \frac{1}{4} \sin 7x + \frac{1}{2} \sin 3x - \frac{1}{4} \sin x$$

3°/

$$h = \cos^4 x \sin x = \left(\frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \right)^4 \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right) = \frac{(e^{ix} + e^{-ix})^4 (e^{ix} - e^{-ix})}{32i}$$

$$\text{Or } (e^{ix} + e^{-ix})^4 = e^{i4x} + 4e^{i2x} + 6 + 4e^{-i2x} + e^{-i4x}$$

$$\text{d'où } h = \frac{(e^{i4x} + 4e^{i2x} + 6 + 4e^{-i2x} + e^{-i4x})(e^{ix} - e^{-ix})}{32i}$$

$$= \frac{e^{i5x} - e^{i3x} + 4e^{i3x} + 4e^{ix} + 6e^{ix} - 6e^{-ix} + 4e^{-ix} - 4e^{-i3x} + e^{-i3x} - e^{-i5x}}{32i}$$

$$= \frac{(e^{i5x} - e^{-i5x}) + 3(e^{i3x} - e^{-i3x}) + 10(e^{ix} - e^{-ix})}{32i}$$

$$= \frac{2i \sin 5x + 6i \sin 3x + 20i \sin x}{32i}$$

$$\text{Conclusion : } h = \frac{1}{16} \sin 5x + \frac{3}{16} \sin 3x + \frac{5}{8} \sin x$$

Solution 17 :

$$1^{\circ} / \Delta = (\sqrt{3} - 3i)^2 - 4 \times 2 \times (-4) = 3 - 6\sqrt{3}i - 9 + 32 = 26 - 6\sqrt{3}i$$

Cherchons x et y tel que : $(x + iy)^2 = \Delta$

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 26 \\ x^2 + y^2 = \sqrt{(26)^2 + (6\sqrt{3})^2} \\ 2xy = -6\sqrt{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 26 & (1) \\ x^2 + y^2 = 28 & (2) \\ xy = -3\sqrt{3} \end{cases}$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow \begin{cases} x^2 = 27 \\ y^2 = 1 \\ xy < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \pm 3\sqrt{3} \\ y = \pm 1 \\ xy < 0 \end{cases} \quad \text{donc } \Delta = (3\sqrt{3} - i)^2$$

$$z' = \frac{(-\sqrt{3} + 3i) - (3\sqrt{3} - i)}{4} = -\sqrt{3} + i$$

$$z'' = \frac{(-\sqrt{3} + 3i) + (3\sqrt{3} - i)}{4} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2}$$

$$2^{\circ} / a) \left| -\sqrt{3} + i \right| = \sqrt{3+1} = 2 \quad ; \quad \left| \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \right| = \sqrt{\frac{3}{4} + \frac{1}{4}} = 1$$

$$\text{donc } z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \quad ; \quad z_2 = -\sqrt{3} + i$$

$$z_1 = [r_1, \theta_1] \text{ on a : } r_1 = 1 ; \begin{cases} \cos \theta_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_1 \equiv \frac{\pi}{6} (2\pi)$$

$$\text{donc } z_1 = \left[1, \frac{\pi}{6} \right] = e^{i\frac{\pi}{6}}$$

$$z_2 = [r_2, \theta_2] \text{ on a : } r_2 = 2 ; \begin{cases} \cos \theta_2 = \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta_2 = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta_2 \equiv \frac{5\pi}{6} (2\pi)$$

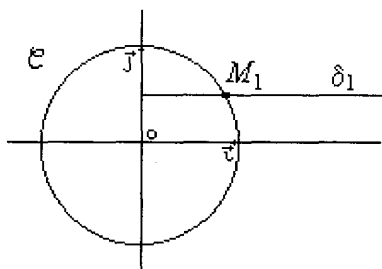
$$\text{donc } z_2 = \left[2, \frac{5\pi}{6} \right] = 2e^{i\frac{5\pi}{6}}$$

b) • $z_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i$ on a : M_1 d'affixe z_1 , $OM_1 = 1$ donc M_1

appartient au cercle C de centre O et de rayon 1, d'autre part l'imaginaire de z_1 est $\frac{1}{2}$ donc M_1 appartient à la demi-droite

$$\delta_1 : \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ x \geq 0 \end{cases} \text{ d'où la construction géométrique du point } M_1 \text{ (} M_1 \text{ est}$$

le point d'intersection du cercle C et de la demi-droite δ_1).



