

EXERCICES

Exercice 1 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle ABC tel que

$$(\vec{CA}, \vec{CB}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

la hauteur issue de C coupe (AB) en H et coupe la parallèle à (BC) menée par A en D

On pose $CA = b$ et $BC = a$

1°/ Soit S la similitude directe transformant C en A et B en C .

- a) Déterminer son rapport en fonction de a et b et calculer son angle.
- b) En utilisant cet angle, démontrer que le centre de S est le point H .
- c) Quelle est l'image de A par S .

2°/ En utilisant S , démontrer que : $HC^2 = HA \cdot HB$

3°/ Soit $I = B * C$, $J = C * A$ et $K = A * D$

Démontrer que IJK est un triangle rectangle en J et que dans ce triangle H est le pied de la hauteur issue de J .

Exercice 2 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle équilatéral ABC de sens direct. On désigne par D le symétrique de C par rapport à (AB) et E le symétrique de A par rapport à B .

soit S la similitude directe de rapport $\frac{1}{2}$, d'angle $-\frac{2\pi}{3}$, telle que $S(A) = B$

1°/ Calculer $\frac{BD}{AE}$, ainsi qu'une mesure de l'angle $(\vec{AE}, \vec{BD})$ En déduire que $S(E) = D$

2°/ Soit Ω le centre de S .

Montrer que Ω appartient aux cercles circonscrits aux triangles ABC et BDE . Construire Ω .

3°/ Soit $C' = S(C)$

a) Montrer que B, C et C' sont alignés.

b) En déduire que S transforme la droite (AC) en (CB) .

Exercice 3 :

Soit dans le plan $\mathcal{P}$ orienté un triangle ABC rectangle en A tel que :

$$AC = 2 AB \text{ et } (\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi).$$

Soit $\mathcal{C}(B)$ le cercle de centre B et de rayon AB et $\mathcal{C}(C)$ le cercle de centre C et de rayon AC . Ces deux cercles passent par A . On appelle E le second point d'intersection.

1°/ Soit S une similitude directe transformant $\mathcal{C}(B)$ en $\mathcal{C}(C)$. Quelle est la valeur du rapport de S ?

On désigne par I le centre de S . Quelle est la valeur de $\frac{IC}{IB}$?

Quel est l'ensemble Γ des centres I des similitudes directes transformant $\mathcal{C}(B)$ en $\mathcal{C}(C)$.

2°/ Soit S_A la similitude directe de centre A transformant B en C . Soit F le point de $\mathcal{C}(C)$ diamétralement opposé à E . Démontrer que $S_A(E) = F$

Exercice 4 :

On donne dans le plan, un rectangle $ABCD$ tel que :

$$AB = a ; AD = 2a ; (\vec{AB}, \vec{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$$

Soit J le milieu du segment $[AD]$

1°/ Déterminer le rapport et l'angle de la similitude directe qui transforme A en C et B en J .

2°/ Démontrer que le centre K de cette similitude est l'image du point J par la symétrie orthogonale d'axe (AC) .

Exercice 5 :

Dans le plan orienté on considère un carré $ABCD$ de centre O et tel

que: $(\vec{AB}, \vec{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$.

Soit P un point du segment $[BC]$ distinct de B . On note Q l'intersection de (AP) avec (CD) . La perpendiculaire Δ à (AP) passant par A coupe (BC) en R et (CD) en S .

1°/ Soit r la rotation de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer $r(R)$ et $r(P)$.

b) Quelle est la nature des triangles RAQ et PAS ?

2°/ On note $N = P * S$ et $M = Q * R$ et s la similitude directe de centre A , d'angle $\frac{\pi}{4}$ et de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

a) Déterminer $s(P)$ et $s(R)$.

b) Déterminer l'ensemble des points N lorsque P varie sur $[BC] \setminus \{B\}$.

c) Montrer que les points M , B , N et D sont alignés.

Exercice 6 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC tel que:

$(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ et $(\vec{BC}, \vec{BA}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi)$

Soit I le symétrique de A par rapport au milieu de $[BC]$ et H le pied de la hauteur issue de A dans le triangle ABC .

1°/ Soit S_1 la similitude directe de centre A qui transforme H en B .

a) Déterminer les éléments caractéristiques de S_1 .

b) Montrer que $S_1(C) = I$. En déduire l'image de la droite (BC) par S_1 .

