

EXERCICES

Exercice 1 :

Soit $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{2 + U_n^2} \end{cases}$$

1°/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n > 0$ 2°/ a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ $U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$ b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$ 3°/ Montrer que (U_n) est convergente vers 04°/ Soit $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n$ a) Montrer que (S_n) est croissanteb) Montrer que $S_n \leq 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$ c) En déduire que (S_n) est convergente vers un réel $\ell \in [1, 2]$

Exercice 2 :

$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = \frac{2U_n}{1 + U_n^2} \end{cases}$$

1°/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a $0 < U_n < 1$

2°/

a) Montrer que (U_n) est une suite croissanteb) Montrer que (U_n) est convergentec) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$

$$3^\circ/ V_n = \frac{1 - U_n}{1 + U_n}$$

a) Montrer que : $V_{n+1} = V_n^2$

b) Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N} : V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{(2^n)}$

4°/

a) Montrer que $0 \leq 1 - U_{n+1} \leq \frac{4}{5} (1 - U_n)$

b) Montrer que $0 \leq 1 - U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$

c) Montrer que Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$

$$1 - \frac{1}{n} \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right) \leq \frac{\sum_{k=1}^n U_k}{n} \leq 1$$

Exercice 3 :

On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ tel que $U_n = \sum_{p=1}^n \left(\frac{1}{p^2}\right)$

1°/ Calculer U_1 et U_2

2°/ Montrer que (U_n) est croissante

3°/ Montrer que

a) Pour tout $p \geq 2$: $\frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$

b) En déduire que (U_n) est majorée

4°/ Montrer que (U_n) est convergente .

Exercice 4 :

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2}.$$

1°/ Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n > 0$.

2°/ Etudier la monotonie de (u_n) .

3°/ On pose $v_n = u_n^2$.

a) Prouver que (v_n) est une suite arithmétique.

b) Calculer v_n puis u_n en fonction de n .

4°/ Etudier ainsi la convergence de (u_n) .

Exercice 5 :

Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_1 = \frac{5}{2} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}^*, u_{n+1} = 3 - \frac{n}{2(n+1)} \cdot (3 - u_n).$$

1°/ Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}^*, u_n < 3$.

2°/a) Justifier que : $u_{n+1} - u_n = \frac{n+2}{2(n+1)}(3 - u_n)$.

b) Etudier ainsi la monotonie de (u_n) .

3°/ Montrer que (u_n) est convergente.

4°/ On pose $v_n = n(3 - u_n)$ où $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Prouver que (v_n) est une suite géométrique.

b) Calculer v_n en fonction de n .

5°/a) En déduire le terme général de (u_n) .

b) Calculer ainsi la limite de (u_n) .

Exercice 6 :

On considère les deux suites (u_n) et (v_n) définies par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 2 \end{cases} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{3u_n + v_n}{4}, v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

1°/ Calculer u_1 et v_1 .

2°/ On pose pour tout entier n : $w_n = u_n - v_n$.

a) Prouver que (w_n) est une suite géométrique et déterminer sa raison.

b) En déduire que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < v_n$.

3°/a) Etudier la monotonie de chacune des suites (u_n) et (v_n) .

b) En déduire que : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$ et $v_n \leq 2$.

c) Justifier que (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l .

4°/ On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_n = u_n + v_n$.

a) Prouver que (a_n) est une suite constante.

b) Calculer alors l .

5°/ Exprimer en fonction de n , le terme général de (u_n) et (v_n) .

Exercice 7 :

Soient les suites tels que : $U_0 = 1$ et $V_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$U_{n+1} = \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n} \text{ et } V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}.$$

1°/ Démontrer que $0 < U_n < V_n$.

2°/ a) Démontrer que (U_n) est une suite croissante et que (V_n) est une suite décroissante.

b) Montrer que (U_n) et (V_n) sont deux suites convergentes vers la même limite l .

3°/ a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n \cdot V_n = 2$.

b) En déduire la valeur de l .

Exercice 8 :

Soient les suites $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(V_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définis par :

$$U_n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} \text{ et } V_n = U_n + \frac{1}{n!}$$

1°/ Montrer que (U_n) est une suite croissante et que (V_n) est une suite décroissante.

2°/ Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$, $\forall q \in \mathbb{N}^*$ on a : $U_p \leq V_q$.

3°/ Montrer en utilisant le 2°/ que (U_n) et (V_n) sont deux suites convergentes vers la même limite.

Exercice 9 :

Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$U_0 = 1, U_1 = 2, \forall n \in \mathbb{N}, U_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} U_n$$

1°/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : U_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n}}$

2°/ Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\forall V_n = (n+1)U_n U_{n+1}$.

Montrer que (V_n) est une suite constante.

3°/ Exprimer U_{2n-1} en fonction de n .

Exercice 10 :

Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $U_n = \sum_{k=0}^n \frac{n}{n^3 + k}$.

1°/ Calculer U_1 et U_2 .

2°/ Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n+1}{n^2+1} \leq U_n \leq \frac{1+n}{n^2}$.

3°/ Démontrer que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

Exercice 11 :

1°/ Démontrer que $\forall x > 0, \forall n \geq 2$ on a : $(1+x)^n > C_n^2 x^2$.

2°/ Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $U_n = \frac{n+1}{2^n}$.

a) Prouver que $\forall n \leq 2, U_n \leq \frac{2(n+1)}{n^2 - n}$.

b) Etudier ainsi la convergence de (U_n) .

Exercice 12 :

1°/ Montrer que $\forall x \geq 0$ on a : $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.

2°/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$.

3°/ Soit la suite (U_n) définie par : $U_n(\alpha) = \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{\alpha k}{n^2}\right)$ où α est un paramètre réel ≥ 0 .

Prouver en utilisant le 1°/ que :

$$\forall n \geq 1 \text{ on a : } \frac{\alpha(n+1)}{2n} - \frac{\alpha^3(n+1)^2}{24n^4} \leq U_n(\alpha) \leq \alpha \frac{n+1}{2n}$$

4°/ En déduire que $(U_n(\alpha))$ converge vers $\frac{\alpha}{2}$.

5°/ Soit la suite $V_n = \sum_{k=1}^n \sin^3\left(\frac{k}{n^2}\right)$; $(n \geq 1)$

a) Etablir que $\forall x \in \mathbb{R}$ on a : $\sin^3 x = -\frac{1}{4} \sin 3x + \frac{3}{4} \sin x$.

b) Montrer que $\forall n \geq 1$ on a : $V_n = -\frac{1}{4}U_n(3) + \frac{3}{4}U_n(1)$.

c) Montrer alors que (V_n) est une suite convergente vers zéro.

Exercice 13 :

Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $U_n = \sum_{k=1}^n 2^{-k!}$

1°/ Montrer que (U_n) est une suite croissante.

2°/ a) Prouver que $\forall k \geq 1$ on a : $k! \geq k$.

b) En déduire que $\forall n \geq 1$ on a $U_n \leq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

3°/ Montrer que (U_n) est convergente vers un réel $l \in]\frac{1}{2}, 1[$.

Exercice 14 :

Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^2}{2x-1}$.

1°/ a) Montrer que $\forall x \geq 1 : f(x) \geq 1$.

b) Montrer que $\forall x \geq 1 : f(x) \leq x$.

2°/ On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases} \quad (n \in \mathbb{N})$$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.

b) Etudier la monotonie de (u_n) .

c) Montrer que (u_n) est convergente et trouver sa limite.