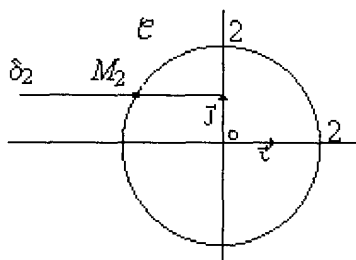
• $z_2 = -\sqrt{3} + i$ on a : M_2 d'affixe z_2 , $OM_2 = 2$ donc M_2

appartient au cercle C' de centre O et de rayon 2, d'autre part l'imaginaire de z_2 est 1 donc M_2 appartient à la demi-droite

$$\delta_2 : \begin{cases} y = 1 \\ x \leq 0 \end{cases} \text{ d'où la construction géométrique du point } M_2 \text{ (} M_2 \text{ est}$$

le point d'intersection du cercle C''

et de la demi-droite δ_2).



Solution 18 :

1°/ a) θ étant un argument de ω , il reste à trouver $|\omega| = \rho$.

$$\omega = \rho \cos \theta + i \rho \sin \theta \text{ or } \rho \sin \theta = \operatorname{tg} \theta \Rightarrow \rho = \frac{1}{\cos \theta}$$

$$\omega = \left[\frac{1}{\cos \theta}, \theta \right] = \frac{1}{\cos \theta} e^{i\theta}$$

$$\omega = \frac{1}{\cos \theta} (\cos \theta + i \sin \theta)$$

b) on a : $\omega = \frac{1}{\cos \theta} (\cos \theta + i \sin \theta) = 1 + i \operatorname{tg} \theta$

Donc $\omega = 1 + i \operatorname{tg} \theta$

2°/ $2z^2 - (1 + i\sqrt{3})z - 1 + i\sqrt{3} = 0$

$$\Delta = (1 + i\sqrt{3})^2 - 8(-1 + i\sqrt{3}) = -2 + 2i\sqrt{3} + 8 - 8i\sqrt{3}$$

$$\Delta = 6 - 6i\sqrt{3} = 6 - 3 \cdot 2(i\sqrt{3}) = 3^2 - 3 \cdot 2(i\sqrt{3}) + (i\sqrt{3})^2$$

$$\Delta = (3 - i\sqrt{3})^2 \text{ une racine carrée de } \Delta \text{ est } 3 - i\sqrt{3}$$

$$z' = \frac{1 + i\sqrt{3} - 3 + i\sqrt{3}}{4} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z'' = \frac{1 + i\sqrt{3} + 3 - i\sqrt{3}}{4} = 1$$

$$S_C = \left\{ 1; -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \right\}$$

$$z_1 = 1 \quad ; \quad z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

3°/ a) $CA = CB \Leftrightarrow |z_1 - z| = |z_2 - z| \Leftrightarrow |1 - z| = \left| -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - z \right|$

$$\Leftrightarrow |-i \operatorname{tg} \theta| = \left| -\frac{3}{2} + i\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \operatorname{tg} \theta\right) \right| \Leftrightarrow \operatorname{tg}^2 \theta = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} - \sqrt{3} \operatorname{tg} \theta + \operatorname{tg}^2 \theta$$

$$\Leftrightarrow \operatorname{tg} \theta = \sqrt{3} \text{ or } \theta \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

Conclusion : Pour que $CA = CB$; il faut que $\theta = \frac{\pi}{3}$.

b) Pour montrer que CAB est équilatéral; il suffit de montrer que

$$(\vec{CA}, \vec{CB}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi) \text{ car } CAB \text{ est isocèle.}$$

$$(\vec{CA}, \vec{CB}) \equiv \arg\left(\frac{z_2 - \omega}{z_1 - \omega}\right) (2\pi) \equiv \arg(z_2 - \omega) - \arg(z_1 - \omega) (2\pi)$$

$$\text{Or } z_2 - \omega = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} - (1 + i\sqrt{3}) = -\frac{3}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow z_2 - \omega = -\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2}\right) = -\sqrt{3}\left[1, \frac{\pi}{6}\right] = \left[\sqrt{3}, \frac{\pi}{6} + \pi\right]$$

$$\Rightarrow z_2 - \omega = \left[\sqrt{3}, \frac{7\pi}{6}\right] \Rightarrow \arg(z_2 - \omega) \equiv \frac{7\pi}{6} (2\pi)$$

$$\Rightarrow z_1 - \omega = -i\sqrt{3} \Rightarrow \arg(z_1 - \omega) \equiv \frac{-\pi}{2} (2\pi)$$

$$\Rightarrow (\vec{CA}, \vec{CB}) \equiv \frac{7\pi}{6} + \frac{\pi}{2} (2\pi) \equiv \frac{5\pi}{3} (2\pi) \Rightarrow$$

$$(\vec{CA}, \vec{CB}) \equiv -\frac{\pi}{3} (2\pi)$$

$$\text{Conclusion : } \begin{cases} CA = CB \\ (\vec{CA}, \vec{CB}) \equiv -\frac{\pi}{3} (2\pi) \end{cases} \Rightarrow ABC \text{ est un triangle}$$

équilatéral.