2°/ Soit S_2 la similitude directe de centre A qui transforme B en C .

a) Déterminer l'image de la droite (BI) par S_2 .

b) Soit M un point de la droite (BI) , M' son image par S_2 . On suppose que M et M' sont deux points distincts de I .

Montrer que : $(\vec{AM}, \vec{AM'}) \equiv (\vec{IM}, \vec{IM'}) \pmod{\pi}$

Exercice 7 :

$ABCD$ est un carré direct, le plan étant orienté

M est un point de la droite (DC) ; la perpendiculaire à (AM) passant par A coupe (BC) en N et I est le milieu de $[MN]$.

1°/ Montrer que le triangle rectangle AMN est isocèle.

2°/ Par quelle transformation M a-t-il pour image I ?

3°/ Quel est l'ensemble décrit par le point I lorsque M décrit (DC) ?

Exercice 8 :

1°/ Dans le plan orienté soient deux points distincts E et F et O leur milieu.

Soit la similitude directe S_E de centre E , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Soit la similitude directe S_F de centre F , de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

a) Déterminer $S_F \circ S_E(O)$.

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de $S_F \circ S_E$.

2°/ Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe de sens direct

On construit les triangles isocèles directs AMB , BNC , CPD et DQA respectivement rectangles en M , N , P et Q . On note J le milieu de $[AC]$.

a) Soit S_A la similitude directe de centre A transformant M en B .

Soit S_C la similitude directe de centre C transformant B en N .

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $g = S_C \circ S_A$.

b) Soit S'_C la similitude directe de centre C transformant P en D .

Soit S'_A la similitude directe de centre A transformant D en Q .

Démontrer que $S'_A \circ S'_C = g$.

c) En déduire que les segments $[MP]$ et $[NQ]$ sont isométriques et orthogonaux.

d) K et L étant les milieux de $[MP]$ et $[NQ]$, démontrer que le triangle JKL est rectangle isocèle.

Exercice 9 :

Dans le plan orienté on considère un triangle isocèle ABC de sens direct rectangle en A .

Soit O le milieu de $[BC]$.

Δ la droite passant par C et perpendiculaire à (BC) .

B' le point d'intersection des droites (AB) et Δ .

Soit I un point du segment $[BC]$ distinct du point O . On note J le point d'intersection de (AI) et de la droite passant par C et perpendiculaire à (AC) .

La perpendiculaire en A à (AI) coupe (BC) en K .

1°/ Faire une figure soignée.

2°/ On désigne par r la rotation de centre A et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer l'image du point B , de la droite (AB) , de la droite (BC) et de la droite (AK) par r .

b) Déterminer K' et I' images des points K et I respectivement par r . Placer les points K' et I' sur la figure.

3°/ Soit ω le milieu de $[II']$ et ω' le milieu de $[KK']$. On désigne par S la similitude directe de centre A , de rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{4}$.

a) Déterminer $S(K)$ et $S(I)$.

b) Quel est l'ensemble des points ω lorsque I décrit le segment $[BC]$ privé du point O ?

c) Montrer que les points ω , O et ω' sont alignés.

4°/ Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j})$.

Soit M un point d'affixe z , déterminer l'affixe z' du point M' image de M par $r \circ S$.

Exercice 10 :

La plan est orienté. On considère un triangle ABC tel que l'angle

$(\vec{AB}, \vec{AC})$ est un nombre compris entre 0 et π .

On construit à l'extérieur de ce triangle trois carrés de côtés respectifs CA , AB et BC et on désigne par I , J et K leurs centres.

on a : $(\vec{IC}, \vec{IA}) = (\vec{JA}, \vec{JB}) = (\vec{KB}, \vec{KC}) = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ; soit F le

symétrique de C par rapport à K .

On considère la similitude directe S_1 de centre C qui transforme I en A et la similitude directe S_2 de centre B qui transforme A en J .

1°/ a) Donner les rapports et les angles de S_1 et S_2 .

b) quelle est la nature de $S_2 \circ S_1$?

2°/ Préciser les images des points I et B par $S_2 \circ S_1$.

3°/ Montrer que $IB = JK$ et $(IB) \perp (JK)$

4°/ Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(A, \vec{i}, \vec{j})$.