3°/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$

Exercice 15 :

$$U_n = \sum_{k=0}^n \left(\frac{1}{k!}\right), \quad V_n = U_n + \frac{1}{n.n!}$$

1°/ Montrer que (U_n) est croissante et (V_n) est décroissante

2°/ Montrer que (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes.

Exercice 16 :

$$U_n = 2^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) ; \quad V_n = 2^{n+1} \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)$$

1°/ Etudier le sens de variations de chacune des suites (U_n) et (V_n)

2°/ Montrer que $V_n > U_n$

3°/ Montrer que (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes et calculer leur limite

Exercice 17 :

$$\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n} \end{cases} ; \quad \begin{cases} V_0 = 2 \\ V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} \end{cases}$$

1°/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$
 $0 < U_n < V_n$

2°/

a) Montrer que : $V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2} (V_n - U_n)$

b) Montrer que : $V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

3°/ Montrer que (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes .

4°/

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : U_n V_n = 2$

b) Calculer alors la limite ℓ de (U_n) et (V_n)

Exercice 18 :

I- Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par : $f(x) = \frac{x}{1+x+x^2}$

1) Montrer que $\forall x \geq 0$ on a : $f(x) \leq x$

2) Etudier les variations de f sur $\mathbb{R}^+$

II-

$$1) \begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : U_n > 0$

b) Montrer que (U_n) est convergente et calculer sa limite

2)

a) Montrer que $\forall n \geq 1 : f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N} : U_n \leq \frac{1}{n+1}$

3)

a) Montrer que $1 \leq \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} \leq 1 + \frac{1}{n+1}$

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* : n \leq \frac{1}{U_n} - 1 \leq n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

SOLUTIONS

Solution 1 :

1°/ On a : $U_0 = 1 > 0$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n > 0$, montrons que $U_{n+1} > 0$

$$\text{On a : } U_{n+1} = \frac{U_n}{2 + U_n^2} > 0$$

Conclusion : Pour $\forall n \in \mathbb{N} : U_n > 0$

2°/

$$\text{a) } U_{n+1} - \frac{1}{2} U_n = \frac{U_n}{2 + U_n^2} - \frac{1}{2} U_n = \frac{2U_n - 2U_n - U_n^3}{2(2 + U_n^2)} = \frac{-U_n^3}{2 + U_n^2} < 0$$

$$\text{D'où pour } \forall n \in \mathbb{N} : U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n$$

$$\text{b) Pour } n = 0, \text{ on a : } U_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0$$

$$1 \leq 1 \text{ vraie}$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N} : \text{et } U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n ; \text{ Montrons que } U_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\text{On a : } U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \Rightarrow \frac{1}{2} U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\text{Or : } U_{n+1} \leq \frac{1}{2} U_n \quad \text{D'où : } U_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\text{Conclusion : Pour } \forall n \in \mathbb{N} : U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{3°/ On a : } \begin{cases} 0 < U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0 \quad \left(\frac{1}{2} \in]-1, 1[\right) \end{cases}$$

$$\text{D'où : } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

$$\text{4°/ a) } S_{n+1} - S_n = (U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{n+1}) - (U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n) \\ = U_{n+1} > 0$$

D'où : (S_n) est croissante .

b) On a : $U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$

D'où : $S_n \leq 1 + \left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n$

Or $1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1 - \frac{1}{2}} = 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

D'où : $S_n \leq 2 \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)$

c) On a : $S_n \leq 2 - 2 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \leq 2$

$\left\{ \begin{array}{l} (S_n) \text{ est une suite croissante} \\ (S_n) \text{ est majorée par } 2 \end{array} \right.$

D'où (S_n) est convergente

On note $\ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$

on a : $S_n = U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_n > U_0$ car $U_n > 0$

d'où : $S_n > 1$ et par suite $\ell \geq 1$

on a : $S_n \leq 2$ d'où $\ell \leq 2$

conclusion : $1 \leq \ell \leq 2$

Solution 2 :

1°/ On a : $U_0 = \frac{1}{2}$ d'où $0 < u_0 < 1$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 < U_n < 1$ et montrons que $0 < U_{n+1} < 1$

On a : $U_{n+1} = \frac{2U_n}{U_n^2 + 1} > 0$ car $U_n > 0$

$$U_{n+1} - 1 = \frac{2U_n}{U_n^2 + 1} - 1 = \frac{2U_n - U_n^2 - 1}{U_n^2 + 1} = \frac{-(U_n - 1)^2}{U_n^2 + 1} < 0$$

D'où : $0 < U_{n+1} < 1$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} : 0 < U_n < 1$.

2°/

$$a) U_{n+1} - U_n = \frac{2U_n}{U_n^2 + 1} - U_n = \frac{U_n(1 - U_n^2)}{1 + U_n^2}$$

$$\text{On a : } 0 < U_n < 1 \quad \text{d'où : } (1 - U_n^2) > 0$$

$$\text{Et par suite : } U_{n+1} - U_n > 0$$

Conclusion : (U_n) est une suite croissante

$$b) \begin{cases} (U_n) \text{ est une suite croissante} \\ (U_n) \text{ est majorée par } 1 \end{cases}$$

d'où (U_n) est convergente

$$c) \text{ Soit } \ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$$

$$U_{n+1} = f(U_n) \quad \text{où } f(x) = \frac{2x}{1+x^2}$$

f est continue sur $\mathbb{R}$

D'où : $\ell = f(\ell)$ et par suite

$$\ell = \frac{2\ell}{1+\ell^2} \quad \text{d'où } \ell^3 + \ell = 2\ell \quad \text{signifie : } \ell = 0 \text{ ou } \ell = 1 \text{ ou } \ell = -1$$

$$\text{On a : } \begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ (U_n) \text{ est croissante} \end{cases} \quad \text{alors } U_n \geq \frac{1}{2} \text{ or } U_n < 1$$

$$\text{d'où } \frac{1}{2} \leq U_n \leq 1 \text{ et par suite } \frac{1}{2} \leq \ell < 1$$

$$\text{Conclusion : } \ell = 1 = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$$

3°/

$$a) V_{n+1} = \frac{1 - U_{n+1}}{1 + U_{n+1}} = \frac{1 - \frac{2U_n}{1+U_n^2}}{1 + \frac{2U_n}{1+U_n^2}} = \frac{1+U_n^2 - 2U_n}{1+U_n^2 + 2U_n} = \left(\frac{1-U_n}{1+U_n} \right)^2 = V_n^2$$

$$b) V_0 = \frac{1 - U_0}{1 + U_0} = \frac{1 - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} = \left(\frac{1}{3} \right)^{(2^0)}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons $V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{(2^n)}$ Montrons que : $V_{n+1} = \left(\frac{1}{3}\right)^{(2^{n+1})}$

$$\text{On a : } V_{n+1} = V_n^2 = \left[\left(\frac{1}{3}\right)^{(2^n)}\right]^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^{(2^n) \times 2} = \left(\frac{1}{3}\right)^{(2^{n+1})}$$

Conclusion : Pour $\forall n \in \mathbb{N}$: $V_n = \left(\frac{1}{3}\right)^{(2^n)}$