Solution 19 :

1°/ $\Delta = a^2(1+i)^2 - 4ia^2 = 2ia^2 - 4ia^2 = -2ia^2 = (1-i)^2 a^2$. une racine carrée de Δ est $\delta = (1-i)a$.

$$z_1 = \frac{a(1+i) - (1-i)a}{2} = ia$$

$$z_2 = \frac{a(1+i) + (1-i)a}{2} = a$$

$$S_C = \{ia, a\}$$

2°/ On a : $a = \rho e^{i\theta}$

$$\text{a) } z_1 = ia = e^{i\frac{\pi}{2}} \rho e^{i\theta} = \rho e^{i(\theta + \frac{\pi}{2})}$$

$$z_2 = \rho e^{i\theta}$$

$$\text{b) } z_1^{2n} + z_2^{2n} = (ia)^{2n} + a^{2n} = a^{2n}(1 + (i)^{2n}) = a^{2n}(1 + (-1)^n)$$

$$3^\circ / \quad OA = |z_A - z_0| = |ia - 0| = |i||a| = |a|$$

$$OB = |z_B - z_0| = |a|$$

Donc $OA = OB$ et par suite OAB est un triangle isocèle de sommet principal O .

$$\begin{aligned} \text{Or } (\vec{OB}, \vec{OA}) &\equiv \arg\left(\frac{z_A - z_0}{z_B - z_0}\right) (2\pi) \\ &\equiv \arg\left(\frac{ia}{a}\right) (2\pi) \equiv \arg(i) (2\pi) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{aligned}$$

Conclusion : OAB est un triangle isocèle et rectangle en O .

Solution 20 :

$$\begin{aligned} 1^\circ / 1 + e^{i\alpha} &= e^{\frac{i\alpha}{2}} e^{-\frac{i\alpha}{2}} + e^{\frac{i\alpha}{2}} e^{\frac{i\alpha}{2}} = e^{\frac{i\alpha}{2}} (e^{-\frac{i\alpha}{2}} + e^{\frac{i\alpha}{2}}) \\ &= e^{\frac{i\alpha}{2}} \left(2 \cos \frac{\alpha}{2}\right). \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \forall \alpha \in \mathbf{R}, \text{ on a : } 1 + e^{i\alpha} = 2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{i\alpha}{2}}$$

$$\begin{aligned} 1 - e^{i\alpha} &= e^{\frac{i\alpha}{2}} e^{-\frac{i\alpha}{2}} - e^{\frac{i\alpha}{2}} e^{\frac{i\alpha}{2}} = e^{\frac{i\alpha}{2}} (e^{-\frac{i\alpha}{2}} - e^{\frac{i\alpha}{2}}) \\ &= -2i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{i\alpha}{2}} \end{aligned}$$

$$\text{Conclusion : } \forall \alpha \in \mathbf{R}, \text{ on a : } 1 - e^{i\alpha} = -2i \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) e^{\frac{i\alpha}{2}}.$$

2°/ a) (*) $z^{2n} + z^n + 1 = 0$. On pose $Z = z^n$ l'équation devient :

$$Z^2 + Z + 1 = 0$$

$\Delta = -3 = (\sqrt{3}i)^2$, une racine carrée de Δ est $\delta = \sqrt{3}i$.

$$Z' = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}, \quad Z'' = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

$$\text{Or } Z = z^n \text{ donc } z^n = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \text{ ou } z^n = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}$$

Donc les solutions de l'équation (*) sont les racines $n^{\text{ième}}$ de

$$Z' = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2} \text{ et les racines } n^{\text{ième}} \text{ de } Z'' = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}.$$

$$\text{or } Z' = e^{4i\frac{\pi}{3}} = e^{-2i\frac{\pi}{3}} \text{ et } Z'' = e^{2i\frac{\pi}{3}}; \quad Z'' = \overline{Z'}$$

Les racines $n^{\text{ième}}$ de Z' sont $z_k = e^{i(\frac{2k\pi}{n} - \frac{2\pi}{3n})}$

Les racines $n^{\text{ième}}$ de Z'' sont $z'_k = e^{i(-\frac{2k\pi}{n} + \frac{2\pi}{3n})}$ avec $k \in \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$.

$$b) \left(\frac{1+z}{1-z}\right)^n + \left(\frac{1-z}{1+z}\right)^n + 1 = 0 \quad ; \quad z \neq 1; \quad z \neq -1$$