On désigne par b et c les affixes respectives des points B et C .

a) Exprimer en fonction de b et c les affixes des points I, J et K .

b) Retrouver alors la question 3°/.

Exercice 11 :

Soit ABC un triangle équilatéral de sens direct. On construit à l'extérieur de ce triangle les triangles équilatéraux

$A'BC$, $AB'C$ et ABC' . On note I, J, K les centres respectifs des triangles $A'BC$, $AB'C$ et ABC' .

Soit f la similitude directe de centre C , de rapport $\frac{\sqrt{3}}{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

g la similitude directe de centre A , de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

1°/ a) Déterminer la nature de $f \circ g$.

b) Déterminer $f \circ g(J)$. Que peut-on conclure.

2°/ Montrer que $f \circ g(K) = I$

3°/ Montrer alors que IJK est un triangle équilatéral.

4°/ Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ on désigne par a, b, c les affixes respectifs des points A, B, C .

a) Déterminer en fonction de a, b, c les affixes des points I, J, K .

b) Démontrer que ABC et IJK ont même centre de gravité.

Exercice 12 :

On considère un cercle () de diamètre $[OB]$

Soit A un point du segment $[OB]$ distinct de O et de B , tel que $OB = 4.OA$.

et I le milieu de $[AB]$. La médiatrice du segment $[AB]$ coupe le cercle

() en M et M' tel que $(\vec{MO}, \vec{MB}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$. Soit N le projeté

orthogonal de A sur (OM) .

1°/ a) Donner la nature du quadrilatère $AMB M'$.

b) En déduire que $(AM') \perp (OM)$ et que N, A et M' sont alignés.

2°/ Soit S la similitude directe de centre N telle que $S(M) = A$.

a) Préciser l'angle de S .

b) Déterminer les images par S des droites (MI) et (NA) , en déduire l'image par S du point M' .

3°/ a) Montrer que l'image par S de I est le point I' milieu de $[OA]$.

b) En déduire que (NI) est tangente en N au cercle de diamètre $[OA]$.

4°/ Soit σ la similitude indirecte qui transforme M' en N et B en A .

a) Déterminer les images des points M et B par $\sigma \circ S_{(OB)}$.

b) En déduire que $\sigma \circ S_{(OB)}$ est une homothétie que l'on précisera.

c) Ecrire alors σ sous forme réduite.

Exercice 13:

Le plan P est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$

1°/ Soit S_1 l'application qui à tout point $M(x, y)$ associe le

point $M'(x', y')$ tel que
$$\begin{cases} x' = 1 - 2y \\ y' = 2x \end{cases}$$

1°/ Montrer que S_1 est une similitude directe que l'on caractérisera.

2°/ Soit S_2 l'application qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe $z' = 3iz + 5 - 2i$

a) Préciser les éléments caractéristiques de S_2 .

b) Soit $h = S_1 \circ S_2$

Montrer que h est une homothétie dont on précisera ces éléments caractéristiques.

Exercice 14 :

Dans un plan orienté $\mathcal{P}$, on considère un triangle CID tel que :

$$(\vec{CI}, \vec{CD}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi).$$

On trace la hauteur, issue de C , qui coupe la droite (ID) en A et on désigne par B le projeté orthogonal de A sur la droite (CI) , et par $(\mathcal{O})$ le cercle de diamètre $[AB]$ et par (Γ) le cercle de diamètre $[CD]$.

Soit s la similitude directe de centre A telle que $s(D) = C$.

1°/ a) Déterminer l'image de la droite (CD) par la similitude s et en déduire $s(C)$.

b) Déterminer et construire le point B' image de B par la similitude s .

c) Déterminer et construire les images (Γ') et $(\mathcal{O}')$ des cercles (Γ) et $(\mathcal{O})$ par la similitude s .

2°/ a) Montrer que le point A appartient au cercle (Γ) .

b) Les cercles $(\mathcal{O})$ et (Γ) se recoupent en K . Les cercles $(\mathcal{O}')$ et (Γ') se recoupent en K' . Montrer que les points C, K, K' sont alignés.

Exercice 15 :

Dans le plan orienté on considère un triangle ABC non isocèle tel que :

$$(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi).$$

A tout point M de la droite (AB) on associe le point N de la droite (AC) tel que M et N soient dans un même demi-plan de bord (BC) et $BM = CN$.