4°/

a) On a : $U_{n+1} < 1$ d'où : $1 - U_{n+1} > 0$

$$1 - U_{n+1} = 1 - \frac{2U_n}{1+U_n^2} = \frac{(1-U_n)^2}{1+U_n^2}$$

$$(1 - U_{n+1}) - \frac{4}{5}(1 - U_n) = \frac{(1-U_n)^2}{1+U_n^2} - \frac{4}{5}(1 - U_n)$$

$$= (1 - U_n) \left[\frac{1-U_n}{1+U_n^2} - \frac{4}{5} \right] = (1 - U_n) \left(\frac{5-5U_n-4-4U_n^2}{5(1+U_n)} \right)$$

$$= \frac{(1-U_n)(1-5U_n-4U_n^2)}{5(1+U_n)}$$

Soit $P(x) = -4x^2 - 5x + 1$

$$\Delta = 25 + 16 = 41$$

$$x' = \frac{5-\sqrt{41}}{-8} ; \quad x'' = \frac{5+\sqrt{41}}{-8}$$

x	x''	x'
P(x)	-	+

Or $U_n \in \left[\frac{1}{2}, 1\right]$ d'où : $1 - 5U_n - 4U_n^2 < 0$

$(x' < \frac{1}{2} < 1)$ et par suite $0 < 1 - U_{n+1} < \frac{4}{5}(1 - U_n)$

b) Soit $n = 0$

$$0 \leq 1 - U_0 \leq \left(\frac{4}{5}\right)^0 \quad \text{vraie car on a : } U_0 = \frac{1}{2}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $0 \leq 1 - U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$ et montrons que :

$$0 \leq 1 - U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$$

$$\text{On a : } 0 \leq 1 - U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n \Rightarrow 0 \leq \frac{4}{5} (1 - U_n) \leq \frac{4}{5} \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

$$\Rightarrow 0 \leq 1 - U_{n+1} \leq \left(\frac{4}{5}\right)^{n+1}$$

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N} : 0 \leq 1 - U_n \leq \left(\frac{4}{5}\right)^n$$

c) On a : $0 \leq 1 - U_k \leq \left(\frac{4}{5}\right)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$

$$\Rightarrow 0 \leq \sum_{k=1}^n 1 - \sum_{k=1}^n U_k \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{4}{5}\right)^k \Rightarrow 0 \leq n - \sum_{k=1}^n U_k \leq \frac{4}{5} \frac{1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n}{1 - \frac{4}{5}}$$

$$\Rightarrow 0 \leq n - \sum_{k=1}^n U_k \leq 4 \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right)$$

$$\text{Et par suite : } 1 - \frac{4}{n} \left(1 - \left(\frac{4}{5}\right)^n\right) \leq \frac{\sum_{k=1}^n U_k}{n} \leq 1$$

Solution 3 :

$$1^\circ/ \quad U_1 = \sum_{p=1}^1 \left(\frac{1}{p^2} \right) = \frac{1}{1^2} = 1$$

$$U_2 = \sum_{p=1}^2 \left(\frac{1}{p^2} \right) = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} = \frac{5}{4}$$

$$2^\circ/ \quad U_{n+1} - U_n = \sum_{p=1}^{n+1} \frac{1}{p^2} - \sum_{p=1}^n \frac{1}{p^2} = \frac{1}{(n+1)^2}$$

D'où (U_n) est une suite croissante

3^o/

$$a) \bullet \quad \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} = \frac{1}{(p-1)p}$$

$$\bullet \quad \frac{1}{p^2} - \left(\frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \right) = \frac{1}{p^2} - \frac{1}{(p-1)p} = \frac{(p-1)-p}{p^2(p-1)} = \frac{-1}{p^2(p-1)}$$

$$\text{D'où : } \frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p}$$

$$b) \text{ On a : } \frac{1}{p^2} \leq \frac{1}{p-1} - \frac{1}{p} \text{ pour tout } p \geq 2$$

D'où : $\forall n \geq 2$ on a :

$$\sum_{p=2}^n \frac{1}{p^2} \leq \sum_{p=2}^n \frac{1}{p-1} - \sum_{p=2}^n \frac{1}{p}$$

$$U_n - 1 \leq \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1} \right) - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right)$$

$$U_n - 1 \leq 1 - \frac{1}{n}$$

$$U_n \leq 2 - \frac{1}{n} < 2$$

$\Rightarrow (U_n)$ est majorée par 2

$$4^\circ/ \quad \begin{cases} (U_n) \text{ est une suite croissante} \\ (U_n) \text{ est majorée par 2} \end{cases}$$

Alors (U_n) est convergente

Solution 4 :

1°/ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

- Pour $n = 0$, on a $u_0 = 1 > 0$ donc l'inégalité est vraie pour $n = 0$;
- Soit $n \in \mathbb{N}$ Supposons que $u_n > 0$ et montrons que $u_{n+1} > 0$.

On a $u_{n+1} = \sqrt{u_n^2 + 2} > 0$.

Conclusion : $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2°/ $n \in \mathbb{N}$, on a

$$u_{n+1} - u_n = \sqrt{u_n^2 + 2} - u_n = \frac{u_n^2 + 2 - u_n^2}{\sqrt{u_n^2 + 2} + u_n} = \frac{2}{\sqrt{u_n^2 + 2} + u_n} > 0.$$

(Car $u_n > 0$). D'où la suite (u_n) est croissante.

3°/a) $v_{n+1} - v_n = u_{n+1}^2 - u_n^2 = (u_n^2 + 2) - u_n^2 = 2$ donc la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison 2 et de 1^{er} terme $v_0 = u_0^2 = 1$.

b) On a : $v_n = v_0 + n \cdot r = 1 + 2n$; $u_n = \sqrt{v_n} = \sqrt{1 + 2n}$

4°/ On a $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \sqrt{1 + 2n}$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.

Conclusion : (u_n) n'est pas convergente.

Solution 5 :

1°/ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $u_n < 3$.

- Pour $n = 1$, on a $u_1 < 3$ car $u_1 < \frac{5}{2}$.

- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que $u_n < 3$ et montrons que $u_{n+1} < 3$.

$$u_{n+1} - 3 = 3 - \frac{n}{2(n+1)}(3 - u_n) - 3 = -\frac{n}{2(n+1)}(3 - u_n)$$

Or $u_n < 3 \Rightarrow 3 - u_n > 0$ d'où $-\frac{n}{2(n+1)}(3 - u_n) < 0$ et par suite

$$u_{n+1} - 3 < 0 \Rightarrow u_{n+1} < 3.$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n < 3$.

$$2°/a) u_{n+1} - u_n = 3 - \frac{n}{2(n+1)}(3 - u_n) - u_n = 3 - u_n - \frac{n}{2(n+1)}(3 - u_n)$$

$$= (3 - u_n) \left(1 - \frac{n}{2(n+1)} \right) = (3 - u_n) \frac{n+2}{2(n+1)}.$$

b) On a $\forall n \in \mathbb{N}, u_n < 3 \Rightarrow 3 - u_n > 0$ et $\frac{n+2}{2(n+1)} > 0$ d'où

$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n > 0$ et par suite (u_n) est une suite croissante.

3°/ La suite (u_n) est croissante et majorée par 3 donc (u_n) est convergente.

4°/a) $v_{n+1} = (n+1)(3 - u_{n+1})$ or $u_{n+1} = 3 - \frac{n}{2(n+1)} \cdot (3 - u_n)$ donc

$$3 - u_{n+1} = \frac{n}{2(n+1)} \cdot (3 - u_n) \text{ et par suite}$$

$$v_{n+1} = (n+1) \cdot \frac{n}{2(n+1)} \cdot (3 - u_n) = \frac{n}{2} (3 - u_n) = \frac{1}{2} v_n.$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de 1^{er} terme

$$v_1 = 3 - u_1 = \frac{1}{2}.$$

b) $v_n = v_1 \cdot q^{n-1}$ où q est la raison de la suite (v_n) d'où

$$v_n = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

5°/a) On a $v_n = n(3 - u_n)$, pour $n \in \mathbb{N}^* \Rightarrow 3 - u_n = \frac{v_n}{n} \Rightarrow$

$$u_n = 3 - \frac{v_n}{n}. \text{ Or } v_n = \left(\frac{1}{2} \right)^n \text{ d'où } u_n = 3 - \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{1}{2} \right)^n.$$

b) On a : $-1 < \frac{1}{2} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \right)^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 3$.