On pose $Z = \frac{1+z}{1-z} \Rightarrow$ l'équation devient :

$$Z^n + \frac{1}{Z^n} + 1 = 0 \Leftrightarrow Z^{2n} + Z^n + 1 = 0$$

d'où $Z_k = e^{i\theta_k}$ ou $Z_k = e^{-i\theta_k}$

avec $\theta_k = \frac{2k\pi}{n} - \frac{2\pi}{3n} \quad / \quad 0 \leq k \leq n-1$

$$\frac{1+z}{1-z} = Z \Leftrightarrow 1+z = Z - zZ \Leftrightarrow z(1+Z) = Z-1 \Leftrightarrow z = \frac{Z-1}{Z+1}$$

$$z_k = \frac{Z_k - 1}{Z_k + 1} = \frac{e^{i\theta_k} - 1}{e^{i\theta_k} + 1} = \frac{2i \sin(\frac{\theta_k}{2}) e^{i\frac{\theta_k}{2}}}{2 \cos(\frac{\theta_k}{2}) e^{i\frac{\theta_k}{2}}}$$

$$z_k = i \operatorname{tg}\left(\frac{k\pi}{n} - \frac{\pi}{3n}\right) \quad \text{avec } 0 \leq k \leq n-1$$

Solution 21 :

$$1^\circ / a) \Delta = 4(1 + \cos 2t)^2 - 8(1 + \cos 2t) = 4(1 + \cos 2t)(1 + \cos 2t - 2) \\ = 4(\cos^2 2t - 1) = -4 \sin^2 2t = (2i \sin 2t)^2$$

$$d'où \quad z' = \frac{2((1 + \cos 2t) + 2i \sin 2t)}{2} = 1 + \cos 2t + i \sin 2t$$

$$z'' = 1 + \cos 2t - i \sin 2t \\ \forall t \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[\quad \text{on a : } \sin 2t > 0 \quad d'où \quad z_1 = 1 + \cos 2t + i \sin 2t$$

et $z_2 = 1 + \cos 2t - i \sin 2t$.

$$b) \quad z_1 = 1 + \cos 2t + i \sin 2t = 1 + (2 \cos^2 t - 1) + i 2 \sin t \cos t \\ = 2 \cos t (\cos t + i \sin t). \quad \text{Or } \forall t \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[: \cos t > 0 \quad d'où \quad z_1 = [2 \cos t, t]$$

$$2^{\circ} / \text{a) aff } \overrightarrow{OM_1} = z_{M_1} - z_O = 1 + \cos 2t + i \sin 2t$$

$$\text{aff } \overrightarrow{AM} = z_M - z_A = 1 + e^{it} - 1 = \cos t + i \sin t$$

$$\text{b) aff } \overrightarrow{OM_1} = 1 + \cos 2t + i \sin 2t = 2 \cos t (\cos t + i \sin t) = 2 \cos t \cdot \text{aff } \overrightarrow{AM}$$

$$\text{d'où aff } \overrightarrow{OM_1} = 2 \cos t \cdot \overrightarrow{AM} \text{ d'où } (OM_1) // (AM).$$

Solution 22 :

$$1^{\circ} / \text{a) } z_0 \text{ étant une solution imaginaire pure donc } z_0 = yi \text{ où } y \in \mathbf{R}$$

$$f(z_0) = f(yi) = -y^3 i - 2(-\sqrt{3} + i)y^2 + 4i(1 - i\sqrt{3})y + 8i$$

$$\begin{aligned} f(z_0) &= -iy^3 + 2\sqrt{3}y^2 - 2y^2 i + 4iy + 4\sqrt{3}y + 8i \\ &= (2\sqrt{3}y^2 + 4\sqrt{3}y) + i(-y^3 - 2y^2 + 4y + 8) \end{aligned}$$

$$f(z_0) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3}y^2 + 4\sqrt{3}y = 0 & (1) \\ -y^3 - 2y^2 + 4y + 8 = 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \Leftrightarrow 2\sqrt{3}(y^2 + 2y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \text{ ou } y = -2$$

$$y = 0 \text{ ne vérifie pas (2) ; } y = -2 \text{ vérifie (2)}$$

$$\text{Conclusion : } z_0 = -2i$$

$$\text{b) } \forall z \in \mathbf{C} \text{ on a : } f(z) = (z + 2i)(z^2 + bz + 4)$$

$$= z^3 + bz^2 + 4z + 2iz^2 + 2ibz + 8i$$

$$= z^3 + (b + 2i)z^2 + (4 + 2ib)z + 8i$$

$$\begin{cases} b + 2i = 2(-\sqrt{3} + i) \\ 4 + 2ib = 4(1 - i\sqrt{3}) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = -2\sqrt{3} \\ 2ib = -4i\sqrt{3} \end{cases} \quad b = -2\sqrt{3}$$

$$\text{Conclusion : } f(z) = (z + 2i)(z^2 - 2\sqrt{3}z + 4)$$

$$f(z) = 0 \Leftrightarrow z = -2i \quad (*) \quad \text{ou} \quad z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0 \quad (**)$$

