

EXERCICES

Exercice 1 :

Soit ABCD un carré de sens direct et O son centre

1°/ Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Déterminer $r(A)$, $r(B)$ et $r(C)$.

2°/ Soient I et J les points tels que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC}$.

a) Montrer que $r(I) = J$

b) Montrer que le triangle OIJ est isocèle rectangle

Exercice 2 :

Dans le plan orienté P , on considère un triangle équilatéral ABC tel que : $(\widehat{AB}, \widehat{AC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$. On désigne par r_1 la rotation de centre A

et d'angle $\frac{\pi}{3}$ et par r_2 la rotation de centre B et d'angle $\frac{2\pi}{3}$.

Soit M un point de P . On pose $N = r_1(M)$ et $M' = r_2(N)$.

Soit $r = r_2 \circ r_1$.

1°/

a) Soit $D = S_{(AB)}(C)$. Déterminer $r(D)$ et $r(B)$.

b) Montrer que r est la symétrie centrale de centre $\Omega = B * D$.

c) Montrer que $\Omega = M * M'$.

2°/

a) Montrer que le triangle AMN est équilatéral.

On suppose que M, N et M' sont alignés.

b) Montrer que $(\widehat{M\Omega}, \widehat{MA}) \equiv \frac{\pi}{3}[\pi]$.

Exercice 3 :

Dans le plan orienté, on considère deux points distincts A et B. On note R_A et R_B les rotations de centres respectifs A et B et d'angle de

mesure $\frac{\pi}{2}$.

Pour tout point M du plan, on note M_1 et M_2 les images respectives de M par R_A et R_B .

1°/ On considère l'application $T = R_B \circ R_A^{-1}$.

- Construire le point C image de A par T .
- Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de T
- En déduire la nature du quadrilatère M_1M_2CA .

2°/ On suppose que le point M décrit le cercle Γ de diamètre $[AB]$.

- Déterminer et construire l'ensemble Γ_2 décrit par le point M_2 quand M décrit Γ .
- Soit $\omega_1 = A * B$ et $\omega_2 = B * C$

Comparer les vecteurs $\overrightarrow{\omega_1\omega_2}$ et $\overrightarrow{AC}$.

- Déterminer l'ensemble décrit par le point I milieu de $[M_1M_2]$ quand M décrit Γ .

Exercice 4 :

Le plan est orienté.

Soit ABC un triangle rectangle en A tel que $AC = 2AB$.

On désigne par K le projeté orthogonal de A sur la droite (BC) et I l'image de K par la symétrie orthogonale S_1 d'axe (AB) et J l'image de K par la symétrie orthogonale S_2 d'axe (AC) .

1°/ Montrer que $(BI) \perp (AI)$ et que $(CJ) \perp (AJ)$.

2°/ Préciser la nature de la composée $S_2 \circ S_1$ puis prouver que A est le milieu de $[IJ]$.

3°/ Montrer que $CJ = IJ$. (penser à calculer $\text{tg } \theta$, où θ est une mesure de l'angle $(\widehat{CA, CK})$)

Exercice 5 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC de sens direct. On note A' , B' , C' les milieux respectifs des côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$.

1°/ Construire les points M et N tels que :

$$MA = MC \text{ et } (\vec{MA}, \vec{MC}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$$

$$NA = NA \text{ et } (\vec{NB}, \vec{NA}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$$

2°/ a) Démontrer que $MB' = A'C'$ et que $NC' = A'B'$.

b) En déduire qu'il existe une rotation unique r telle que :

$$r(M) = A' \text{ et } r(B') = C'.$$

Déterminer l'angle de r .

3°/ a) Démontrer que $r(A') = N$

b) Quelle est la nature de l'application $r \circ r$?

En déduire le centre de r .

c) Quelle est la nature du triangle $MA'N$?

Exercice 6 :

On considère dans le plan orienté, un triangle isocèle tel que

$$(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$$

On désigne par r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$ et t la

translation de vecteur $\vec{AB}$.

1°/ Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de

$r \circ t$ et $t \circ r$.

2°/ Soit M un point du plan

on pose $M_1 = r \circ t(M)$ et $M_2 = t \circ r(M)$

Quelle est la nature du quadrilatère BCM_1M_2 ?

Exercice 7 :

Soit ABC un triangle quelconque de sens direct.

On construit à l'extérieur de ce triangle les triangles ARB , BPC et

CQA isocèles rectangles respectivement en R , P et Q .

1°/ a) Soit $I = A * B$ et $r_P = r(P, \frac{\pi}{2})$; $r_Q = r(Q, \frac{\pi}{2})$

Montrer que $r_P \circ r_Q = S_I$

b) En déduire que IPQ est un triangle rectangle isocèle.

2°/ Soit $J = A * C$ et $K = B * C$ on pose $r_R = \mathcal{R}(R, \frac{\pi}{2})$

a) Démontrer que $r_Q \circ r_R = S_K$; $r_R \circ r_P = S_J$

b) En déduire que KQR et JPR sont des triangles rectangles isocèles.

3°/ Démontrer que les droites (QB) ; (RC) et (AP) sont concourantes.

Exercice 8 :

Dans le plan orienté, ABC désigne un triangle isocèle de sommet

principal A et vérifiant $(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$.

Soit I le point d'intersection des bissectrices intérieures du triangle ABC .

On note $R_A = \mathcal{R}(A, \frac{\pi}{2})$; $R_C = \mathcal{R}(C, \frac{\pi}{4})$

1°/ a) Construire le point A' image de A par la rotation R_C .

b) Donner la nature et les éléments caractéristiques de $R_C \circ R_A$.

c) montrer que $IA' = IA$ et que $(IA') \perp (AB)$

2°/ La droite (CI) coupe (AB) en E , les droites $(A'E)$ et (BI) se coupent en K , on désigne par :

h_C : l'homothétie de centre C et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$

h_K : L'homothétie de centre K et de rapport $-\sqrt{2}$

a) Déterminer $h_C(B)$, $h_C(E)$ en déduire que $\vec{BE} = -\sqrt{2} \vec{IA'}$

b) Déterminer $h_K \circ h_C(B)$

3°/ Donner la nature de $h_K \circ h_C$ et ses éléments caractéristiques. En déduire que C, K, M sont alignés où $M = E * B$.

Exercice 9 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC de sens direct. On construit à l'extérieur de ce triangle les carrés $ABDE$ et $ACFG$, ainsi que le parallélogramme $AGKE$.

On désigne par $M = B * C$ et H le projeté orthogonal de A sur (BC) .

1°/ a) Montrer qu'il existe un déplacement f dont on déterminera ses éléments caractéristiques transformant le triangle ABC en le triangle GKA .

b) Montrer que les points H, A, K sont alignés.

c) Montrer que les droites (AM) et (EG) sont perpendiculaires.

2°/ a) Montrer que $FB = CK$

b) Donner une mesure de l'angle $(\vec{FB}, \vec{CK})$

3°/ a) Montrer qu'il existe un déplacement g qui transforme le triangle ABC en le triangle EAK dont on déterminera ses éléments caractéristiques.

b) Prouver que $DC = BK$ et donner une mesure de l'angle $(\vec{DC}, \vec{BK})$

4°/ Montrer que les droites (AK) , (BF) et (CD) sont concourantes.

Exercice 10 :

OAB un triangle isocèle de sens direct tel que $OA = AB$ et P un point du segment $[AB]$ distinct, de A et de B .

La parallèle à (OB) passant par P coupe (OA) en A' .

La parallèle à (OA) passant par P coupe (OB) en B' .

1°/ Justifier l'existence d'une rotation r tels que $r(O) = B$ et $r(A) = O$.

2°/ Déterminer $r(A')$ et le centre Ω de la rotation r .

3°/ Démontrer que O, A', B', Ω sont cocycliques.

Exercice 11 :

On donne dans le plan $(\mathcal{P})$ un triangle isocèle $OO'A$ avec

$$(\vec{AO}, \vec{AO'}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi).$$

Les cercles $(\mathcal{C})$ et $(\mathcal{C}')$ passant par A et de centres respectifs O et O' se recoupent en B .

À tout point M de $(\mathcal{C})$, on associe le point M' de $(\mathcal{C}')$ tel qu'une

$$\text{mesure de } (\vec{OM}, \vec{O'M'}) \equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi).$$

1°/ Montrer qu'il existe une rotation r , que l'on caractérisera, transformant O en O' et M en M' .

2°/ $M \neq B$, les droites (BM) et (BM') recoupent respectivement $(\mathcal{C}')$ en N' et $(\mathcal{C})$ en N . Montrer que $r(N) = N'$.

Exercice 12 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que:

$$(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi) \text{ et } AB < AC.$$

On désigne par $\mathcal{C}$ le cercle circonscrit au triangle ABC et O son centre. Soit E le milieu du segment $[BC]$ et P le point de $[AC]$ tel que $AB = CP$.

La droite (OE) coupe $\mathcal{C}$ en I et J , tels que J et A soient sur le même arc $[BC]$ du cercle $(\mathcal{C})$.

1°/ a) Faire une figure.

b) Trouver l'ensemble des points M du plan tels que :

$$(\vec{MB}, \vec{MC}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi).$$

c) Trouver l'ensemble des points M du plan tel que :

$$(\vec{MB}, \vec{MC}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi) \text{ et } MB < MC.$$

2°/ a) Justifier qu'il existe une unique rotation R telle que

$R(A) = P$ et $R(B) = C$. Déterminer son angle.

b) Démontrer que le centre de R est un point de $\mathcal{C}$ que l'on précisera.

c) Quelle est la nature du triangle JAP ?

3°/ Déterminer l'image de B par la composée $R \circ S_B$ où S_B désigne la symétrie de centre B .

Donner la nature et les éléments caractéristiques de cette composée.

Exercice 13 :

Soient A, B, C trois points non alignés tel que le triangle ABC soit rectangle en A de sens direct. On désigne par $S_{(AB)}$, $S_{(BC)}$ et $S_{(CA)}$ les symétries orthogonales d'axes respectifs (AB) , (BC) et (CA) et par f l'application $S_{(BC)} \circ S_{(CA)} \circ S_{(AB)}$.

1°/ Montrer que f est un antidéplacement.

2°/ Montrer que f est une symétrie glissante.

3°/ Donner la forme réduite de f .