Solution 6 :

$$1^\circ/ u_1 = \frac{3+2}{4} = \frac{5}{4}; v_1 = \frac{1+6}{4} = \frac{7}{4}.$$

$$\begin{aligned} 2^\circ/ a) w_{n+1} &= u_{n+1} - v_{n+1} = \frac{3u_n + v_n}{4} - \frac{u_n + 3v_n}{4} \\ &= \frac{2u_n - 2v_n}{4} = \frac{1}{2}(u_n - v_n) = \frac{1}{2} \cdot w_n \end{aligned}$$

donc (w_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de 1^{er} terme

$$w_0 = u_0 - v_0 = -1.$$

b) On a $w_n = w_0 \cdot q^n$ où q est la raison de (w_n) donc

$$w_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0 \text{ donc } w_n < 0 \Rightarrow u_n - v_n < 0 \Rightarrow u_n < v_n.$$

$$3^\circ/a) \bullet \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = \frac{3u_n + v_n}{4} - u_n = \frac{v_n - u_n}{4} > 0 \text{ car } u_n < v_n$$

donc la suite (u_n) est croissante.

$$\bullet \forall n \in \mathbb{N}, v_{n+1} - v_n = \frac{u_n + 3v_n}{4} - v_n = \frac{u_n - v_n}{4} < 0 \text{ car } u_n < v_n$$

donc la suite (v_n) est décroissante.

b) $\bullet (u_n)$ est une suite croissante donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq u_0$ or

$$u_0 = 1 \Rightarrow u_n \geq 1.$$

$\bullet (v_n)$ est une suite décroissante donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n \leq v_0$ or

$$v_0 = 2 \Rightarrow v_n \leq 2.$$

c) $\bullet$ On a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n \leq 2 \Rightarrow u_n \leq 2$. On a : (u_n) est croissante et majorée par 2 donc (u_n) converge vers un réel l .

$\bullet$ On a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq v_n$ or $u_n \geq 1 \Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}, 1 \leq v_n$.

On a : (v_n) est décroissante et minorée par 1 donc la suite (v_n) converge vers un réel l' .

$\bullet$ On a $\forall n \in \mathbb{N}, w_n = u_n - v_n$. Or (w_n) est une suite

géométrique de raison $\frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} w_n = 0 \Rightarrow 0 = l - l' \Rightarrow l = l'$.

Conclusion : (u_n) et (v_n) convergent vers la même limite l .

$$4^\circ/a) \forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a : } a_{n+1} = u_{n+1} + v_{n+1} = \frac{3u_n + v_n}{4} + \frac{u_n + 3v_n}{4} = u_n + v_n = a_n.$$

Donc $\forall n \in \mathbb{N}, \text{ on a } a_{n+1} = a_n$ ce qui prouve que la suite (a_n) est constante et $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = a_0 = u_0 + v_0 = 3$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = 3$.

b) On a $\forall n \in \mathbb{N}, a_n = u_n + v_n \Rightarrow u_n + v_n = 3 \Rightarrow$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + \lim_{n \rightarrow +\infty} v_n = 3 \Rightarrow 2l = 3 \Rightarrow l = \frac{3}{2}.$$

$$5^\circ \text{ on a : } \forall n \in \mathbb{N}, \begin{cases} u_n + v_n = 3 \\ u_n - v_n = w_n \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u_n = \frac{3 + w_n}{2} \\ v_n = \frac{3 - w_n}{2} \end{cases}$$

$$\text{Or } w_n = -\left(\frac{1}{2}\right)^n \text{ donc } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{2} \left(3 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \right) \text{ et } v_n = \frac{1}{2} \left(3 + \left(\frac{1}{2}\right)^n \right).$$

Solution 7 :

1°/ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n < V_n$.

- Pour $n=0$ on a : $0 < U_0 < V_0$ (car $U_0=1$ et $V_0=2$).
- Supposons que pour un entier donné n on a : $0 < U_n < V_n$ et montrons que $0 < U_{n+1} < V_{n+1}$.

$$U_{n+1} = \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n} \text{ est le quotient de réel strictement positifs d'où } U_{n+1} > 0.$$

$$\begin{aligned} U_{n+1} - V_{n+1} &= \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n} - \frac{U_n + V_n}{2} \\ &= \frac{4U_n V_n - (U_n + V_n)^2}{2(U_n + V_n)} = \frac{-(U_n - V_n)^2}{2(U_n + V_n)} < 0 \end{aligned}$$

d'où $U_{n+1} < V_{n+1}$ et par suite $0 < U_{n+1} < V_{n+1}$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n < V_n$.

$$2^\circ/\text{a) } \bullet U_{n+1} - U_n = \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n} - U_n = \frac{U_n V_n - U_n^2}{U_n + V_n} = \frac{U_n(V_n - U_n)}{U_n + V_n}$$

on a : $0 < U_n < V_n$ d'où $U_{n+1} - U_n > 0 \Rightarrow (U_n)$ est une suite croissante.

$$\bullet V_{n+1} - V_n = \frac{U_n + V_n}{2} - V_n = \frac{U_n - V_n}{2}$$

or $U_n < V_n$ d'où (V_n) est une suite décroissante.

b) On a : $U_n \leq V_n$ et $V_n \leq V_0$ (car (V_n) est une suite décroissante) d'où $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq 2$.

(U_n) est une suite croissante, majorée par 2 donc (U_n) est convergente.

(V_n) est une suite décroissante, minorée par 0 donc (V_n) est convergente.

Soit $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ et $l' = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_{n+1}$.

Comme $V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2}$ d'où $l' = \frac{l + l'}{2} \Rightarrow l = l'$.

3°/ a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \cdot V_n = 2$.

• pour $n = 0$: $U_0 \cdot V_0 = 1 \cdot 2 = 2$

• Supposons que pour un entier donné n on a : $U_n \cdot V_n = 2$ et montrons que

$$U_{n+1} V_{n+1} = 2.$$

$$U_{n+1} V_{n+1} = \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n} \cdot \frac{U_n + V_n}{2} = U_n V_n = 2.$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \cdot V_n = 2$.

b) On a : $\forall n \in \mathbb{N}, U_n \cdot V_n = 2$

comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = l$ donc $l^2 = 2$ et par suite $|l| = \sqrt{2}$

comme $l \geq 0$ donc $l = \sqrt{2}$.

Solution 8 :

$$1^\circ / \bullet U_{n+1} - U_n = \sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!} - \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = \frac{1}{(n+1)!} > 0$$

donc la suite (U_n) est croissante.

$$\begin{aligned} \bullet V_{n+1} - V_n &= U_{n+1} + \frac{1}{(n+1)!} - U_n - \frac{1}{n!} = U_{n+1} - U_n + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \\ &= \frac{1}{(n+1)!} + \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} = \frac{2}{(n+1)!} - \frac{1}{n!} \\ &= \frac{2-n-1}{(n+1)!} = \frac{-n-1}{(n+1)!} \leq 0 \text{ pour } n \in \mathbb{N}^*. \end{aligned}$$

On a $\forall n \geq 1, V_{n+1} - V_n \leq 0$ d'où $(V_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est décroissante.

2°/ Soit $p \in \mathbb{N}$ et $q \in \mathbb{N}^*$.