1°/ Montrer qu'il existe une unique rotation R tel que :

pour tout point M de (AB) on a : $R(M) = N$ et $R(B) = C$

Préciser une mesure de son angle et construire son cercle Ω .

2°/ Soit O le milieu du segment $[BC]$. On désigne par $S_{(O\Omega)}$ la symétrie orthogonal d'axe $(O\Omega)$ et on pose : $f = S_{(O\Omega)} \circ R$.

a) Déterminer $f(B)$ et $f(\Omega)$.

b) Préciser la nature et les éléments caractéristiques de f .

3°/ Soit I le milieu du segment $[MN]$.

a) Quel est l'ensemble D des points I lorsque M décrit la droite (AB) ?

b) Construire D .

Exercice 16 :

On considère, dans le plan orienté, un triangle AA_1A_2 tel que

$AA_2 = 2AA_1$ et qu'une mesure de l'angle $(\vec{AA_1}, \vec{AA_2})$ soit comprise entre 0 et π . Les cercles $(\mathcal{C}_1)$ et $(\mathcal{C}_2)$ passant par A et de centres respectifs A_1 et A_2 se recoupent en B .

1°/ On désigne par S_A la similitude directe de centre A transformant $(\mathcal{C}_1)$ en $(\mathcal{C}_2)$.

Soit M un point de (C_1) et M' son image par S_A .

a) Justifier la relation $(\vec{A_1A}, \vec{A_1M}) \equiv (\vec{A_2A}, \vec{A_2M'}) (2\pi)$.

b) Démontrer que les points M , B et M' sont alignés.

2°/ On désigne par σ_A la similitude indirecte de centre A transformant $(\mathcal{C}_1)$ en $(\mathcal{C}_2)$.

a) Donner le rapport de σ_A et montrer que σ_A a pour axe la droite (D) médiatrice du segment $[A_1K]$ où K est le milieu du segment $[AA_2]$.

b) Soit l'application $f = \sigma_A \circ S_A^{-1}$.

Déterminer la nature de f et la caractériser géométriquement. En déduire que les images par S_A et σ_A de tout point M du plan sont symétriques par rapport à la droite (AA_2) .

Exercice 17 :

Dans le plan orienté, on considère un carré $ABCD$ de centre O tel que

$(\vec{AB}, \vec{AD}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$. On désigne par I et J les milieux respectifs de

$[AB]$ et $[BC]$.

1°/ a) Montrer qu'il existe un unique déplacement f qui envoie A sur C et B sur D . Caractériser f .

b) Soit g l'antidéplacement qui envoie A sur C et B sur D .

Déterminer $(g \circ f)(C)$ et $(g \circ f)(D)$. Caractériser $g \circ f$.

c) Dédurre la forme réduite de l'antidéplacement g .

2°/ Soit S la similitude directe qui envoie A sur B et D sur I .

a) Déterminer le rapport et l'angle de la similitude S . construire le centre Ω de S .

b) Déterminer les images des droites (AC) et (CD) par S . En déduire que le triangle $O\Omega C$ est rectangle.

- c) Déterminer l'image du carré $ABCD$ par la similitude S .
 d) Montrer que les points A , Ω et J sont alignés.

Exercice 18:

Dans le plan orienté, ABC est un triangle quelconque de sens direct.

I et J les milieux respectifs des côtés $[BC]$ et $[AB]$

r est la rotation de centre J et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

A' et C' sont les images respectives des points A et C par r .

s est la similitude directe qui transforme I en C' et J en A' . On pose

$$h = r^{-1} \circ s$$

1°/ a) Déterminer les images respectives des points I et J par h .

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de h .

2°/ a) Montrer que $(IJ) \perp (A'C')$ et que $A'C' = 2IJ$

b) Déterminer le rapport et l'angle de s et montrer que son centre ω appartient à la fois aux cercles de diamètres $[IC']$ et $[JA']$.

c) B' étant le symétrique de A' par rapport à J montrer que $(\omega B) \perp (\omega B')$

Exercice 19 :

On considère dans le plan P orienté un triangle équilatéral ABC de sens direct. On désigne par I et J les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$ et par D le symétrique de A par rapport à C .

1°/ Soit f l'antidéplacement de P tel que : $f(C) = A$ et $f(A) = B$

Montrer que f est une symétrie glissante dont on déterminera l'axe et le vecteur.