Exercice 14 :

Soit $ABCD$ un carré de sens direct et de centre O . Soit f l'antidéplacement qui transforme A en D et D en C .

1°/ Montrer que f est une symétrie glissante.

2°/ Soit $E = f(C)$

a) Montrer que DEC est un triangle isocèle rectangle en C .

b) Construire le point E .

- c) Déterminer et construire l'image du point B par f .
- 3°/ Déterminer la forme réduite de f .
- 4°/ Déterminer et caractériser l'application $f \circ S_{AD}$.

Exercice 15 :

Soit l'équation (E) : $z^3 - (2 - 4i)z^2 - (9 - 10i)z + 18 + 6i = 0$.

1°/

- a) Vérifier que 3 est une racine de (E).
- b) En déduire les deux autres solutions z_1 et z_2 . (z_1 étant la racine ayant une partie réelle positive).

2°/ Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

A, B et C trois points d'affixes respectives 3, z_1 et z_2 .

- a) Montrer que OABC est un parallélogramme
- b) Montrer qu'il existe un déplacement f et un antidéplacement g transformant O en b et A en C.

3°/ Donner la nature et les éléments caractéristiques de f .

4°/ Soit S la symétrie orthogonale d'axe (OA).

Montrer que $g = f \circ S$.

Exercice 16 :

Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit r l'application de $P \rightarrow P$ qui à tout point m (x, y) associe M'(x', y')

tel que :
$$\begin{cases} x' = 1 - y \\ y' = x \end{cases}$$

1°/ Montrer que r est une rotation dont on précisera son centre A et un mesure de son angle

2°/ Montrer que le triangle AMM' est rectangle isocèle.

3°/ Soit $f = r \circ S_{\Delta}$ où Δ est la droite d'équation $x = 0$.

Montrer que f est une symétrie glissante dont on précisera les éléments caractéristiques.

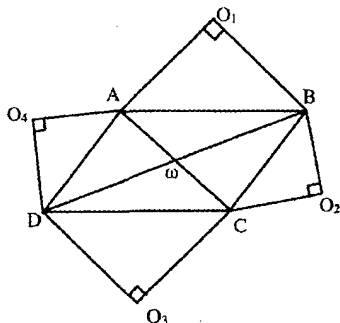
Exercice 17 :

Dans la figure ci-contre, ABCD est un parallélogramme de centre ω et les triangles ABO_1 , BCO_2 , CDO_3 et DAO_4 sont des triangles isocèles de sommets principaux respectifs O_1 , O_2 , O_3 et O_4 . On

suppose que le plan est orienté et que $\widehat{(O_1A, O_1B)} \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$.

On désigne par R_1 , R_2 , R_3 et R_4 les rotations d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centres respectifs O_1 , O_2 , O_3 et O_4 .

- 1°/ a) Déterminer $(R_2 \circ R_1)(A)$, $(R_3 \circ R_2)(B)$ et $(R_4 \circ R_3)(C)$
 b) Montrer que les applications $(R_2 \circ R_1)$, $(R_3 \circ R_2)$ et $(R_4 \circ R_3)$ sont toutes les trois égales à une même application que l'on déterminera et que l'on désignera par f .
- 2°/ a) Montrer que $R_3(R_2(O_1)) = R_2(O_1)$ et déterminer $f(O_1)$.
 b) Montrer que $f(O_2) = O_4$.
 c) Quelle est la nature du quadrilatère $O_1O_2O_3O_4$?
- 3°/ Soit Δ la médiatrice du segment $[AB]$ et S_Δ la symétrie orthogonale d'axe Δ . On pose $g = R_2 \circ S_\Delta$.
- 4°/ a) Détermine $g(A)$ et $g(O_1)$
 b) Montrer que g n'est pas une symétrie axiale et en déduire la nature de g .
 c) Construire le point $\omega' = g(\omega)$. Déterminer les éléments caractéristiques de g .



Exercice 18 :

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$ on définit l'application f qui à tout point M d'affixe z associe le point M'

$$\text{d'affixe } z' = -e^{i\frac{2\pi}{3}} z + i$$

1°/ Montrer que f est une rotation dont on précisera le centre Ω et l'angle.

2°/ Soit la suite des points $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$M_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbb{N} : M_{n+1} = f(M_n)$$

a) Soit z_n l'affixe du point M_n et $Z_n = z_n - e^{i\frac{\pi}{6}}$

Montrer qu'il existe un unique nombre complexe a tel que
 $\forall n \in \mathbb{N} : Z_{n+1} = a Z_n$.

b) Trouver l'ensemble des entiers naturels p tel que $a^p = 1$

c) Calculer z_n en fonction de n . Que vaut z_{2000} ?

Exercice 19 :

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(o, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe de sens indirect a, b, c, d les affixes respectives des points A, B, C, D . On construit à l'extérieur du quadrilatère les triangles M_1AB, M_2BC, M_3CD et M_4AD rectangles isocèles respectivement en M_1, M_2, M_3, M_4 .

1°/ Déterminer en fonction de a, b, c, d les affixes des points M_1, M_2, M_3, M_4 .

2°/ a) Démontrer que $(M_1 M_3) \perp (M_2 M_4)$

b) Démontrer que $M_1 M_3 = M_2 M_4$.

Exercice 20 :

Soit ABC un triangle. a, b, c les affixes respectives des points A, B, C .

1°/ Montrer que ABC est un triangle équilatéral de sens direct si

et seulement si $(c-a) = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$.

2°/ Montrer que ABC est un triangle équilatéral de sens indirect si

et seulement si $(c-a) = e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-a)$

3°/ Montrer que ABC est un triangle équilatéral si et seulement si

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$$

Exercice 21 :

Soit un triangle ABC quelconque, $M = B * C$. les triangles de ce sens direct BAB' et CAC' sont rectangles et isocèles de sommet A . le plan est rapporté à un repère orthonormé direct d'origine A dans lequel B et C ont pour affixes respectives b et c .

3°/ Déterminer les affixes m, b' et c' des points M, B' et C' .

4°/ Démontrer que $(AM) \perp (B'C')$ et que $B'C' = 2AM$.

Exercice 22 :

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$, on donne les points A et B distincts d'affixes respectives z_1 et z_2 . Soient

A' l'image de A par la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, B' l'image

de B par la rotation de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

4°/ Exprimer les affixes z_1 et z_2 des points A' et B' en fonction de z_1 et z_2 .

5°/ Quelle est l'affixe du milieu I de $[A'B']$?

6°/ Déterminer l'affixe du point H défini par : $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{AB}$.

7°/ En déduire que la médiatrice (OI) du triangle $OA'B'$ est une hauteur du triangle OAB et que $OI = \frac{1}{2} AB$.

Exercice 23 :

Dans le plan P orienté, rapporté au repère orthonormé direct $(\vec{O}, \vec{i}, \vec{j})$, on considère les points distincts A , B et C d'affixes respectives a , b et $-b$.

1°/ Donner une condition nécessaire et suffisante vérifiée par a et b pour les points A , B et C soient alignés.

On suppose dans la suite que les points A , B et C ne sont pas alignés et que $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ est de sens direct

2°/ Sur les droites (AB) et (AC) , à l'extérieur du triangle ABC , on construit les carrés $AFCB$ et $ACDE$ et le parallélogramme $AEHF$ de façon que $(\overrightarrow{AF}, \overrightarrow{AB})$ et $(\overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AE})$ soient de sens direct.

a) En considérant la rotation de centre A qui transforme C en E , montrer que l'affixe e du point E est $e = -ib + a(1 - i)$.

b) Calculer les affixes f , h et d des points F , H et D en fonction de a et b .

3°/ En déduire que :

a) $FE = 2OA$ et que $(OA) \perp (EF)$

b) $BD = CH$ et que $(BD) \perp (CH)$

SOLUTIONS

Solution 1 :

1°/ On a : $OA = OB$ et $(\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc $r(A) = B$

On a : $OB = OC$ et $(\overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc $r(B) = C$

On a : $OC = OD$ et $(\overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OD}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$ donc $r(C) = D$

2°/

a) On a : $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{O} \Leftrightarrow I$ est le barycentre du système $\{ (A, 3); (B, 1) \}$ donc (I) est le barycentre de $\{ (B, 3); (C, 1) \}$ car $r(A) = B$ et $r(B) = C$ (la rotation conserve les barycentres).

D'autre part on a :

$$\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BC} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{BJ} + \overrightarrow{JC} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{JB} + \overrightarrow{JC} = \overrightarrow{O} \Leftrightarrow J \text{ est le}$$

barycentre du système $\{ (B, 3); (C, 1) \}$

Conclusion : $r(I) = J$ (car un système de deux points admet un seul barycentre).

b) On a : $r(I) = J$ et $r(O) = O$ donc $OI = OJ$ et $(\overrightarrow{OI}, \overrightarrow{OJ}) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$

donc OIJ est un triangle isocèle rectangle en O .

Solution 2 :

1°/

a) On a : $ADBC$ est un losange.

$$r(D) = r_2 \circ r_1(D)$$

On a : $r_1(D) = B$ car $AD = AB$ et $(\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AB}) \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

$$r_2(B) = B \text{ donc } r(D) = r_2 \circ r_1(D) = r_2(B) = B.$$

$$r(B) = r_2 \circ r_1(B) = r_2(r_1(B))$$

Or $r_1(B) = C$ car $AB = AC$ et $\widehat{(AB, AC)} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$.

Donc $r(B) = r_2(C) = A$ car $BC = BA$ et $\widehat{(AD, AB)} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$

Donc $r(B) = A$

b) r est la composée de deux déplacements donc r est un déplacement.
Soit θ une mesure de son angle.

$\theta \equiv \frac{\pi}{3} + \frac{2\pi}{3}[2\pi] \equiv \pi[2\pi]$ donc r est une symétrie centrale.

Comme $r(D) = B$ alors le centre de r est $B * D = \Omega$

Conclusion : $r = S_\Omega$

c) On a : $r(M) = r_2 \circ r_1(M) = r_2(N) = M'$ donc $\Omega = M * M'$.