1^{ère} Cas :

Si $p \leq q \Rightarrow U_p \leq U_q$ (car (U_n) est croissante)

$$\text{Or } V_q = U_q + \frac{1}{q!} \Rightarrow V_q \geq U_q \text{ d'où } U_p \leq U_q \leq V_q \Rightarrow U_p \leq V_q.$$

2^{ème} Cas :

Si $q \leq p \Rightarrow V_p \leq V_q$ (car (V_n) est décroissante)

Et on a : $V_p \geq U_p$ d'où $U_p \leq V_p \leq V_q \Rightarrow U_p \leq V_q$.

Conclusion : $\forall p \in \mathbb{N} \quad q \in \mathbb{N}^*, U_p \leq V_q$.

• On a : $\forall p \in \mathbb{N} \quad q \in \mathbb{N}^*, U_p \leq V_q$

On choisit $p = n$ et $q = 1$ donc $U_n \leq V_1 = 3$

(U_n) est une suite croissante majorée par 3 donc elle converge.

• On choisit $p = 0$ et $q = n$ donc $U_0 \leq V_n$.

Or $U_0 = 1 \Rightarrow V_n \geq 1$ et par suite (V_n) est décroissante minorée par 1 donc elle converge.

3°/ Soit $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ et $l' = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$

$$V_n - U_n = \frac{1}{n!} \text{ or } n! \geq n \Rightarrow \frac{1}{n!} \leq \frac{1}{n} \Rightarrow 0 \leq V_n - U_n \leq \frac{1}{n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n - U_n = 0 \text{ et par suite } l = l'.$$

Solution 9 :

1°/ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, U_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n}}$

• Pour $n = 0$, $U_0 = 1 = \frac{(2 \cdot 0)!}{(0!)^2} \cdot \frac{1}{2^0}$

• Supposons que pour un entier donné n , $U_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n}}$ et montrons que

$$U_{2(n+1)} = \frac{(2(n+1))!}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2(n+1)}}$$

$$\text{On a : } U_{2n+2} = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot U_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n}}$$

$$= \frac{(2n+1)!}{2(n+1)(n!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n}} = \frac{(2n+2)(2n+1)!}{4(n+1)(n+1)(n!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n}} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n+2}}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, U_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n}}.$

2°/ On a :
$$\begin{cases} V_{n+1} = (n+2)U_{n+1} \cdot U_{n+2} \\ U_{n+2} = \frac{n+1}{n+2}U_n \end{cases} \Rightarrow V_{n+1} = (n+1)U_{n+1} \cdot U_{2n} = V_n$$

donc $\forall n \in \mathbb{N}, V_{n+1} = V_n$ et par suite (V_n) est une suite constante.

3°/ On a : $\forall n \in \mathbb{N}, V_n = V_0 = 2 \Rightarrow U_n \cdot U_{n+1} = \frac{2}{n+1}$

$$\Rightarrow U_{2n} \cdot U_{2n+1} = \frac{2}{n+1} \quad \text{or} \quad U_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{1}{2^{2n}}$$

$$\Rightarrow U_{2n+1} = \frac{2}{(2n+1)} \cdot \frac{(n!)^2 \cdot 2^{2n}}{(2n)!} \Rightarrow U_{2n+1} = \frac{2^{2n+1} \cdot (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

Solution 10 :

1°/ $U_1 = \sum_{k=0}^1 \frac{1}{1+k} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$; $U_2 = \sum_{k=0}^2 \frac{2}{8+k} = \frac{2}{8} + \frac{2}{9} + \frac{2}{10} = \frac{121}{180}$.

2°/ On a : $0 \leq k \leq n \Rightarrow n^3 \leq n^3 + k \leq n^3 + n \Rightarrow \frac{1}{n^3 + n} \leq \frac{1}{n^3 + k} \leq \frac{1}{n^3}$

$$\Rightarrow \frac{n}{n^3 + n} \leq \frac{n}{n^3 + k} \leq \frac{1}{n^2} \Rightarrow \sum_{k=0}^n \frac{n}{n^3 + n} \leq \sum_{k=0}^n \frac{n}{n^3 + k} \leq \sum_{k=0}^n \frac{1}{n^2} \Rightarrow$$

$$\frac{n(n+1)}{n^3 + n} \leq U_n \leq \frac{n+1}{n^2} \quad \text{d'où} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \frac{n+1}{n^2 + 1} \leq U_n \leq \frac{n+1}{n^2}$$

3°/ $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n^2 + 1} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{n^2} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$

donc (U_n) converge vers 0.

Solution 11 :

1°/ On a d'après la formule de Binôme-Newton :

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}$$

On choisit $a=x$ et $b=1$ d'où $(1+x)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k x^k$

On a : $\sum_{k=0}^n C_n^k x^k = C_n^0 x^0 + C_n^1 x + C_n^2 x^2 + C_n^3 x^3 + \dots + C_n^n x^n$: c'est une somme

de $(n+1)$ termes positifs ($x \geq 0$) d'où $\sum_{k=0}^n C_n^k x^k > C_n^2 x^2$

et par suite $(1+x)^n > C_n^2 x^2$.

2°/ a) On a : $(1+x)^n > C_n^2 x^2$, on choisit $x=1$ on obtient :

$$2^n > C_n^2 \text{ d'où } \frac{1}{2^n} < \frac{1}{C_n^2} \Rightarrow \frac{n+1}{2^n} < \frac{2(n+1)}{n^2-n} \text{ car } C_n^2 = \frac{n(n-1)}{2}$$

Conclusion : $U_n < \frac{2(n+1)}{n^2-n}$.

$$\text{b) } 0 < U_n < \frac{2(n+1)}{n^2-n}. \text{ On a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2(n+1)}{n^2-n} = 0 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0.$$

(U_n) est une suite convergente vers 0.

Solution 12 :

1°/ • Montrons que $\forall x \geq 0, \sin x \leq x$

Soit $f(x) = \sin x - x$;

f est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et $\forall x \in \mathbf{R}_+, f'(x) = \cos x - 1 \leq 0$ car $\forall x \in \mathbf{R}_+,$

$$-1 \leq \cos x \leq 1$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	0	



D'après le tableau des variations de f , on a : 0 est un maximum absolu de f
donc $\forall x \in \mathbf{R}_+, \sin x \leq x$.

• Montrons que $\forall x \in \mathbf{R}_+, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$.

Soit $g(x) = \sin x + \frac{x^3}{6} - 1$

g' est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et $\forall x \in \mathbf{R}_+, g''(x) = x - \sin x \geq 0$ (car $\sin x \leq x$).

x	0	$+\infty$
$g''(x)$		+
$g'(x)$		+
$g(x)$	0	0

D'après le tableau des variations de g , on a : $\forall x \in \mathbf{R}_+, g'(x) \geq 0$ et par suite

$$\forall x \in \mathbf{R}_+, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbf{R}_+, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x$.