$$(**) : z^2 - 2\sqrt{3}z + 4 = 0 \Leftrightarrow (z - \sqrt{3})^2 + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (z - \sqrt{3})^2 = i^2$$

$$\Leftrightarrow z - \sqrt{3} = i \text{ ou } z - \sqrt{3} = -i$$

$$z = \sqrt{3} + i \text{ ou } z = \sqrt{3} - i$$

$$\text{On pose alors } z_1 = \sqrt{3} - i ; \quad z_2 = \sqrt{3} + i$$

$$2^\circ / \text{ a) } z_1 = \sqrt{3} - i ; \quad z_2 = \sqrt{3} + i$$

$$\omega = \frac{z_1}{z_0} = \frac{\sqrt{3} - i}{-2i} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = \left[1, \frac{\pi}{3} \right]$$

$$\text{b) } OMM_1M_2 \text{ est un losange si et seulement si : } \begin{cases} O^*M_1 = M^*M_2 \\ (OM_1) \perp (MM_2) \end{cases} \text{ et}$$

$$\text{Soit } I = O^*M_1 \text{ on a : } z_I = \frac{z_D + z_{M_1}}{2} = \frac{\omega z}{2}$$

$$J = M^*M_2 \text{ on a : } z_J = \frac{z_M + z_{M_2}}{2} = \frac{z + \omega^2 z}{2} = \frac{z(1 + \omega^2)}{2}$$

$$\text{On a : } 1 + \omega^2 = 1 + \left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 = 1 + \frac{1}{4} - \frac{3}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\text{d'où } 1 + \omega^2 = \omega \text{ et par suite : } z_I = z_J$$

$$\text{d'où } O^*M_1 = M^*M_2$$

$$(\vec{OM_1}, \vec{MM_2}) \equiv \arg \left(\frac{z_{M_2} - z_M}{z_{M_1} - z_0} \right) (\pi)$$

$$\equiv \arg \left(\frac{\omega^2 z - z}{\omega z} \right) (\pi) \equiv \arg \left(\frac{\omega^2 - 1}{\omega} \right) (2\pi)$$

$$\text{or } \frac{\omega^2 - 1}{\omega} = \frac{\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} \right)^2 - 1}{\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{3}{4} + i \frac{\sqrt{3}}{2} - 1}{\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= \frac{-3+i\sqrt{3}}{1+i\sqrt{3}} = \frac{-\sqrt{3}(-i+\sqrt{3})}{i(\sqrt{3}-i)} = \sqrt{3}i \quad \text{d'où} \quad \arg\left(\frac{\omega^2-1}{\omega}\right) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

Conclusion : $(OM_1) \perp (MM_2)$

OMM_1M_2 est un losange.

Solution 23 :

1°/ $M_1M_2M_3$ est un triangle équilatéral si :

$$\Re(M_1, \frac{\pi}{3})(M_2) = M_3 \Leftrightarrow M_1M_2 = M_1M_3 \text{ et } (\overline{M_1M_2}, \overline{M_1M_3}) \equiv \frac{\pi}{3}$$

$$(1) : \Re(M_1, \frac{\pi}{3})(M_2) = M_3 \Leftrightarrow (z_3 - z_1) = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_2 - z_1)$$

$$\text{or } e^{i\frac{\pi}{3}} = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2} = -\bar{j} = -j^2$$

$$\text{d'où } (z_3 - z_1) = -j^2(z_2 - z_1) \Leftrightarrow z_3 - z_1 + j^2z_2 - j^2z_1 = 0$$

$$\Leftrightarrow -(1+j^2)z_1 + j^2z_2 + z_3 = 0 \quad \text{or } 1+j+j^2=0 \text{ d'où } -(1+j^2)=j$$

$$\text{d'où } jz_1 + j^2z_2 + z_3 = 0 \Leftrightarrow j(z_1 + jz_2 + j^2z_3) = 0 \text{ car } j^3 = 1$$

$$\text{d'où } z_1 + jz_2 + j^2z_3 = 0$$

$$(2) : \Re(M_1, \frac{\pi}{3})(M_3) = M_2 \Leftrightarrow (z_2 - z_1) = e^{i\frac{\pi}{3}}(z_3 - z_1)$$

$$\Leftrightarrow z_2 - z_1 = -j^2(z_3 - z_1) \Leftrightarrow j^2z_1 + z_1 - z_2 - j^2z_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -jz_1 - z_2 - j^2z_3 = 0 \Leftrightarrow j(z_1 + j^2z_2 + jz_3) = 0 \Leftrightarrow z_1 + j^2z_2 + jz_3 = 0$$