2°/

a) On a : $r_1(A) = A$ et $r_1(M) = N$ donc $AM = AN$ et

$$\widehat{(AM, AN)} \equiv \frac{\pi}{3}[2\pi]$$

Donc AMN est un triangle équilatéral.

b) $\widehat{(M\Omega, MA)} \equiv \widehat{(M\Omega, M'\Omega)} + \widehat{(M'\Omega, MA)}[\pi]$

Or $\widehat{(M\Omega, M'\Omega)} \equiv \pi[2\pi]$ car $\Omega = M * M'$ donc

$$\widehat{(M\Omega, M'\Omega)} \equiv 0[\pi]$$

D'où $\widehat{(M\Omega, MA)} \equiv \widehat{(M'\Omega, MA)}[\pi] \equiv \widehat{(MN, MA)}[\pi]$ car Ω , M' , N et M sont alignés.

D'où $\widehat{(M\Omega, MA)} \equiv \frac{\pi}{3}[\pi]$ car AMN est un triangle équilatéral de sens direct.

Solution 3:

1°/

a) $T(A) = R_B \circ R_A^{-1}(A) = R_B(A) = C \Rightarrow R(B, \frac{\pi}{2})(A) = C$

b) T est la composée de deux déplacements donc T est un déplacement.
Soit α une mesure de son angle.

$$\text{On a : } \alpha \equiv \frac{\pi}{2} + \left(-\frac{\pi}{2}\right) [2\pi] \equiv 0 [2\pi]$$

Donc T est une translation qui transforme A en C donc $T = t_{\overrightarrow{AC}}$.

c) On a : $R_A(M) = M_1$ donc $R_A^{-1}(M_1) = M$ d'où

$T(M_1) = R_B(R_A^{-1}(M_1)) = R_B(M) = M_2$ d'où $\overline{M_1 M_2} = \overline{AC}$ et par suite $M_1 M_2 C A$ est un parallélogramme.

2°/ a) On a $M_2 = R_B(M)$.

Lorsque M décrit le cercle Γ , de diamètre [AB] alors M_2 décrit le cercle Γ_2 image de Γ par R_B . Γ_2 est le cercle de diamètre [A'B']

où $A' = R_B(A)$ et $B' = R_B(B)$

or $R_B(A) = C$ et $R_B(B) = B$

conclusion : Γ_2 est le cercle de diamètre [BC].

b) Dans le triangle ABC on a : $\omega_1 = A * B$ et $\omega_2 = B * C$

D'où $\overline{\omega_1 \omega_2} = \frac{1}{2} \overline{AC}$ (d'après le théorème des milieux)

c) On a : $I = M_1 * M_2$ donc $\overline{IM_2} = \frac{1}{2} \overline{M_1 M_2}$

Or $\overline{M_1 M_2} = \overline{AC}$ (d'après 1°/ c)) d'où $\overline{M_2 I} = \frac{1}{2} \overline{AC} = \overline{\omega_2 \omega_1}$

Et par suite I est l'image de M_2 par la translation de vecteur $\overline{\omega_2 \omega_1}$.

D'autre part : M_2 décrit le cercle Γ_2 de diamètre [BC] or $\omega_2 = B * C$ donc ω_2 est le centre de Γ_2 .

Et comme $t_{\overline{\omega_2 \omega_1}}(\omega_2) = \omega_1$ alors I décrit le cercle de centre ω_1 et de même rayon que Γ_2 .

Γ et Γ_2 ont le même rayon donc I décrit le cercle de diamètre [AB].

Conclusion : I décrit le cercle Γ .

Solution 4:

1°/ $S_{(AB)}$ transforme le triangle AKB en AIB or

AKB est un triangle rectangle en K et $S_{(AB)}(K) = I$

alors AIB est un triangle rectangle en I.

d'où $(AI) \perp (BI)$.

$$\begin{cases} NA = NB \\ (\vec{NB}, \vec{NA}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow M \in D' \cap \mathcal{C}'$$

où $D' = \text{med}[AB]$ et $\mathcal{C}'$: l'arc du cercle de diamètre $[AB]$ ne contenant pas C , privé de A et B , d'où la construction

2°/ a) On a : $A' = B * C$ et $C' = A * B$ donc d'après Thalès :

$$A'C' = \frac{AC}{2} \text{ or } \frac{AC}{2} = B'M \text{ car } M \text{ est un point du cercle de diamètre}$$

$$[AC] \text{ d'où } A'C' = B'M$$

$$\text{de même on a : } A' = C * B \text{ et } B' = C * A \text{ donc } A'B' = \frac{AB}{2}$$

$$\text{or } \frac{AB}{2} = C'N \text{ d'où } A'B' = C'N$$

b) On a : $A'C' = B'M$ donc il existe un unique déplacement qui

transforme M en A' et B' en C' et comme $(\vec{A'C'}, \vec{B'M}) \equiv 0 (\pi)$ donc ce déplacement est une rotation r . L'angle de r est

$$\theta / \theta \equiv (\vec{B'M}, \vec{C'A'}) (2\pi)$$

$$\text{or } \vec{C'A'} = \vec{AB'} \text{ (théorème des milieux)}$$

$$\text{d'où } \theta \equiv (\vec{B'M}, \vec{AB'}) (2\pi)$$

$$\theta \equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi)$$

Conclusion : r est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$

$$3°/ a) \text{ On a : } A'B' = C'N \text{ et } (\vec{A'B'}, \vec{C'N}) \equiv 0 (\pi)$$

donc il existe une unique rotation r' telle que :

$$r'(A') = N \text{ et } r'(B') = C'.$$

l'angle de r' est θ' tel que $\theta' \equiv (\vec{A'B'}, \vec{NC'}) (2\pi)$

or $\vec{A'B'} = \vec{CA}$ (théorème des milieux)

$$\Rightarrow \theta' \equiv (\vec{C'A}, \vec{NC'}) (2\pi) \equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi)$$

donc r' est la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et puisque $r'(B') = C'$

alors $r' = r$ d'où $r(A') = N$.

b) r est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ donc $r \circ r$ est une rotation d'angle

$\pi \Rightarrow r \circ r$ est une symétrie centrale S_I cherchons son centre I .

$$\text{on a : } r \circ r(M) = r(A') = N \Rightarrow S_I(M) = N \Leftrightarrow I = M * N$$

Conclusion : $r \circ r = S_I$ où $I = M * N$

Soit Ω le centre de r , on a :

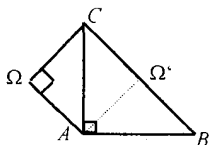
$$r(\Omega, -\frac{\pi}{2}) \circ r(\Omega, -\frac{\pi}{2}) = r(\Omega, \pi) = S_I \text{ d'où } \Omega = I$$

donc le centre de r est $I = M * N$

$$\text{c) On a : } r(A') = N \text{ et } r(M) = A' \Rightarrow \begin{cases} A'M = A'N \\ (\vec{A'M}, \vec{A'N}) \equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases}$$

donc le triangle $MA'N$ est isocèle rectangle en A' .

Solution 6 :



$l^0 * r \circ t$ est la composée d'une rotation et d'une translation donc

c'est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ (même angle que r).

Déterminons son centre Ω .

On a : $r \circ t(A) = r(B) = C$

$$\begin{cases} \Omega A = \Omega C \\ (\vec{\Omega A}, \vec{\Omega C}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases} \text{ d'où } \Omega AC \text{ est un triangle isocèle rectangle en } \Omega$$

Ω et de sens direct.

* $t \circ r$ est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre Ω'

on a : $t \circ r(A) = t(A) = B$ d'où $\Omega' AB$ est un triangle isocèle rectangle en Ω' et de sens direct. ($\Omega' = B * C$)

$$2^\circ / M_1 = r \circ t(M) ; \quad M_2 = t \circ r(M)$$

Soit $r \circ t = f$; $t \circ r = g$

on a : $M_1 = f(M)$ et $M_2 = g(M)$ d'où

$$M_2 = g \circ f^{-1}(M_1) \text{ car } f^{-1}(M_1) = M$$

$$\text{or } g \circ f^{-1} = R(\Omega', \frac{\pi}{2}) \circ R(\Omega, -\frac{\pi}{2}) = T_{\vec{u}}$$

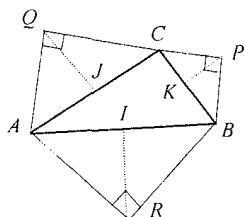
$$\text{car } \frac{\pi}{2} + -\frac{\pi}{2} \equiv 0 (2\pi)$$

$$\text{or } T_{\vec{u}}(C) = g \circ f^{-1}(C) = g(A) = B \text{ d'où } \vec{u} = \vec{CB}$$

$$M_2 = g \circ f^{-1}(M_1) \Rightarrow M_2 = T_{\vec{u}}(M_1) \Rightarrow \vec{M_1 M_2} = \vec{CB}$$

d'où $BCM_1 M_2$ est un parallélogramme.

Solution 7 :



$$1^\circ / a) r_P \circ r_Q = R(P, \frac{\pi}{2}) \circ R(Q, \frac{\pi}{2})$$

$$\text{on a : } \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \equiv \pi \pmod{2\pi}$$

d'où $r_P \circ r_Q$ est une symétrie centrale de centre ω

de plus on a : $r_P \circ r_Q(A) = r_P(C) = B$ d'où $S_\omega(A) = B$ et par suite

$$\omega = A * B = I$$

Conclusion : $r_P \circ r_Q = S_I$

$$\text{b) } r_P \circ r_Q(Q) = S_I(Q)$$

$$r_P(Q) = S_I(Q) \text{ on note } Q' = S_I(Q)$$

$$\text{d'où } r_P(Q) = Q' \text{ et par suite } \begin{cases} PQ = PQ' \\ (\widehat{PQ}, \widehat{PQ'}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \end{cases} \text{ et}$$

d'où PQQ' est un triangle isocèle rectangle en P .

or $I = Q * Q'$ d'où IPQ est un triangle isocèle en I .

$$2^\circ / \text{a) } * \quad r_Q \circ r_R = R(Q, \frac{\pi}{2}) \circ R(R, \frac{\pi}{2}) \quad \text{on a : } \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \equiv \pi \pmod{2\pi}$$

d'où $r_Q \circ r_R$ est une symétrie centrale de centre ω'

or $r_Q \circ r_R(B) = r_Q(A) = C$ d'où $S_{\omega'}(B) = C$ et par suite $\omega' = B * C$

Conclusion : $r_Q * r_R = S_K$

$$* \quad r_R * r_P = R(R, \frac{\pi}{2}) \circ R(P, \frac{\pi}{2}) \quad \text{on a : } \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \equiv \pi \pmod{2\pi}$$

d'où $r_R \circ r_P$ est une symétrie centrale de centre ω'' or

$$r_R \circ r_P(C) = r_R(B) = A \text{ d'où } \omega'' = C * A$$

$$r_R \circ r_P = S_J$$

b) On a : $r_Q \circ r_R = S_K$ d'où KQR est un triangle isocèle rectangle en K
(même raisonnement que dans 1°/-b).