2°/ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}, \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

• Pour $n=0$, $\sum_{k=0}^0 k^3 = \frac{0^2(0+1)^2}{4}$

• Supposons que pour un entier n donné, $\sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$ et montrons

que $\sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \frac{(n+1)^2(n+2)^2}{4}$

$$\text{On a : } \sum_{k=0}^{n+1} k^3 = \sum_{k=0}^n k^3 + (n+1)^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4} + (n+1)^3$$

$$= (n+1)^2 \left(\frac{n^2}{4} + n+1 \right) = (n+1)^2 \left(\frac{n^2 + 4n + 4}{4} \right) = (n+1)^2 \frac{(n+2)^2}{4}$$

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

$$3^\circ / \text{On a : } \forall x \in \mathbb{R}_+, x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x \text{ et } \forall k \geq 1, \forall \alpha \geq 0, \frac{\alpha k}{n^2} \geq 0$$

$$\text{donc pour } x = \frac{\alpha k}{n^2} \text{ on a : } \frac{\alpha k}{n^2} - \frac{\alpha^3 k^3}{6n^6} \leq \sin\left(\frac{\alpha k}{n^2}\right) \leq \frac{\alpha k}{n^2} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=1}^n \left(\frac{\alpha k}{n^2} - \frac{\alpha^3 k^3}{6n^6} \right) \leq U_n(\alpha) \leq \sum_{k=1}^n \frac{\alpha k}{n^2}$$

$$\begin{aligned} \text{or : } \sum_{k=1}^n \left(\frac{\alpha k}{n^2} - \frac{\alpha^3 k^3}{6n^6} \right) &= \frac{\alpha}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{\alpha^3}{6n^6} \sum_{k=1}^n k^3 \\ &= \frac{\alpha}{n^2} \frac{n(n+1)}{2} - \frac{\alpha^3}{6n^6} \cdot \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{\alpha(n+1)}{2n} - \frac{\alpha^3(n+1)^2}{24n^4} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \forall n \geq 1 : \frac{\alpha(n+1)}{2n} - \frac{\alpha^3(n+1)^2}{24n^4} \leq U_n(\alpha) \leq \frac{\alpha(n+1)}{2n}.$$

$$4^\circ / \text{On a : } \forall n \geq 1 : \frac{\alpha(n+1)}{2n} - \frac{\alpha^3(n+1)^2}{24n^4} \leq U_n(\alpha) \leq \frac{\alpha(n+1)}{2n}$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\alpha(n+1)}{2n} - \frac{\alpha^3(n+1)^2}{24n^4} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha \frac{n+1}{2n} = \frac{\alpha}{2}$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(\alpha) = \frac{\alpha}{2}.$$

$$5^\circ / \text{On a : } \forall x \in \mathbb{R}, \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} ; (i^2 = -1)$$

$$\Rightarrow \sin^3 x = -\frac{1}{8i} (e^{ix} - e^{-ix})^3 = -\frac{1}{8i} (e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix})$$

$$\Rightarrow \sin^3 x = -\frac{1}{8i} (e^{3ix} - e^{-3ix} - 3(e^{ix} - e^{-ix}))$$

$$\Rightarrow \sin^3 x = -\frac{1}{8i}(2i \sin 3x - 6i \sin x) \text{ d'où } \sin^3 x = -\frac{1}{4} \sin 3x + \frac{3}{4} \sin x$$

$$\begin{aligned} \text{b) Soit } n \geq 1, V_n &= \sum_{k=1}^n \sin^3\left(\frac{k}{n^2}\right) = \sum_{k=1}^n \left(-\frac{1}{4} \sin\left(\frac{3k}{n^2}\right) + \frac{3}{4} \sin\left(\frac{k}{n^2}\right)\right) \\ &= -\frac{1}{4} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{3k}{n^2}\right) + \frac{3}{4} \sum_{k=1}^n \sin\left(\frac{k}{n^2}\right) = -\frac{1}{4} U_n(3) + \frac{3}{4} U_n(1) \end{aligned}$$

$$\text{c) On a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(\alpha) = \frac{\alpha}{2} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(3) = \frac{3}{2} \text{ et } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n(1) = \frac{1}{2}$$

$$\text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{3}{4} \times \frac{1}{2} = 0.$$

Conclusion : (V_n) est une suite convergente vers 0.

Solution 13 :

$$1^\circ / U_{n+1} - U_n = \sum_{k=1}^{n+1} 2^{-k!} - \sum_{k=1}^n 2^{-k!} = 2^{-(n+1)!} > 0$$

d'où (U_n) est une suite croissante.

$$2^\circ / \text{a) } k! = k(k-1) \times \dots \times 3 \times 2 \times 1 = k(k-1)!$$

on a : $(k-1)! \geq 1$ d'où $k(k-1)! \geq k$ et par suite $\forall k \geq 1$ on a : $k! \geq k$.

b) Soit la suite $V_n = 2^n$.

(V_n) est une suite croissante car $V_{n+1} - V_n > 0$.

$$k! \geq k \Rightarrow V_{k!} \geq V_k \Rightarrow 2^{k!} \geq 2^k \text{ d'où } 2^{-k!} \leq 2^{-k} \Rightarrow \sum_{k=1}^n 2^{-k!} \leq \sum_{k=1}^n 2^{-k}$$

$$\Rightarrow U_n \leq \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k$$

$$\text{On a : } \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2}\right)^k = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2} \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{D'où } U_n \leq 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$3^\circ / \text{On a : } -\left(\frac{1}{2}\right)^n < 0 \Rightarrow 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n < 1 \text{ d'où } \forall n \geq 1, U_n < 1.$$

(U_n) est une suite croissante, majorée par 1 donc (U_n) converge vers 1.

On a : $U_1 = \sum_{k=1}^1 2^{-k!} = \frac{1}{2}$

On a : $\forall n \geq 1, U_n \geq U_1$ d'où $\frac{1}{2} \leq U_n < 1$ et par suite $\frac{1}{2} \leq l < 1$.

Solution 14 :

1°/a) $f(x) - 1 = \frac{x^2}{2x-1} - 1 = \frac{x^2 - 2x + 1}{2x-1} = \frac{(x-1)^2}{2x-1}$

on a : $\forall x \geq 1$ on a : $2x \geq 2$ d'où $2x-1 \geq 1$ d'où $\forall x \geq 1$ on a $f(x) - 1 \geq 0$.

Conclusion : $\forall x \geq 1, f(x) \geq 1$.

b) $f(x) - x = \frac{x^2}{2x-1} - x = \frac{x^2 - x(2x-1)}{2x-1} = \frac{-x^2 + x}{2x-1} = \frac{x(1-x)}{2x-1}$

on a : $\forall x \geq 1, 1-x \leq 0$ et $2x-1 > 0$ d'où $f(x) - x \leq 0$.

Conclusion : $\forall x \geq 1, f(x) \leq x$.

2°/a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.

pour $n=0$, on a $u_0 = 2 \geq 1$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n \geq 1$ et montrons que $u_{n+1} \geq 1$.

On a $u_n \geq 1$ donc $f(u_n) \geq 1$ (d'après 1°/a)) d'où $u_{n+1} \geq 1$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$.

b) on a - d'après 1°/b) - $\forall x \geq 1, f(x) \leq x$.

On pose $x = u_n$ car $u_n \geq 1$ donc $f(u_n) \leq u_n$ d'où $u_{n+1} \leq u_n$ et par suite (u_n) est une suite décroissante.

c) on a : (u_n) est une suite décroissante minorée par 1 donc (u_n) est convergente. Soit l sa limite.

On a : $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 1$ d'où $l \geq 1$.

On a : f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{1}{2} \right\}$ donc f est continue en l car $l \neq \frac{1}{2}$

d'où $f(l) = l$.

$$f(l) = l \Leftrightarrow \frac{l^2}{2l-1} = l \Leftrightarrow l^2 = 2l^2 - l \Leftrightarrow l^2 - l = 0 \Leftrightarrow l(l-1) = 0 \Leftrightarrow$$

$l = 0$ ou $l = 1$. Or $l \geq 1$ d'où $l = 1$.

Conclusion : (u_n) est une suite convergente vers 1.