$$2^\circ/\text{a) Soit } P(z) = z^3 - (1+a+ia)z^2 + a(1+i+ia)z - ia^2$$

$$P(1) = 1 - (1+a+ia) + a(1+i+ia) - ia^2$$

$$= 1 - 1 - a - ia + a + ia + ia^2 - ia^2 = 0$$

$$\text{b) } P(z) = (z-1)(z^2 + bz + ia^2) = z^3 + bz^2 + ia^2z - z^2 - bz - ia^2$$

$$= z^3 + (b-1)z^2 + z(ia^2 - b) - ia^2 \text{ d'où } b-1 = -1 - a - ia$$

$$b = -a - ia$$

$$P(z) = 0 \Leftrightarrow z = 1 \quad \text{ou} \quad (*) \quad z^2 - a(1+i)z + ia^2 = 0$$

$$\text{Résolution de } (*) : \Delta = a^2(1+i)^2 - 4ia^2 = a^2(-2i) = a^2(1-i)^2$$

$$\text{d'où } z' = \frac{a(1+i) - a(1-i)}{2} = ai \quad \text{et} \quad z'' = \frac{a(1+i) + a(1-i)}{2} = a$$

$$S_C = \{1, ai, a\}$$

c) ABC est un triangle équilatéral si et seulement si :

$$z_A + jz_B + j^2 z_C = 0 \quad \text{ou} \quad z_A + j^2 z_B + jz_C = 0$$

$$z_A + jz_B + j^2 z_C = 0 \Leftrightarrow 1 + iaj + aj^2 = 0 \Leftrightarrow a(j^2 + ij) = -1 \Leftrightarrow a = \frac{-1}{j(i+j)}$$

$$z_A + j^2 z_B + jz_C = 0 \Leftrightarrow 1 + j^2 ai + aj = 0 \Leftrightarrow a(j + ij^2) = -1 \Leftrightarrow a = \frac{-1}{j(1+ij)}$$

Les différentes valeurs possibles de a répondant à la question posée

$$\text{sont : } \frac{-1}{j(i+j)} ; \quad \frac{-1}{j(1+ij)}$$

Solution 24 :

1°/a) Soit $z_0 = yi$ où $y \in \mathbf{R}$ z_0 est une racine de E si :

$$-y^3 i - 2(1-i)y^2 + (1+m^2-4i)yi - 2i(1+m^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -y^3 i - 2y^2 + 2y^2 i + (1+m^2)yi + 4y - 2i(1+m^2) = 0$$

$$\Leftrightarrow -2y^2 + 4y + i[(-y^3 + 2y^2 + y(1+m^2) - 2(1+m^2))] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2y(2-y) = 0 & (1) \\ -y^3 + 2y^2 + y(1+m^2) - 2(1+m^2) = 0 & (2) \end{cases}$$

(1) s'écrit : $y = 0$ ou $y = 2$ or $y = 0$ ne vérifie pas (2)

$y = 2$ vérifie l'équation (2)

Conclusion : $z_0 = 2i$

b) (E) s'écrit : $(z - 2i)(az^2 + bz + c) = 0$

$$\Leftrightarrow az^3 + (b-2ai)z^2 + (c-2ib)z - 2ic = 0 \quad \text{donc on a :}$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 2ai = 2(1-i) \\ c - 2ib = 1 + m^2 - 4i \\ -2ic = -2i(1+m^2) \end{cases}$$

d'où : $a = 1$, $b = 2$ et $c = 1 + m^2$

(E) s'écrit : $(z - 2i)(z^2 + 2z + 1 + m^2) = 0 \Leftrightarrow z = 2i$ ou $z^2 + 2z + 1 + m^2 = 0$ (*)

$\Delta = 4 - 4(1 + m^2) = (2im)^2$ d'où $z' = -1 - im$ et $z'' = -1 + im$

2°/a) Soit $I = A * B$ et $J = M' * M''$

$$z_I = \frac{z_A + z_B}{2} = \frac{2i - 2 - 2i}{2} = -1$$

$$z_J = \frac{-1 - im - 1 + im}{2} = -1$$

donc on a : $A * B = M' * M''$ par suite $AM'BM''$ est un parallélogramme

b) $AM'BM''$ est un rectangle si $\vec{AM'} \cdot \vec{AM''} = 0$

on a : $z_{\vec{AM'}} = -1 - im$ $z_{\vec{AM''}} = -1 - (m+2)i$

$$z_{\vec{AM''}} = -1 + im - 2i = -1 + (m-2)i$$

$$\text{on a : } \vec{AM'} \begin{pmatrix} -1 \\ -m-2 \end{pmatrix} \quad \vec{AM''} \begin{pmatrix} -1 \\ m-2 \end{pmatrix}$$

d'où : $1 + (m-2)(-m-2) = 0 \Leftrightarrow 1 + 4 - m^2 = 0 \Leftrightarrow m = \sqrt{5}$ ou $m = -\sqrt{5}$