$r_R \circ r_P = S_J \Rightarrow JPR$ est un triangle isocèle rectangle en J .

$$3^\circ \text{ on a : } R(I, \frac{\pi}{2})(P) = Q$$

$$R(I, \frac{\pi}{2})(A) = R$$

donc $(AP) \perp (QR)$

$$\text{on a : } R(J, \frac{\pi}{2})(R) = P$$

$$R(J, \frac{\pi}{2})(C) = Q$$

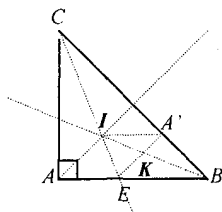
donc $(RC) \perp (PQ)$

$$\text{on a : } R(K, \frac{\pi}{2})(Q) = R \quad R(K, \frac{\pi}{2})(B) = P \quad \text{donc } (QB) \perp (RP)$$

(AP) ; (RC) et (QB) sont les hauteurs du triangle PQR et par suite
 (AP) , (RC) et (QB) sont concourantes. leur point d'intersection est
l'orthocentre du triangle PQR .

Solution 8 :

1°/ a)



$$R_C(A) = A' \Leftrightarrow \begin{cases} CA = CA' \\ \text{et} \\ (\vec{CA}, \vec{CA'}) \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi) \end{cases}$$

d'où la construction du point A' $\{A'\} = \mathcal{C}(C, CA) \cap [CB]$

$$b) R_C \circ R_A = S_{(CI)} \circ S_{(CA)} \circ S_{(CA)} \circ S_{(AI)}$$

car

$$(CI) \cap (CA) = \{C\} \quad ; \quad (CA) \cap (AI) = \{A\}$$

$$2(\overrightarrow{CA}, \overrightarrow{CI}) \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi) \quad ; \quad 2(\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$$

$$d'où R_C \circ R_A = S_{(CI)} \circ S_{(AI)} = R(I, \frac{3\pi}{4})$$

$$c) \text{ on a : } R_C \circ R_A(I) = I \quad R_C \circ R_A(A) = A' \quad d'où IA = IA'$$

$$(\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{AB}) \equiv (\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{IA}) + (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{AB}) (\pi)$$

$$\text{or } (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IA'}) \equiv \frac{3\pi}{4} (2\pi) \quad \text{car } R(I, \frac{3\pi}{4})(A) = I'$$

$$(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{AB}) \equiv (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}) + \pi (2\pi) \equiv -\frac{\pi}{4} + \pi (2\pi) \equiv \frac{3\pi}{4} (2\pi)$$

$$d'où (\overrightarrow{IA'}, \overrightarrow{AB}) \equiv 0 (\pi)$$

Conclusion : $(IA') // (AB)$

$$2^\circ / a) \text{ on a : } (IA') // (EB) \quad (A'B) \cap (EI) = \{C\}$$

d'où il existe une unique homothétie h de centre C transformant E en I

$$\text{et } B \text{ en } A' \text{ son rapport est } k = \frac{IA'}{EB} = \frac{CA'}{CB} = \frac{CA}{CB} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$d'où h = h(C, \frac{1}{\sqrt{2}}) = h_C \quad \text{et par suite } h_C(B) = A' \text{ et } h_C(E) = I \text{ d'où}$$

$$\overrightarrow{A'I} = \frac{1}{\sqrt{2}} \overrightarrow{BE}$$

$$\text{Conclusion : } \overrightarrow{BE} = -\sqrt{2} \overrightarrow{IA'}$$

$$b) h_K \circ h_C(B) = h_K(A') = E$$

$$\text{car } \frac{\overline{KE}}{\overline{KA'}} = \frac{\overline{KB}}{\overline{KI}} = \frac{\overline{EB}}{\overline{A'I}} = -\sqrt{2} \text{ (théorème de Thalès)}$$

3°/ $h_K \circ h_C$ est la composée de deux homothétie dont le produit des rapport est -1 . donc $h_K \circ h_C$ est une symétrie centrale et comme

$$h_K \circ h_C(B) = E \text{ alors } h_K \circ h_C \text{ est une symétrie centrale de centre } B * E =$$

M

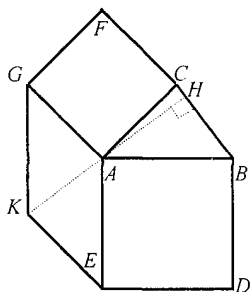
$$h_K \circ h_C = S_M \Rightarrow h_K \circ h_C(C) = S_M(C)$$

$$\Rightarrow h_K(C) = S_M(C) \quad \text{soit} \quad C' = S_M(C)$$

$$\overline{KC'} = -\sqrt{2} \overline{KC} \Rightarrow K \in (CC') \text{ or } (CC') = (MC) \text{ d'où } K \in (MC)$$

Conclusion : K, M, C sont alignés

Solution 9 :



1°/ a)

* $AB = GK$ alors il existe un unique déplacement f tel que:

$$f(A) = G; \quad f(B) = K$$

$$(\vec{AB}, \vec{GK}) \equiv (\vec{AB}, \vec{AE}) (2\pi) \equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi)$$

f est un déplacement d'angle $-\frac{\pi}{2}$ donc f une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

* $AC = GA$ alors il existe un unique déplacement f_1 tel que

$$f_1(A) = G \text{ et } f_1(C) = A \quad (\vec{AC}, \vec{GA}) \equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi)$$

f_1 est une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$

f et f_1 sont deux rotations de même angle et vérifiant

$$f(A) = f_1(A) = G \text{ d'où } f = f_1$$

Conclusion : il existe un unique déplacement f transformant A en

G ; B en K et C en A

f est la rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$ et de centre Ω .

$$\begin{cases} \Omega A = \Omega G \\ \Omega C = \Omega A \end{cases} \Rightarrow \Omega \text{ est le centre du carré } ACFG$$

$$\text{d'où } f = R(\Omega, -\frac{\pi}{2})$$

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{f} & K \\ \text{b) on a :} & & \text{d'où } (AK) \perp (BC) \\ C & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

or $(AH) \perp (BC)$ d'où (AH) et (AK) sont parallèles d'où A, H, K sont alignés.

$$\text{On a : } f(A) = G \quad ; \quad M = B * C$$

$$f(M) = f(B) * f(C) = K * A = P$$

$$(AM) \perp (GP)$$

or $P = K * A = E * G$ car $AGKE$ est un parallélogramme.

$$\text{d'où } (GP) = (EG)$$

Conclusion : $(AM) \perp (EG)$

$$2^\circ / a) f(B) = K$$

$$f(F) = C \text{ car } (\vec{\Omega F}, \vec{\Omega C}) \equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi) \text{ et } \Omega F = \Omega C$$

$$\text{d'où } BF = CK$$

$$b) (\vec{FB}, \vec{CK}) \equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi) \text{ car } f \text{ est une rotation d'angle } -\frac{\pi}{2}.$$

3° / a) on a : $EA = AB$ car $(AEDB)$ est un carré d'où il existe un unique déplacement g tel que $g(A) = E$ et $g(B) = A$

$$(\vec{AB}, \vec{EA}) \equiv (\vec{ED}, \vec{EA}) (2\pi) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \Rightarrow g \text{ est une rotation d'angle } \frac{\pi}{2}.$$

$EK = AC$ alors il existe un unique déplacement g_1 tel que:

$$g_1(A) = E \text{ et } g_1(C) = K$$

$$(\vec{AC}, \vec{EK}) \equiv (\vec{AC}, \vec{AG}) (2\pi) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$$

g et g_1 sont deux rotations de même angle $\frac{\pi}{2}$ et en plus

$$g(A) = g_1(A) \text{ d'où } g = g_1$$

Conclusion : il existe un unique déplacement g transformant ABC en EAK .

g est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc $g = R(\Omega', \frac{\pi}{2})$

or $\Omega'A = \Omega'E$; $\Omega'B = \Omega'A$ d'où Ω' est le centre du carré $AEDB$.

$$b) \text{ on a : } \begin{cases} \Omega'D = \Omega'B \\ (\vec{\Omega'D}, \vec{\Omega'B}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases} \text{ d'où } g(D) = B \quad \text{or } g(C) = K$$

$$\begin{cases} g(D) = B \\ g(C) = K \end{cases} \Rightarrow DC = BK \text{ et } (\vec{DC}, \vec{BK}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$$

4°/ on a : $(AK) \perp (BC)$ d'où (AK) est la hauteur du triangle (KBC) issue du point K .

on a : $(FB) \perp (CK)$ d'où (FB) est la hauteur du triangle KBC issue du point B .

on a : $(DC) \perp (BK)$ d'où (DC) est la hauteur du triangle KBC issue du point C .

Conclusion : (AK) , (BF) et (CD) sont les hauteurs du triangle KBC donc elles sont concourantes au point I orthocentre du triangle KBC .

g et g_1 sont deux rotations de même angle $\frac{\pi}{2}$ et en plus

$$g(A) = g_1(A) \text{ d'où } g = g_1$$

Conclusion : il existe un unique déplacement g transformant ABC en EAK .

g est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{2}$ donc $g = R(\Omega', \frac{\pi}{2})$

or $\Omega'A = \Omega'E$; $\Omega'B = \Omega'A$ d'où Ω' est le centre du carré $AEDB$.

$$\text{b) on a : } \begin{cases} \Omega'D = \Omega'B \\ (\vec{\Omega'D}, \vec{\Omega'B}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases} \text{ d'où } g(D) = B$$

or $g(C) = K$

$$\begin{cases} g(D) = B \\ g(C) = K \end{cases} \Rightarrow DC = BK \text{ et } (\vec{DC}, \vec{BK}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$$

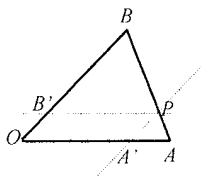
4°/ on a : $(AK) \perp (BC)$ d'où (AK) est la hauteur du triangle (KBC) issue du point K .

on a : $(FB) \perp (CK)$ d'où (FB) est la hauteur du triangle KBC issue du point B .

on a : $(DC) \perp (BK)$ d'où (DC) est la hauteur du triangle KBC issue du point C .