3°/ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$.

• pour $n=0$ on a : $2^0 = 1$ d'où $\frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^0}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2 = u_0$.

• Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}$ et montrons que

$$u_{n+1} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}}.$$

$$\text{On a : } u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n^2}{2u_n - 1}$$

$$2u_n - 1 = \frac{2}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}} - 1 = \frac{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}} = \frac{\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right) \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)}{\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right]^2}$$

$$= \left(1 - \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}\right)^2\right) \cdot u_n^2 = \left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}\right) \cdot u_n^2$$

$$\text{d'où } \frac{u_n^2}{2u_n - 1} = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^{n+1}}} = u_{n+1} \text{ et par suite } \forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{1}{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{2^n}}.$$

Solution 15 :

1°/

$$\blacksquare U_{n+1} - U_n = \frac{1}{(n+1)!} > 0 \text{ d'où } (U_n) \text{ est une suite croissante}$$

$$\begin{aligned}
 \blacksquare V_{n+1} - V_n &= \left(U_{n+1} + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} \right) - \left(U_n + \frac{1}{n.n!} \right) \\
 &= (U_{n+1} - U_n) + \frac{1}{(n+1).(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} \\
 &= \frac{1}{(n+1)!} - \frac{1}{(n+1)(n+1)!} - \frac{1}{n.n!} \\
 &= \frac{1}{(n+1)!} \left(1 + \frac{1}{(n+1)} - \frac{n+1}{n} \right) \\
 &= \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{-1}{n(n+1)} \right) < 0
 \end{aligned}$$

D'où (V_n) est une suite décroissante

$$2^\circ \lim_{x \rightarrow +\infty} (V_n - U_n) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{n.n} = 0$$

$$\left(\begin{array}{l} n! \geq 1 \Rightarrow n.n! \geq n \\ \lim_{x \rightarrow \infty} n = +\infty \text{ alors } \lim_{x \rightarrow \infty} n.n! = +\infty \end{array} \right)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (U_n) \text{ est une suite croissante} \\ (V_n) \text{ est une suite décroissante} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (V_n - U_n) = 0 \end{array} \right. \quad \text{alors } (U_n) \text{ et } (V_n) \text{ sont deux}$$

suites adjacentes

Solution 16 :

$$\begin{aligned}
 1^\circ U_{n+1} - U_n &= 2^{n+2} \sin \frac{\pi}{2^{n+3}} - 2^{n+1} \sin \left(\frac{\pi}{2^{n+2}} \right) \\
 &= 2^{n+1} \left[2 \sin \left(\frac{\pi}{2^{n+3}} \right) - \sin 2 \left(\frac{\pi}{2^{n+3}} \right) \right] \\
 &= 2^{n+1} \left[2 \sin \left(\frac{\pi}{2^{n+3}} \right) - 2 \sin \left(\frac{\pi}{2^{n+3}} \right) \cos \left(\frac{\pi}{2^{n+3}} \right) \right] \\
 &= 2^{n+1} \sin \left(\frac{\pi}{2^{n+3}} \right) \left(1 - \cos \left(\frac{\pi}{2^{n+3}} \right) \right)
 \end{aligned}$$

$$\text{On a : } \left(\frac{\pi}{2^{n+3}} \right) \in [0, \pi] \text{ d'où } \sin \left(\frac{\pi}{2^{n+3}} \right) > 0$$

$$1 - \cos \left(\frac{\pi}{2^{n+3}} \right) \geq 0$$

Conclusion : $U_{n+1} - U_n \geq 0$ et par suite (U_n) est une suite croissante

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= 2^{n+2} \tan \left(\frac{\pi}{2^{n+3}} \right) - 2^{n+1} \tan \left(\frac{\pi}{2^{n+3}} \right) \\ &= 2^{n+1} \left(2 \tan \left(\frac{\pi}{2^{n+3}} \right) - \tan \frac{\pi}{2^{n+2}} \right) \end{aligned}$$

$$\text{On a : } \tan 2x = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \text{ car}$$

$$\left[\tan 2x = \frac{\sin 2x}{\cos 2x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x} = \frac{2 \sin x \cos x}{\cos^2 x \left(1 - \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} \right)} = \frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \right]$$

$$\begin{aligned} V_{n+1} - V_n &= 2^{n+1} \left[2 \tan \left(\frac{\pi}{2^{n+3}} \right) - \tan \left(2 \cdot \frac{\pi}{2^{n+3}} \right) \right] \\ &= 2^{n+1} \left[2 \tan \left(\frac{\pi}{2^{n+3}} \right) - \left(\frac{2 \tan \left(\frac{\pi}{2^{n+3}} \right)}{1 - \tan^2 \left(\frac{\pi}{2^{n+3}} \right)} \right) \right] = \frac{-2^{n+2} \tan^3 \left(\frac{\pi}{2^{n+3}} \right)}{1 - \tan^2 \left(\frac{\pi}{2^{n+3}} \right)} \end{aligned}$$

$$\text{On a : } 0 < \left(\frac{\pi}{2^{n+3}} \right) < \frac{\pi}{4}$$

$$\text{D'où : } 0 < \tan \left(\frac{\pi}{2^{n+3}} \right) < 1$$

$$\text{Et par suite } V_{n+1} - V_n < 0$$

Conclusion : (V_n) est une suite décroissante

2°/

$$\begin{aligned}
 \text{a) } V_n - U_n &= 2^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) - 2^{n+1} \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \\
 &= 2^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \left(1 - \frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)}\right) = \frac{2^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \left(\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) - 1\right)}{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right)} < 0
 \end{aligned}$$

$$\text{Car : } \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) > 0 \text{ et } 0 < \cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) < 1$$

$$\text{On a : } X = \frac{\pi}{2^{n+2}}$$

Quand $n \rightarrow +\infty$ alors $X \rightarrow 0^+$

$$\begin{aligned}
 \text{On a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n - U_n) &= \lim_{X \rightarrow 0^+} 2^{n+1} \tan\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) - 2^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) \\
 &= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\pi}{2X} (\tan X - \sin X) = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\pi}{2} \left(\frac{\tan X}{X} - \frac{\sin X}{X} \right) = 0
 \end{aligned}$$

$\left\{ \begin{array}{l} (U_n) \text{ est une suite croissante} \\ (V_n) \text{ est une suite décroissante} \end{array} \right.$ alors (U_n) et (V_n) sont adjacents
 $\lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n - U_n) = 0$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \ell$$

$$U_n = 2^{n+1} \sin\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = \frac{\pi}{2X} \sin X \text{ où } X = \frac{\pi}{2^{n+2}}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow 0^+} \frac{\pi \sin X}{2X} = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Conclusion : } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \frac{\pi}{2}$$

Solution 17 :

$$1^\circ 0 < U_0 < V_0 \text{ est vraie car : } \begin{cases} U_0 = 1 \\ V_0 = 2 \end{cases}$$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $0 < U_n < V_n$ montrons que :
 $0 < U_{n+1} < V_{n+1}$

$$\text{On a : } U_{n+1} = \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n} > 0$$

$$V_{n+1} = \frac{U_n + V_n}{2} > 0 \quad \text{car} \quad \begin{cases} U_n = 0 \\ V_n = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad U_{n+1} - V_{n+1} &= \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n} - \frac{U_n + V_n}{2} = \frac{4U_n V_n - (U_n + V_n)^2}{2(U_n + V_n)} \\ &= \frac{4U_n V_n - U_n^2 - 2U_n V_n - V_n^2}{2(U_n + V_n)} = \frac{-(U_n - V_n)^2}{2(U_n + V_n)} < 0 \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } 0 < U_{n+1} < V_{n+1}$$