Solution 25 :

1°/ M est un point invariant par $f \Leftrightarrow f(M) = M \Leftrightarrow z' = z \Leftrightarrow$

$$\frac{z-a}{z-1} = z \Leftrightarrow z^2 - z = z - a \Leftrightarrow z^2 - 2z + a = 0.$$

$$2°/ a) z^2 - 2z + 1 + e^{2i\theta} = 0 \Leftrightarrow (z-1)^2 = (ie^{i\theta})^2$$

$$\Leftrightarrow z = 1 + ie^{i\theta} \text{ ou } z = 1 - ie^{i\theta}$$

$$S_C = \{1 + ie^{i\theta}, 1 - ie^{i\theta}\}$$

b) Soit $z' = 1 + ie^{i\theta} = 1 - e^{i(\frac{\pi}{2} + \theta)}$ On pose $\alpha = \frac{\pi}{2} + \theta$

$$\text{On a alors : } z' = 1 + e^{i\alpha} = 2\cos\frac{\alpha}{2} e^{i\frac{\alpha}{2}} \quad \text{d'où } z' = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) e^{i(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2})}$$

$$\text{On a : } \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} < \frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4} < \pi \Rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\pi}{4}\right) < 0$$

$$\text{D'où } z' = -2\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right) e^{i(\frac{5\pi}{4} + \frac{\theta}{2})}$$

C'est la forme trigonométrique de z' : $-2\cos$

$$\text{Soit } z'' = 1 - ie^{i\theta} = 1 + e^{i(\frac{-\pi}{2})} e^{i\theta} = 1 + e^{i\beta} \quad \text{où } \beta = \theta - \frac{\pi}{2}$$

$$z'' = 2\cos\frac{\beta}{2}e^{i\frac{\beta}{2}} = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)e^{i\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right)}$$

$$\text{On a : } \frac{\pi}{2} < \theta < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow 0 < \frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4} < \frac{\pi}{2} \Rightarrow \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) > 0$$

D'où $z'' = 2\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \left(\cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{4}\right) \right)$ est la forme trigonométrique.

$$3^\circ) a) \overset{\wedge}{\rightarrow}(u, BM) + \overset{\wedge}{\rightarrow}(u, BM') \equiv \arg(z-1) + \arg(z'-1) [2\pi]$$

$$\equiv \arg[(z-1).(z'-1)] [2\pi] \equiv \arg(2) [2\pi] \equiv 0 [2\pi]$$

$$\overset{\wedge}{\rightarrow}(BM, BA) - \overset{\wedge}{\rightarrow}(BA, BM') \equiv \overset{\wedge}{\rightarrow}(BM, u) + \overset{\wedge}{\rightarrow}(u, BA) - \overset{\wedge}{\rightarrow}(BA, u) - \overset{\wedge}{\rightarrow}(u, BM') [2\pi]$$

$$\text{or } \overset{\wedge}{\rightarrow}(u, BM') \equiv -\overset{\wedge}{\rightarrow}(u, BM) [2\pi]$$

$$\text{d'où : } \overset{\wedge}{\rightarrow}(BM, BA) - \overset{\wedge}{\rightarrow}(BA, BM') \equiv 2\overset{\wedge}{\rightarrow}(u, BA) [2\pi] \equiv 0 [2\pi]$$

Car $\vec{u}$ et $\overset{\rightarrow}{BA}$ sont colinéaires et de sens opposés.

$$\text{d'où } \overset{\wedge}{\rightarrow}(BM, BA) \equiv \overset{\wedge}{\rightarrow}(BA, BM') [2\pi]$$

donc $[BA]$ est une bissectrice de $(\overset{\rightarrow}{BM}, \overset{\rightarrow}{BM'})$.

$$\begin{aligned} b) z' \text{ est imaginaire pur} &\Leftrightarrow \bar{z}' = -z' \Leftrightarrow \frac{\bar{z}+1}{z-1} = -\left(\frac{z+1}{z-1}\right) \\ &\Leftrightarrow (\bar{z}+1).(z-1) = (1+z).(1-\bar{z}) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow |z|^2 - \bar{z} + z - 1 = 1 - \bar{z} + z - |z|^2 \Leftrightarrow |z|^2 = 1 \Leftrightarrow |z| = 1$$

c) Soit $M \in \mathbb{C} \setminus \{B\}$ où $\mathbb{C}$: le cercle trigonométrique

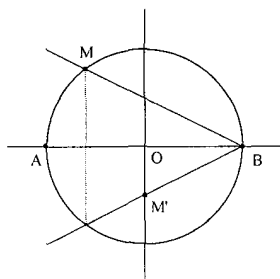
On a : $OM=1$ et $M \neq B$ donc $|z|=1$ d'où z' est un nombre imaginaire

d'où $M' \in (O, \vec{v})$.