Conclusion : (AK) , (BF) et (CD) sont les hauteurs du triangle KBC donc elles sont concourantes au point I orthocentre du triangle KBC .

Solution 10 :



1°/ On $OA = OB$ donc il existe un unique déplacement r tel que

$$r(O) = B \text{ et } r(A) = O$$

$(\vec{OA}, \vec{BO}) \neq 0 (2\pi)$ donc r est une rotation d'angle $(\vec{OA}, \vec{BO})$.

2°/ on a : $(OA') \parallel (B'P)$ et $(OB') \parallel (A'P)$ donc $(OA'PB')$ est un parallélogramme.

on a : $OA' = B'P$ et $B'P = B'B$ car $B'PB$ est un triangle isocèle en B' . d'où $OA' = BB'$

alors il existe un unique déplacement r_1 / $r_1(O) = B$ et $r_1(A') = B'$

$$(\vec{OA'}, \vec{BB'}) \equiv (\vec{OA}, \vec{BO}) (2\pi)$$

r et r_1 sont deux rotations de même angle et vérifiant $r_1(O) = r(O)$

alors $r = r_1$ et par suite $r(A') = B'$

Soit Ω le centre de r .

$$\text{on a : } r(O) = B \Rightarrow \Omega O = \Omega B$$

$$r(A) = O \Rightarrow \Omega A = \Omega O$$

donc $\Omega O = \Omega B = \Omega A$ donc Ω est le centre du cercle circonscrit au triangle OAB .

3°/ on a : $r(A') = B'$ donc $(\vec{\Omega A'}, \vec{\Omega B'}) \equiv (\vec{OA'}, \vec{BO}) (2\pi)$

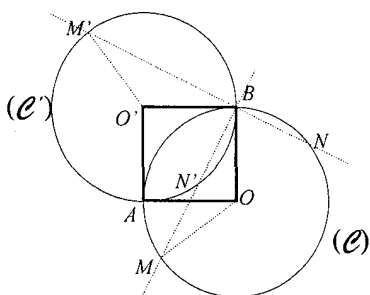
or $(\vec{OA'}, \vec{BO}) \equiv (\vec{OA'}, \vec{B'O}) (2\pi) \equiv (\vec{OA'}, \vec{OB'}) + \pi (2\pi)$

d'où $(\vec{\Omega A'}, \vec{\Omega B'}) \equiv (\vec{OA'}, \vec{OB'}) + \pi (2\pi)$

et par suite $(\vec{\Omega A'}, \vec{\Omega B'}) \equiv (\vec{OA'}, \vec{OB'}) (\pi)$ et comme $(\vec{\Omega A'}, \vec{\Omega B'}) \neq 0 (\pi)$

alors les quatres points : O, A', B' et Ω sont cocycliques.

Solution 11 :



1°/ On a : $OM = O'M'$ donc il existe un unique déplacement r tel que

$r(O) = O'$ et $r(M) = M'$ et comme $(\vec{OM}, \vec{O'M'}) \equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi)$ donc r est

une rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

Soit Ω le centre de r . $r(O) = O' \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega O = \Omega O' \\ (\vec{\Omega O}, \vec{\Omega O'}) \equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases}$

$\Leftrightarrow$ le triangle $\Omega OO'$ est un triangle rectangle isocèle rectangle en Ω et de sens indirect.

or le seul triangle isocèle rectangle et de sens indirect dont un côté est $[OO']$ est BOO' d'où $\Omega = B$

Conclusion : il existe une seule rotation c'est $r(B, -\frac{\pi}{2})$ transformant

O en O' et M en M' .

$$2^\circ / (\vec{BN}, \vec{BN'}) \equiv (\vec{M'B}, \vec{BM}) (2\pi) \equiv -(\vec{BM}, \vec{M'B}) (2\pi)$$

$$\equiv -\left[(\vec{BM}, \vec{BM'}) + (\vec{BM'}, \vec{M'B}) \right] (2\pi)$$

$$\equiv -\left(-\frac{\pi}{2} + \pi\right) (2\pi) \equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi)$$

$BM'N'$ est un triangle rectangle en B inscrit dans le cercle $\mathcal{C}'$ donc

$[M'N']$ est un diamètre d'où $O' = M' * N'$

BMN est un triangle rectangle en B inscrit dans le cercle $\mathcal{C}$ donc $[MN]$

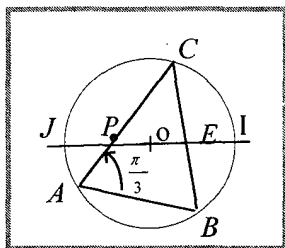
est un diamètre de $\mathcal{C}$ donc $M * N = O$

$$M * N = O \Rightarrow r(M) * r(N) = r(O) \Rightarrow M' * r(N) = O'$$

or $M' * N' = O'$ d'où $r(N) = N'$

Solution 12 :

1°/ a)



$$b) \text{ On a : } (\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$$

$$\text{donc } (\vec{MB}, \vec{MC}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi) \Leftrightarrow (\vec{MB}, \vec{MC}) \equiv (\vec{AB}, \vec{AC}) (2\pi)$$

Donc l'ensemble E_1 des points M tels que $(\vec{MB}, \vec{MC}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$ est

l'arc $[BC]$ contenant A du cercle $\mathcal{C}$ privé de B et C .

c) l'ensemble E_2 des points M tels que $(\vec{MB}, \vec{MC}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$ et

$MB < MC$ est l'arc $[BJ]$ contenant A privé de B et J car :

$E_2 = E_1 \cap \mathcal{P}_1$ où $\mathcal{P}_1$ est le demi-plan de frontière (IJ) contenant B .

2°/ a) On a : $AB = PC$ donc il existe un déplacement unique qui transforme A en P et B en C , et puisque

$$(\vec{AB}, \vec{PC}) \equiv (\vec{AB}, \vec{AC}) (2\pi) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$$

donc ce déplacement n'est autre que la rotation R d'angle $\frac{\pi}{3}$ telle que

$$R(A) = P \text{ et } R(B) = C.$$

b) Soit Ω le centre de R . On a : $R(B) = C \Rightarrow (\vec{\Omega B}, \vec{\Omega C}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$

$$\text{or } (\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi) \Rightarrow (\vec{\Omega B}, \vec{\Omega C}) \equiv (\vec{AB}, \vec{AC}) (2\pi) \Rightarrow \Omega \in E_1 \Rightarrow \Omega \in \mathcal{C}.$$

D'autre part on a : $\Omega \in \text{med}[CB]$

or $\text{med}[CB] = (OE)$ d'où $\Omega \in \mathcal{C} \cap (OE)$

d'où $\Omega = J$ ou $\Omega = I$ or Ω est un point de l'arc $[BC]$ de $\mathcal{C}$ contenant A donc $\Omega = J$

Conclusion : R est la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

$$\text{c) on a : } R(A) = P \Leftrightarrow \begin{cases} JA = JP \\ (\vec{JA}, \vec{JP}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi) \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ le triangle JAP est équilatéral de sens direct.

3°/ On a : $JB = JC$

J est un point de l'ensemble des points M vérifiant :

$$(\vec{MB}, \vec{MC}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi) \text{ donc } (\vec{JB}, \vec{JC}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi) \text{ et } JB = JC \text{ d'où } R(B) = C$$

$$\text{d'où } R \circ S_B(B) = C$$

1^{ère} Méthode :

$$* R \circ S_B = R(J, \frac{\pi}{3}) \circ R(B, \pi)$$

$$\text{donc } R \circ S_B \text{ est une rotation d'angle } \theta \equiv \frac{\pi}{3} + \pi (2\pi) \equiv -\frac{2\pi}{3} (2\pi)$$

$$\text{On a : } (\vec{IC}, \vec{IB}) \equiv \pi - (\vec{JB}, \vec{JC}) (2\pi)$$

$$\text{d'où } (\vec{IC}, \vec{IB}) \equiv \frac{2\pi}{3} (2\pi)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} IC = IB \\ \text{et} \\ (\vec{IB}, \vec{IC}) \equiv -\frac{2\pi}{3} (2\pi) \end{array} \right. \quad \text{d'où} \quad R(I, -\frac{2\pi}{3})(B) = C$$

$$R(I, -\frac{2\pi}{3}) \text{ et } R \circ S_B \text{ sont deux rotations de même angle,}$$

transformant de la même façon le point B en C .

$$\text{d'où } R \circ S_B = R(I, -\frac{2\pi}{3})$$

2^{ème} méthode : Utilisation de la décomposition d'une rotation en deux symétries orthogonales d'axes sécants :

$$\text{on a : } R \circ S_B = R(J, \frac{\pi}{3}) \circ R(B, \pi) = S_{\Delta} \circ S_{(BJ)} \circ S_{(BJ)} \circ S_{\Delta'}$$

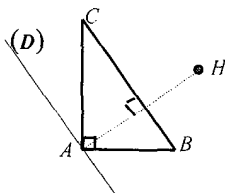
Où Δ' est la droite passant par B telle que $(\vec{BJ}, \vec{\Delta'}) \equiv \frac{\pi}{2} (\pi) \Rightarrow \Delta' \perp (BJ)$
et passant par J .

d'où $\Delta' = (BI)$ donc $R \circ S_B = S_D \circ S_{(BI)}$

d'autre part $R \circ S_B(B) = C \Rightarrow S_{\Delta}(B) = C \Rightarrow D = \text{med}[BC] = (JI)$

$$\Rightarrow R \circ S_B = S_{(JI)} \circ S_{(BI)} = R(I, 2(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{IJ})) = R(I, -\frac{2\pi}{3}).$$

Solution 13 :



1°/ f est la composée d'un nombre impair d'antidéplacements, donc f est un antidéplacement.

2°/ Il suffit de montrer que f n'a pas de point invariant.