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N} : 0 < U_n < V_n$$

2°/

$$\begin{aligned} \text{a) } V_{n+1} - U_{n+1} - \frac{1}{2}(V_n - U_n) &= \frac{(U_n - V_n)^2}{2(U_n + V_n)} - \frac{1}{2}(V_n - U_n) \\ &= \frac{(U_n V_n)^2 - (V_n + U_n)(V_n + U_n)}{2(U_n + V_n)} = \frac{U_n^2 - 2U_n V_n + V_n^2 - V_n^2 + U_n^2}{2(U_n + V_n)} \\ &= \frac{2U_n(U_n - V_n)}{2(U_n + V_n)} = \frac{U_n(U_n - V_n)}{U_n + V_n} < 0 \quad \text{car : } 0 < U_n < V_n \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } V_{n+1} - U_{n+1} \leq \frac{1}{2}(V_n - U_n)$$

b)

$$\text{On a : } V_0 - U_0 \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 \quad \text{vraie car : } U_0 = 1 ; V_0 = 2$$

$$\text{Soit } n \in \mathbb{N}, \text{ supposons que : } V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

$$\text{On a : } V_{n+1} - U_{n+1} \leq \left(\frac{1}{2}(V_n - U_n)\right) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$$\text{Conclusion : pour tout } n \in \mathbb{N} : V_n - U_n \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

3°/

- Etude de la monotonie de (U_n)

$$U_{n+1} - U_n = \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n} - U_n = \frac{U_n V_n - U_n^2}{U_n + V_n} = \frac{U_n (V_n - U_n)}{U_n + V_n}$$

On a : $0 < U_n < V_n$ d'où : $U_{n+1} - U_n > 0$

Conclusion : (U_n) est une suite croissante

- Etude de la monotonie de (V_n)

$$V_{n+1} - V_n = \frac{U_n + V_n}{2} - V_n = \frac{U_n - V_n}{2} < 0$$

D'où : (V_n) est une suite décroissante

On a : $\begin{cases} * (U_n) \text{ est une suite croissante} \\ * (V_n) \text{ est une suite décroissante} \\ * \lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n - U_n) = 0 \end{cases}$

Alors (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes

4°/ a)* $U_0 V_0 = 1 \times 2 = 2$

* Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n V_n = 2$

et montrons que : $U_{n+1} V_{n+1} = 2$

$$U_{n+1} V_{n+1} = \frac{2U_n V_n}{U_n + V_n} \cdot \frac{U_n + V_n}{2} = U_n V_n = 2$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N} : U_n V_n = 2$

b) (U_n) et (V_n) sont deux suites adjacentes alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \ell \in \mathbb{R}$$

Or $U_n V_n = 2$ d'où : $\ell^2 = 2$

Et par suite : $\ell = \sqrt{2}$ ou $\ell = -\sqrt{2}$ Or $U_n > 2$ d'où $\ell \geq 0$

Conclusion : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \sqrt{2}$

Solution 18 :

I-

$$1^\circ/ f(x) - x = \frac{x}{x^2 + x + 1} - x = \frac{x - x(x^2 + x + 1)}{x^2 + x + 1}$$

$$= \frac{x - x^3 - x^2 - x}{x^2 + x + 1} = \frac{-x^2(x+1)}{x^2 + x + 1} \leq 0 \quad \text{car } x \geq 0$$

2°/ f est continue, dérivable sur $\mathbb{R}^+$

$$f'(x) = \frac{1(1+x+x^2) - x(2x+1)}{(x^2+x+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+x+1)^2}$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	1	-1		$1/3$	0

II-

1°/

a) On a : $U_0 = 1 > 0$.

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n > 0$

$$\text{On a : } \begin{cases} U_n > 0 \\ U_{n+1} = \frac{U_n}{1+U_n+U_n^2} \end{cases} \quad \text{d'où } U_{n+1} > 0$$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n > 0$

b) $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n \leq 0$ (d'après I) 1°/)

$\{ (U_n) \}$ est une suite décroissante

$\{ (U_n) \}$ est minorée par 0

Donc (U_n) est convergente

$$\text{On a : } \begin{cases} \ell = \lim U_n \\ U_{n+1} = f(U_n) \\ f \text{ est continue sur } \mathbb{R}^+ \\ \ell \geq 0 \end{cases} \quad \text{donc } \ell = f(\ell)$$

$$\begin{aligned}
 \begin{cases} f(\ell) = \ell \\ \ell \geq 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} \frac{\ell}{\ell^2 + \ell + 1} = \ell \\ \ell \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ell = \ell^3 + \ell^2 + \ell \\ \ell \geq 0 \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} \ell^3 + \ell^2 = 0 \\ \ell \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \ell^2(\ell + 1) = 0 \\ \ell \geq 0 \end{cases} \\
 &\Rightarrow \begin{cases} \ell = 0 \text{ ou } \ell = -1 \\ \ell \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

(U_n) est une suite convergente vers 0

2°/

$$\text{a) } *f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}} = \frac{\frac{1}{n}}{\frac{n^2 + n + 1}{n^2}} = \frac{n}{n^2 + n + 1}$$

$$\begin{aligned}
 *f\left(\frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1} &= \frac{n}{n^2 + n + 1} - \frac{1}{n+1} \\
 &= \frac{-1}{(n^2 + n + 1)(n+1)} < 0 \text{ car } n \in \mathbb{N}
 \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } f\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n+1}$$

b) * $U_0 \leq 1$ vraie

* Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n \leq \frac{1}{n+1}$

$$\text{Montrons que } U_{n+1} \leq \frac{1}{n+2}$$

$$\text{On a : } U_n \leq \frac{1}{n+1}$$

Or f est strictement croissante sur $[0, 1]$

$$\text{D'où : } f(0) \leq f(U_n) \leq f\left(\frac{1}{n+1}\right)$$

$$0 \leq U_{n+1} \leq \frac{1}{n+2} \quad (\text{d'après 2°/ a))$$

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N} : U_n \leq \frac{1}{n+1}$$

3°/

$$a) \quad \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} = \frac{1+U_n+U_n^2}{U_n} - \frac{1}{U_n} = \frac{U_n+U_n^2}{U_n} = 1+U_n$$

$$\text{On a : } 0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$$

$$\text{D'où : } 1 \leq 1+U_n \leq 1 + \frac{1}{n+1}$$

$$\text{Et par suite } 1 \leq \frac{1}{U_n+1} - \frac{1}{U_n} \leq 1 + \frac{1}{n+1}$$

b) On a : pour tout $k \geq 1$

$$1 \leq \frac{1}{U_k} - \frac{1}{U_{k-1}} \leq 1 + \frac{1}{k}$$

$$\text{D'où : } \sum_{k=1}^n 1 \leq \sum_{k=1}^n \frac{1}{U_k} - \sum_{k=1}^n \frac{1}{U_{k-1}} \leq \sum_{k=1}^n 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$n \leq \left(\frac{1}{U_1} + \frac{1}{U_2} + \dots + \frac{1}{U_n} \right) - \left(\frac{1}{U_0} + \frac{1}{U_1} + \dots + \frac{1}{U_{n-1}} \right) \leq n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$n \leq \frac{1}{U_n} - \frac{1}{U_0} \leq n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$$

$$\text{Conclusion : pour tout } n \in \mathbb{N}^* : n \leq \frac{1}{U_n} - 1 \leq n + \sum_{k=1}^n \frac{1}{U_k}$$