D'autre part on a : $[BA]$ est une bissectrice de $(\overset{\rightarrow}{BM}, \overset{\rightarrow}{BM'})$

Donc : $S_{(BA)}(BM) = (BM')$ d'où : $M' \in S_{(BA)}(BM)$

D'où la construction du point M' :



Solution 26 :

Soit $z = x + iy$.

$$1^{\circ} / 4 - z - \bar{z} = 0 \Leftrightarrow z + \bar{z} = 4 \Leftrightarrow x = 2$$

d'où l'ensemble des points $M(z)$ tels que $4 - z - \bar{z} = 0$ est la droite Δ .

$$2^{\circ} / a) \text{ On a : } z' = \frac{4 - x^2 - y^2}{4 - 2x} \text{ donc } z' \in \mathbf{R}.$$

$$b) z' = k \Leftrightarrow 4 - x^2 - y^2 = 4k - 2kx \text{ avec } x \neq 2 \Leftrightarrow x^2 - 2kx + y^2 + 4k - 4 = 0 \text{ avec } x \neq 2 \Leftrightarrow (*) (x - k)^2 + y^2 = (k - 2)^2 \text{ avec } x \neq 2.$$

Si $x = 2$ (*) nous donne $(2 - k)^2 + y^2 = (k - 2)^2$ d'où $y = 0$
donc Γ est le cercle de centre $I(k, 0)$ et de rayon $|k - 2|$ privé du point $A(2, 0)$

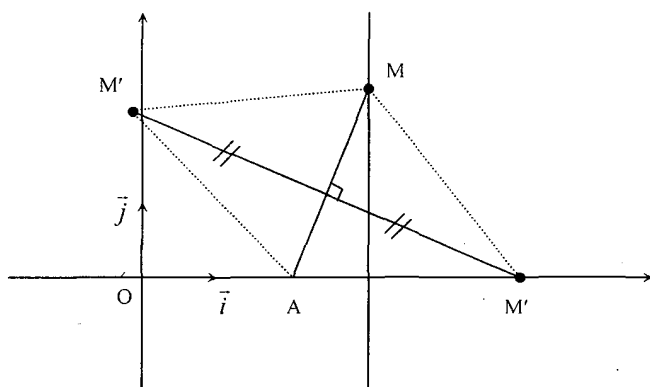
$$\begin{aligned} 3^{\circ} / a) \bullet |z' - z| &= \left| \frac{4 - z\bar{z}}{4 - z - \bar{z}} - z \right| = \left| \frac{4 - z\bar{z} - 4z + z^2 + z\bar{z}}{4 - z - \bar{z}} \right| \\ &= \frac{|(z - 2)^2|}{|4 - z - \bar{z}|} = \frac{|z - 2|^2}{|4 - 2x|} = \frac{(x - 2)^2 + y^2}{|4 - 2x|} \\ \bullet |z' - 2| &= \left| \frac{4 - z\bar{z}}{4 - z - \bar{z}} - 2 \right| = \left| \frac{-4 - z\bar{z} + 2z + 2\bar{z}}{4 - z - \bar{z}} \right| = \left| \frac{4x - x^2 - y^2 - 4}{4 - 2x} \right| \\ &= \frac{(x - 2)^2 + y^2}{|4 - 2x|} \quad \text{d'où } |z' - z| = |z' - 2| \end{aligned}$$

b) On a : $|z'-z| = MM'$ et $|z'-2| = AM'$ or d'après 3°/ a) on a :

$|z'-z| = |z'-2|$ donc $AM' = MM'$ d'où M' appartient à la médiatrice de $[AM]$. Or d'après 2°/ a) $z' \in \mathbf{R}$ d'où $M' \in$ l'axe des abscisses.

Conclusion : M' est le point d'intersection de la médiatrice de $[AM]$ avec l'axe des abscisses.

4°/



On a : $AM' = M'M$ car M' appartient à la médiatrice de $[AM]$.

D'autre part : $S_{(AM)} : A \rightarrow A$

$M \rightarrow M'$

$M' \rightarrow M''$ et comme $S_{(AM)}$ conserve les distances alors $AM' = AM''$ et $MM' = MM''$ d'où $AM'' = M''M = M'M = AM'$ donc $AM'MM''$ est un losange d'où $(M''M) \parallel (AM')$ et comme $(AM') \perp D$ alors $(M''M) \perp D$ d'où M est le projeté orthogonal de M'' sur D donc $M''M = d(M'', D)$