Soit $\text{Inv}f$ l'ensemble des points invariants par f .

si $\text{Inv}f \neq \emptyset$ alors $f = S_{\Delta}$

d'où $S_{(BC)} \circ S_{(CA)} \circ S_{(AB)} = S_{\Delta}$ soit $H = S_{(BC)}(A)$

on a : $S_{(BC)} \circ S_{(CA)} \circ S_{(AB)}(A) = S_{\Delta}(A) ; S_{\Delta}(A) = H$

d'où Δ est la médiatrice de $[AH]$ d'où $\Delta = (BC)$

$$\Rightarrow S_{(BC)} \circ S_{(CA)} \circ S_{(AB)} = S_{(BC)} \text{ d'où } S_{(CA)} \circ S_{(AB)} = id_P$$

$$\text{or } S_{(CA)} \circ S_{(AB)} = R(A, 2(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})) = S_A$$

Conclusion : $\text{Inv}f = \emptyset$ d'où f est une symétrie glissante.

On a : $f = S_{(BC)} \circ S_{(CA)} \circ S_{(AB)} = S_{(BC)} \circ R(A, \pi)$

$= S_{(BC)} \circ S_D \circ S_{(AH)}$ où D est la droite passant par A et

perpendiculaire à (AH)

$$f = T_{\overrightarrow{AH}} \circ S_{(AH)}$$

Solution 14 :

1°/ On a : $f(A) = D$ et $f(D) = C$

f étant un antidéplacement donc f est soit une symétrie orthogonale, soit une symétrie glissante.

Supposons que f est une symétrie orthogonale alors $f = S_\Delta$.

On a : $S_\Delta(A) = D$ donc $S_\Delta(D) = A$ or $S_\Delta(D) = C$ ce qui est absurde donc $f \neq S_\Delta$ et par suite f est une symétrie glissante.

$$2^\circ / A \xrightarrow{f} D$$

$$D \xrightarrow{f} C$$

$$C \xrightarrow{f} E$$

On a : ADC est un triangle isocèle rectangle en D donc $DA = DC$ et

$$(\widehat{DA}, \widehat{DC}) \equiv -\frac{\pi}{2} [2\pi]$$

$$(\widehat{CD}, \widehat{CE}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \text{ car un antidéplacement transforme les mesures}$$

des angles en leurs opposés.

Donc DEC est un triangle isocèle rectangle en E.

b) On a : $CD = CE$ et $CD = CB$ donc $CE = CB$

On a : $(CD) \perp (CB)$ et $(CB) \perp (CE)$ donc $(CB) \parallel (CE)$

Donc $C = E * B$ d'où la construction du point E.

$$c) A \xrightarrow{f} D$$

$$D \xrightarrow{f} C$$

$$B' \xrightarrow{f} B'$$

On a : ABD est un triangle isocèle rectangle en A de sens direct donc son image DB'C par f est un triangle en D et de sens indirect.
D'où la construction du point B' (voir figure).

3°/ $f = S_\Delta \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}} \circ S_\Delta$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de Δ .

On a : $f \circ f = T_{2\vec{u}}$, d'autre part : $f \circ f(A) = f(f(A)) = f(D) = C$

Donc $T_{2\vec{u}}(A) = C$ et par suite $2\vec{u} = \overrightarrow{AC}$ d'où $\vec{u} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AO}$.

On a : $S_\Delta \circ T_{\vec{u}} = f$ donc $S_\Delta \circ T_{\vec{u}}(A) = f(A) \Rightarrow S_\Delta(O) = D$ (car $T_{\vec{u}}(A) = O$) d'où Δ est la médiatrice de $[OD]$.

Conclusion : la forme réduite de f est : $S_{\Delta} \circ T_{A\bar{O}} = T_{A\bar{O}} \circ S_{\Delta}$ où Δ est la médiatrice de $[OD]$.

4°/ $\varphi_1 = f \circ S_{AD}$ est la composée de deux antidéplacements alors φ_1 est un déplacement. On a : $\varphi_1(D) = f \circ S_{AD}(D) = f(S_{AD}(D)) = f(D) = C$

Soit θ_1 est une mesure de son angle.

$$\theta_1 \equiv (\widehat{AD, DC}) [2\pi] \equiv (\widehat{DA, DC}) + \pi [2\pi]$$

$$\equiv \frac{3\pi}{2} [2\pi] \equiv \frac{-\pi}{2} [2\pi]$$

Donc φ_1 est une rotation d'angle $\frac{-\pi}{2}$. Soit Ω_1 son centre donc

$$\begin{cases} \Omega_1 A = \Omega_1 D \\ \text{et} \\ \Omega_1 D = \Omega_1 C \end{cases}$$

Donc Ω_1 est le point d'intersection des deux médiatrices des segments $[AD]$ et $[DC]$ d'où $\Omega_1 = O$

Conclusion : $\varphi_1 = R(O, \frac{-\pi}{2})$.

Solution 15:

1°/

a) $3^3 - (2 + 4i) \cdot 3^2 - (9 - 10i) \cdot 3 + 18 + 6i = 0$ donc 3 est une racine de $\mathbb{C}$.

b) $\forall z \in \mathbb{C}$, on a :

$$z^3 - (2 + 4i)z^2 - (9 - 10i)z + 18 + 6i = (z - 3)(az^2 + bz + c) = az^3 + (b - 3a)z^2 + (c - 3b)z - 3c$$

$$D' \text{ où } \begin{cases} a = 1 \\ b - 3a = -2 - 4i \\ c - 3b = -9 + 10i \\ -3c = 18 + 6i \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 - 4i \\ c = -6 - 2i \end{cases}$$

Donc l'équation (E) s'écrit : $(z - 3)(z^2 + (1 - 4i)z - 6 - 2i) = 0$

$\Leftrightarrow$

$$z = 3 \text{ ou } z^2 + (1 - 4i)z - 6 - 2i = 0$$

$$\Delta = (1 - 4i)^2 + 24 + 8i = 9 \text{ d'où } z' = -2 + 2i \text{ et } z'' = 1 + 2i$$

$$\text{D'où } z_1 = 1 + 2i \text{ et } z_2 = -2 + 2i.$$

$$2^\circ / z_A = 3 ; z_B = 1 + 2i \text{ et } z_C = -2 + 2i$$

$$\text{a) on a : } z_{\overline{OA}} = z_A = 3 \text{ et } z_{\overline{CB}} = z_B - z_C = 3$$

donc $\overline{OA} = \overline{CB}$ et par suite OABC est un parallélogramme.

$$\text{b) on a : } OA = BC \text{ car } \overline{OA} = \overline{CB} \text{ donc il existe un unique}$$

déplacement f tel que $\begin{cases} f(O) = B \\ f(A) = C \end{cases}$ et il existe un unique

antidépacement g tel que : $\begin{cases} g(O) = B \\ g(A) = C \end{cases}$

$3^\circ / f$ étant un déplacement, soit α une mesure de son angle :

$$\alpha \equiv (\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{BC}) [2\pi]$$

$$\equiv \pi [2\pi] \text{ donc } f \text{ est une symétrie centrale et comme } f(O) = B$$

alors

$O * B$ est le centre de f

Conclusion : f est la symétrie centrale de centre K d'affixe $\frac{1}{2} + i$

$$(z_K = \frac{z_O + z_B}{2} = \frac{1}{2} + i).$$

$4^\circ / f \circ S$ est la composée d'un déplacement et d'un antidépacement donc c'est un antidépacement.

$$f \circ S(O) = f[S(O)] = f(O) = B = g(O)$$

$$f \circ S(A) = f[S(A)] = f(A) = C = g(A)$$

$f \circ S$ et g sont deux antidépacements qui transforment les points O et A de la même manière alors $f \circ S = g$

Solution 16:

$$1^\circ / z' = x' + iy' = 1 - y + ix = 1 + i(x + yi) = 1 + iz.$$

$$\text{on a : } z' = iz + 1.$$

r transforme chaque point M d'affixe z en un point M' d'affixe $z' = iz + 1$

c'est la forme $z' = az + b$ avec $a = i = [1; \frac{\pi}{2}]$ et $b = 1$.

donc r est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ et de centre A .

soit z_A l'affixe de A .

on a : $r(A) = A$ alors $z_A = iz_A + 1$ d'où $z_A = \frac{1}{1-i} = \frac{1+i}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$

conclusion : r est une rotation de centre $A(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2°/ On a : $r(M) = M'$ donc $AM = AM'$ et $(\overline{AM}, \overline{AM'}) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi]$ donc

AMM' est un triangle isocèle et rectangle en A .

3°/ f est la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement donc f est un antidéplacement.

Soit $M' = f(M)$: $M' = r \circ S_\Delta(M)$. On pose $M_1 = S_\Delta(M)$.

Soit $M(x, y) \Rightarrow M_1(-x, y)$ d'où $M'(1-y, -x)$ d'où :

$$f : \begin{cases} P \rightarrow P \\ M(x, y) \rightarrow M'(x', y') \end{cases} \begin{cases} x' = 1 - y \\ y' = -x \end{cases}$$

Supposons que f admet un point invariant $M(x, y)$ on a : $f(M) = M$ donc

$$\begin{cases} x = 1 - y \\ y = -x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 0 \end{cases} \text{ impossible}$$

Donc f est un antidéplacement qui n'a pas de points invariants alors f est une symétrie glissante

$f = t_{\vec{u}} \circ S_D = S_D \circ t_{\vec{u}}$ où $\vec{u}$ est un vecteur directeur de D .

On a : $f \circ f = t_{2\vec{u}}$

$f \circ f(O) = f[f(O)] = O_2$ avec $O_1(1, 0)$ et $O_2(1, -1)$

$$\text{D'où } \overline{OO_2} = 2\vec{u} \Rightarrow \vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Cherchons l'axe D de f :

On sait que $\vec{u} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de D . Pour déterminer D ,

il suffit de déterminer un point de D .

On a : $f(O) = O_1$ donc $O^*O_1 \in D$.

Soit $I = O * O_1 \Rightarrow I(\frac{1}{2}, 0)$ d'où D est la droite passant par $I(\frac{1}{2}, 0)$ et de

vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$D : x + y - \frac{1}{2} = 0.$$

Solution 17 :

1°/

a) $R_2 \circ R_1 (A) = R_2(B) = C.$

On a : $\begin{cases} O_1A = O_1B \\ \left(\overline{O_1A}, \overline{O_1B} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \Rightarrow R_1(A) = B$

On a : $\begin{cases} O_2B = O_2C \\ \left(\overline{O_2B}, \overline{O_2C} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \Rightarrow R_2(B) = C$

• $R_3 \circ R_2(B) = R_3(C) = D$

• $R_4 \circ R_3(C) = R_3(D) = A$

b) $R_2 \circ R_1, R_3 \circ R_2$ et $R_4 \circ R_3$ sont toutes les trois composées de deux déplacements donc elles sont des déplacements, de même angle $\alpha \equiv \pi [2\pi]$ et par suite elles sont des symétries centrales.

$$R_2 \circ R_1 (A) = C \text{ donc } R_2 \circ R_1 = S_{\omega} \quad (\omega = A * C)$$

$$R_3 \circ R_2(B) = D \text{ donc } R_3 \circ R_2 = S_{\omega} \quad (\omega = B * D)$$

$$R_4 \circ R_3(C) = A \text{ donc } R_4 \circ R_3 = S_{\omega}$$

$$\text{Conclusion : } R_2 \circ R_1 = R_3 \circ R_2 = R_4 \circ R_3 = S_{\omega}$$

2°/

a) $R_3(R_2(O_1)) = R_3 \circ R_2(O_1) = R_2 \circ R_1(O_1) = R_2(R_1(O_1)) = R_2(O_1).$

$$R_3(R_2(O_1)) = R_2(O_1) \Rightarrow R_2(O_1) \text{ st un point invariant par } R_3.$$

Or le seul point invariant par R_3 et O_3 d'où $R_2(O_1) = O_3.$

$$f(O_1) = R_2 \circ R_1(O_1) = R_2(O_1) = O_3.$$

$$\text{b) On a : } R_4 \circ R_3(O_2) = R_3 \circ R_2(O_2) = R_3(O_2) \Rightarrow R_4[R_3(O_2)] = R_3(O_2)$$

$R_3(O_2)$ est un point invariant de R_4 donc $R_3(O_2) = O_4$.

$$f(O_2) = R_3 \circ R_2(O_2) = R_3(O_2) = O_4.$$

$$\text{c) On a : } f(O_1) = O_3 \Rightarrow S_\omega(O_1) = O_3 \Rightarrow \omega = O_1 * O_3$$

$f(O_2) = O_4 \Rightarrow S_\omega(O_2) = O_4 \Rightarrow \omega = O_2 * O_4$ donc $O_1O_2O_3O_4$ est un parallélogramme.

$$\text{D'autre part } R_2(O_1) = O_3 \Rightarrow \begin{cases} O_2O_1 = O_2O_3 \\ \text{et} \\ \left(\overrightarrow{O_2O_1}, \overrightarrow{O_2O_3} \right) = \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases} \quad \text{donc } O_1O_2O_3O_4$$

est un carré.

3°/

$$\text{a) } g(A) = R_2 \circ S_\Delta(A) = R_2(B) = C$$

$$g(O_1) = R_2 \circ S_\Delta(O_1) = O_3 \quad (\text{car } O_1 \in \Delta)$$

b) g est la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement donc g est un antidéplacement donc g est soit une symétrie orthogonale, soit une symétrie glissante.

Si g est une symétrie orthogonale alors il existe une droite D_1 telle que $g = S_{D_1}$

on a :

- $S_{D_1}(A) = C \Rightarrow D_1$ est la médiatrice de $[AC]$
- $S_{D_1}(O_1) = O_3 \Rightarrow D_1$ est la médiatrice de $[O_1O_3]$

$$\text{Et par suite } \begin{cases} D_1 \perp (AC) \\ \text{et} \\ D_1 \perp (O_1 O_3) \end{cases} \Rightarrow (AC) \parallel (O_1 O_3)$$

Or $\omega \in (O_1 O_3) \cap (AC) \Rightarrow (O_1 O_3) = (AC) \Rightarrow O_1 \in (AC)$ ce qui est impossible.

Conclusion : g n'est pas une symétrie orthogonale donc g est une symétrie glissante.

$$c) \quad \omega' = g(\omega) = R_2 \circ S_{\Delta}(\omega) = R_2(\omega_1) \text{ où } \omega_1 = S_{\Delta}(\omega)$$

$$R_2(\omega_1) = \omega' \Leftrightarrow \begin{cases} O_2 \omega_1 = O_2 \omega' \\ \text{et} \\ \left(\overline{O_2 \omega_1}, \overline{O_2 \omega'} \right) \equiv \frac{\pi}{2} [2\pi] \end{cases}$$

Il existe un unique vecteur $\vec{u}$ et une seule droite D tel que :

$$g = t_{\vec{u}} \circ S_D = S_D \circ t_{\vec{u}} \text{ où } \vec{u} \text{ est un vecteur directeur de } D.$$

$$g = g(A) = C \Rightarrow A * C \text{ appartient à } D \Rightarrow \omega \in D.$$

$$g(\omega) = \omega' \Leftrightarrow t_{\vec{u}} \circ S_D(\omega) = \omega' \Leftrightarrow t_{\vec{u}}(S_D(\omega)) = \omega' \Leftrightarrow \vec{u} = \overline{\omega \omega'}$$

D est la droite passant par ω et de vecteur directeur $\overline{\omega \omega'}$

$$\text{donc } D = (\omega \omega').$$

$$\text{Conclusion : } g = t_{\overline{\omega \omega'}} \circ S_{(\omega \omega')} \circ t_{\overline{\omega \omega'}}.$$

Solution 18 :

1°/ On a : $z' = az + b$ avec $a = -e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $b = i$ on a : $a \neq 1$ et $|a| = 1$ donc f est une rotation de centre Ω et d'affixe $\frac{b}{1-a}$ et d'angle $\theta \equiv \arg(a) (2\pi)$.

$$* \frac{b}{1-a} = \frac{i}{1+e^{\frac{2\pi}{3}}} = \frac{i}{e^{\frac{\pi}{3}}(e^{\frac{\pi}{3}}+e^{-\frac{\pi}{3}})} = \frac{ie^{-\frac{\pi}{3}}}{2\cos(\frac{\pi}{3})} = e^{\frac{i\pi}{2}} e^{-\frac{i\pi}{3}} = e^{\frac{i\pi}{6}}.$$

d'où Ω est d'affixe $e^{\frac{i\pi}{6}}$

$$* a = -e^{\frac{i2\pi}{3}} = e^{i(\frac{2\pi}{3}-\pi)} = e^{-\frac{i\pi}{3}} \text{ d'où } \arg(a) \equiv -\frac{\pi}{3} (2\pi)$$

Conclusion : f est une rotation de centre $\Omega(e^{\frac{i\pi}{6}})$ et d'angle : $-\frac{\pi}{3}$.

2°/ On a : $\forall n \in \mathbf{N}; Z_{n+1} = z_{n+1} - e^{\frac{i\pi}{6}}$.

Or z_{n+1} est l'affixe de $M_{n+1} = f(M_n) \Rightarrow z_{n+1} = -e^{\frac{i2\pi}{3}} z_n + i$

$$\begin{aligned} \Rightarrow Z_{n+1} &= -e^{\frac{i2\pi}{3}} z_n + i - e^{\frac{i\pi}{6}} = -e^{\frac{i2\pi}{3}} z_n + e^{\frac{i\pi}{2}} - e^{\frac{i\pi}{6}} \\ &= -e^{\frac{i2\pi}{3}} (z_n - e^{-\frac{i\pi}{6}} + e^{-\frac{i\pi}{2}}) = -e^{\frac{i2\pi}{3}} (z_n - e^{\frac{i\pi}{6}}) \end{aligned}$$

Conclusion : $Z_{n+1} = -e^{\frac{i2\pi}{3}} Z_n = e^{-\frac{i\pi}{3}} Z_n$

$$b) a^p = 1 \Leftrightarrow \left(-e^{\frac{i2\pi}{3}} \right)^p = 1 \Leftrightarrow e^{-\frac{i\pi}{3}p} = 1 \Leftrightarrow p \frac{\pi}{3} \equiv 0 (2\pi)$$

$$\Leftrightarrow p \frac{\pi}{3} = 2k\pi \quad (k \in \mathbf{Z}) \Leftrightarrow p = 6k \quad (k \in \mathbf{Z})$$

Conclusion : L'ensemble des entiers naturels p tels que

$$a^p = 1 \text{ et } \{6k, \quad k \in \mathbf{N}\}$$

c) On a : $Z_{n+1} = aZ_n$

$$Z_1 = aZ_0$$

$$Z_2 = aZ_1 = a^2 Z_0$$

Démontrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}; Z_n = a^n Z_0$

$$Z_1 = aZ_0$$

Supposons que $Z_n = a^n Z_0$ et montrons que : $Z_{n+1} = a^{n+1} Z_0$

$$\text{On a : } Z_{n+1} = aZ_n = a(a^n Z_0) = a^{n+1} Z_0$$

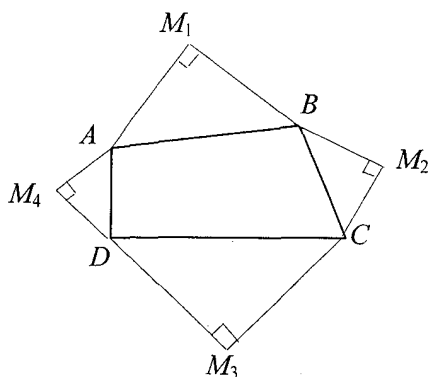
$$\text{donc } \forall n \in \mathbb{N}; Z_n = -e^{i\frac{2\pi}{3}n} (z_0 - e^{i\frac{\pi}{6}})$$

$$\text{or } z_0 = 0 \Rightarrow Z_n = e^{i(\frac{2\pi}{3}n + \frac{\pi}{6})} \quad \text{donc } \forall n \in \mathbb{N}: Z_n = e^{i(\frac{2\pi}{3}n + \frac{\pi}{6})}$$

$$\text{On a : } z_n = Z_n + e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i(\frac{2\pi}{3}n + \frac{\pi}{6})} + e^{i\frac{\pi}{6}} = e^{i\frac{\pi}{6}} (e^{i\frac{2\pi}{3}n} + 1)$$

$$z_{2000} = \frac{\sqrt{5}}{2} - \frac{1}{2}$$

Solution 19 :



1°/ Le triangle M_1AB est isocèle rectangle en M_1 de sens

$$\text{direct.} \Leftrightarrow \begin{cases} M_1A = M_1B \\ (\vec{M_1A}, \vec{M_1B}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{M_1B}{M_1A} = 1 \\ (\vec{M_1A}, \vec{M_1B}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left| \frac{z_1 - b}{z_1 - a} \right| = 1 \\ \arg \left(\frac{z_1 - b}{z_1 - a} \right) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases} \quad \text{où } z_1 \text{ est l'affixe de } M_1$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_1 - b}{z_1 - a} = e^{i\frac{\pi}{2}} \Leftrightarrow \frac{z_1 - b}{z_1 - a} = i \Leftrightarrow z_1 = \frac{b - ia}{1 - i}$$

Un raisonnement analogue nous conduit à :

$$z_2 = \frac{c - ib}{1 - i}; \quad z_3 = \frac{d - ic}{1 - i}; \quad z_4 = \frac{a - id}{1 - i}$$

$$2^\circ / \text{a) } (\vec{M_2 M_4}, \vec{M_1 M_3}) \equiv \arg \left(\frac{z_3 - z_1}{z_4 - z_2} \right) (2\pi)$$

$$\equiv \arg \left(\frac{d - ic - b + ia}{a - id - c + ib} \right) (2\pi)$$

$$\equiv \arg \left(\frac{d - b + i(a - c)}{a - c + i(b - d)} \right) (2\pi)$$

$$\equiv \arg i \left(\frac{a - c + i(b - d)}{a - c + i(b - d)} \right) (2\pi)$$

$$\equiv \arg i (2\pi) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$$

$$\text{Donc } (\vec{M_2 M_4}, \vec{M_1 M_3}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \text{ d'où } (M_1 M_3) \perp (M_2 M_4)$$

$$\text{b) } \frac{M_1 M_3}{M_2 M_4} = \frac{|z_3 - z_1|}{|z_4 - z_2|} = \frac{|z_3 - z_1|}{|z_4 - z_2|} = |i| = 1$$

$$\text{Donc } M_1 M_3 = M_2 M_4$$

Remarque : Les complexes ont servi dans cet exercice à démontrer un résultat en géométrie plane (voir chapitre similitude).

Solution 20 :

1°/ ABC est un triangle équilatéral de sens direct si et seulement si :

$$\begin{cases} AB = AC \\ (\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{AC}{AB} = 1 \\ (\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{c-a}{b-a} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} = e^{i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow c-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$$

Conclusion : ABC est équilatéral de sens direct si et seulement si

$$c-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$$

2°/ ABC est un triangle équilatéral de sens indirect si et seulement si :

$$\begin{cases} AB = AC \\ (\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv -\frac{\pi}{3} (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left| \frac{c-a}{b-a} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{c-a}{b-a}\right) \equiv -\frac{\pi}{3} (2\pi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c-a}{b-a} = e^{-i\frac{\pi}{3}} \Leftrightarrow c-a = e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-a)$$

Conclusion : ABC est équilatéral de sens indirect si et seulement si

$$c-a = e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-a)$$

3°/ ABC est un triangle équilatéral $\Leftrightarrow c-a = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a)$ ou

$$c-a = e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-a) \Leftrightarrow \left[(c-a) - e^{i\frac{\pi}{3}}(b-a) \right] \cdot \left[(c-a) - e^{-i\frac{\pi}{3}}(b-a) \right] = 0$$

$$(c-a)^2 - (c-a)(b-a)e^{-i\frac{\pi}{3}} - (b-a)(c-a)e^{i\frac{\pi}{3}} + (b-a)^2 = 0$$

$$(c-a)^2 - (c-a)(b-a)(e^{i\frac{\pi}{3}} + e^{-i\frac{\pi}{3}}) + (b-a)^2 = 0$$

$$(c-a)^2 - (c-a)(b-a) + (b-a)^2 = 0$$

$$c^2 - 2ac + a^2 - cb + ac + ab - a^2 + b^2 - 2ab + a^2 = 0$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$$

Solution 21 :

$$I^{\circ}/M = B * C \text{ d'où } z_M = \frac{z_B + z_C}{2}$$

$$\text{et par suite } m = \frac{b+c}{2}$$

$$\text{On a : } R(A, -\frac{\pi}{2})(B) = B' \text{ d'où } z_{B'} = e^{-i\frac{\pi}{2}} z_B + (1 - e^{-i\frac{\pi}{2}}) z_A \Rightarrow$$

$$b' = -ib + (1+i)a$$

$$R(A, \frac{\pi}{2})(C) = C' \text{ d'où } z_{C'} = e^{i\frac{\pi}{2}} z_C + (1 - e^{i\frac{\pi}{2}}) z_A$$

$$\Rightarrow c' = -ic + (1+i)a$$

$$2^{\circ}/ \frac{\overrightarrow{\text{aff } AM}}{\overrightarrow{\text{aff } B'C'}} = \frac{m-a}{c'-b'} = \frac{\frac{b+c}{2} - a}{ic + (1-i)a + ib - (1+i)a} = \frac{b+c-2a}{2(ic-2ia+ib)}$$

$$= \frac{b+c-2a}{2i(b+c-2a)} = \frac{1}{2i} = \frac{-i}{2} \in i\mathbb{R}$$

D'où $(AM) \perp (B'C')$.

$$\frac{AM}{B'C'} = \left| \frac{m-a}{c'-b'} \right| = \left| \frac{-i}{2} \right| = \frac{1}{2} \text{ d'où } AM = \frac{1}{2} B'C'$$

et par suite $B'C' = 2 AM$.

Solution 22 :

1°/

$$\bullet \text{ On a : } A' = R(O, \frac{\pi}{2})(A) \text{ donc } z_{A'} = e^{i\frac{\pi}{2}} z_A + (1 - e^{i\frac{\pi}{2}}) z_O$$

$$\text{Or } z_{A'} = z_1', \quad z_A = z_1 \text{ et } z_O = 0 \text{ d'où } z_1' = iz_1.$$

$$\bullet B' = R\left(O, \frac{-\pi}{2}\right)(B) \text{ donc } z_{B'} = e^{-i\frac{\pi}{2}} z_B + (1 - e^{-i\frac{\pi}{2}}) z_O \text{ d'où}$$

$$z_2' = iz_2$$

$$2^\circ / \text{ Soit } I = A'B' \text{ donc } z_I = \frac{z_{A'} + z_{B'}}{2} = \frac{i(z_1 - z_2)}{2}$$

$$3^\circ / \overline{OH} = \overline{AB} \Leftrightarrow z_H - z_O = z_B - z_A \Leftrightarrow z_H = z_2 - z_1$$

$$4^\circ / \text{aff}(\overline{OI}) = z_I - z_O = \frac{i(z_1 - z_2)}{2}$$

$$\text{aff}(\overline{AB}) = z_B - z_A = z_2 - z_1$$

$$\text{Donc } \frac{\text{aff}(\overline{OI})}{\text{aff}(\overline{AB})} = \frac{-1}{2}i \in i\mathbb{R} \text{ donc } (OI) \perp (AB) \text{ d'où } (OI) \text{ est une}$$

hauteur du triangle OAB.

$$\text{D'autre part : } \frac{OI}{AB} = \frac{\left| \frac{i}{2}(z_1 - z_2) \right|}{|z_2 - z_1|} = \left| \frac{-i}{2} \right| = \frac{1}{2} \text{ d'où } OI = \frac{1}{2} AB.$$

Solution 23 :

1°/ A, B et C sont alignés $\Leftrightarrow \overline{AB}$ et $\overline{AC}$ sont colinéaires

$$\Leftrightarrow \frac{\text{aff}(\overline{AB})}{\text{aff}(\overline{AC})} \text{ est un nombre réel}$$

$$\Leftrightarrow \frac{z_B - z_A}{z_C - z_A} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{b - a}{-b - a} \in \mathbb{R}.$$

2°/

a) Soit r : la rotation de centre A et qui transforme C en E alors

$$r = R\left(A, \frac{\pi}{2}\right) \text{ car } \left(\overline{AC}, \overline{AE}\right) \equiv \frac{\pi}{2}[2\pi]$$

d'où : $r : P \rightarrow P$

$$M(z) \mapsto M'(z')$$

$$\text{où } z' = e^{-i\frac{\pi}{2}} z + (1 - e^{-i\frac{\pi}{2}}) z_A$$

Comme $r(C) = E$ alors $z_E = i z_C + (1 - i) z_A$ or $z_A = a$ et $z_C = -b$
d'où $e = -ib + (1 - i) a$

$$\text{b) On a : } R\left(A, \frac{-\pi}{2}\right)(B) = F \text{ d'où } f = z_F = e^{-\frac{\pi}{2}} z_B + (1 - e^{-\frac{\pi}{2}}) z_A$$

$$\text{d'où } f = ib + (1 + i)a$$

On a : AEFH est un parallélogramme donc $\overrightarrow{FH} = \overrightarrow{AE}$

$$\text{d'où } z_H - z_F = z_E - z_A \text{ donc } z_H = z_E - z_A = e - a + f$$

$$\text{or } e = -ib + a(1 - i) \text{ et } f = -ib + (1 + i)a$$

$$\text{et par suite } h = z_H = -2ib + a$$

on a : $h = z_H = -2ib + a$, on a : ACDE est un parallélogramme donc

$$\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AE}$$

$$\text{d'où } z_D - z_C = z_E - z_A$$

$$\text{et par suite } d = z_D = z_E - z_A + z_C = e - a - b = -ib - ai - b$$

3°/

a)

$$\bullet \frac{FE}{OA} = \frac{|z_E - z_F|}{|z_A - z_O|} = \left| \frac{e - f}{a} \right| = \left| \frac{-2ia}{a} \right| = |2i| = 2 \text{ d'où } FE = 2 OA$$

$$\bullet \frac{\text{aff } \overrightarrow{FE}}{\text{aff } \overrightarrow{OA}} = \frac{-2ia}{a} = -2i \in i\mathbb{R} \text{ d'où } (FE) \perp (OA)$$

$$\text{b) } \frac{BD}{CH} = \left| \frac{d - b}{h - c} \right| = \left| \frac{-ib - ai - 2b}{-2ib + a + b} \right| = \left| \frac{-i(b + a - 2ib)}{b + a - 2ib} \right| = |-i| = 1 \text{ d'où}$$

$$BD = CH$$

$$\frac{\text{aff } \overrightarrow{BD}}{\text{aff } \overrightarrow{CH}} = \frac{d - b}{h - c} = -i \in i\mathbb{R} \text{ d'où } (BD) \perp (CH)$$