2°/ Soit g la similitude directe telle que : $g(B) = D$ et $g(I) = C$

Montrer que $g(A) = A$ et déterminer les éléments caractéristiques de g .

3°/ Soit Ω le point défini par : $\vec{\Omega A} + 2\vec{\Omega I} = \vec{0}$

a) Justifier que $f \circ g$ est une similitude indirecte.

b) Déterminer $f \circ g(I)$ et $f \circ g(A)$.

c) Vérifier que $\vec{\Omega B} + 2\vec{\Omega A} = \vec{0}$. En déduire que $f \circ g(\Omega) = \Omega$

4°/ a) Déterminer le rapport de la similitude de $f \circ g$.

b) Montrer que l'axe de la similitude $f \circ g$ est la perpendiculaire en Ω à la droite (AB) .

Exercice 20:

Dans le plan orienté, ABI est un triangle équilatéral tel que :

$$(\vec{AB}, \vec{AI}) \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}.$$

Soit Ω le symétrique de B par rapport à (AI) .

1°/ Soit R la rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ qui transforme A en I .

a) Montrer que Ω est le centre de cette rotation.

b) Soit $C = R(B)$. Montrer que I est le milieu du segment $[AC]$.

2°/ A tout point M de $[AB]$ distinct de A et de B , on associe le point M' de $[IC]$ tel que $AM = IM'$

Montrer que le triangle $\Omega MM'$ est équilatéral.

3°/ Soit G le centre de gravité du triangle $\Omega MM'$ et S la similitude directe de centre Ω qui transforme M en G .

a) Préciser le rapport et l'angle de cette similitude.

b) Montrer que $S(B) = I$ et construire le point $A' = S(A)$

c) Montrer que les points I, G et A' sont alignés.

Exercice 21 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle rectangle ABC tel que

$$\widehat{(\vec{AB}, \vec{AC})} \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \text{ et } AB = 2AC.$$

Soient D et D' deux droites parallèles passant respectivement par B et C et ne contenant aucun des côtes du triangle ABC.

Soit Δ la droite passant par A et perpendiculaire à D et D'.

La droite Δ coupe D et D' respectivement en I et J.

1°/ Soit S la similitude directe qui transforme A en B et C en A.

a) Déterminer l'angle et le rapport de S.

b) Soit Ω le centre de S.

Montrer que Ω est le projeté orthogonal de A sur (BC).

2°/ a) Déterminer $S(D')$ et $S(\Delta)$.

b) En déduire $S(J)$.

c) Montrer que le cercle de diamètre [IJ] passe par Ω

Exercice 22 :

Dans le plan orienté, on considère un triangle ABC rectangle en A

et tel que $\widehat{(\vec{BC}, \vec{BA})} \equiv \frac{\pi}{3} \pmod{2\pi}$ (**Erreur ! Signet non défini.**). Soit D le

point du plan tel que $\vec{AD} = \vec{BC}$ et soit K le symétrique de B par rapport à A. On désigne par O, I et J les milieux respectifs des segments [AC], [BC] et [AD].

1°) Soit s la similitude directe du plan telle que $s(J) = B$ et $s(D) = K$.

a) Montrer qu'une mesure de l'angle de s est $\frac{\pi}{3}$.

b) Montrer que le rapport de s est 2 (on pourra montrer que le triangle CBK est équilatéral).

c) Montrer que C est le centre de la similitude s .

2°) Soit A' le symétrique de D par rapport à C et f l'antidépacement du plan qui transforme D en A et A en A' .

a) Montrer que f est une symétrie glissante dont on déterminera les éléments caractéristiques.

b) Montrer que $f(K) = C$.

3°) On pose $g = f \circ s$.

a) Montrer que g est une similitude indirecte dont on précisera le rapport.

b) On désigne par Δ l'axe de g et par Ω son centre. Montrer que $(g \circ g)$ est l'homothétie de centre Ω et de rapport 4.

vérifier que $g \circ g(D) = B$.

c) Donner une construction de l'axe Δ de g .

Exercice 23 :

Soit f l'application du plan complexe P dans lui-même, qui au point m d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par $z' = -2i \bar{z} + 1 + i$

1°/ Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de f .

2°/ Démontrer que $f \circ f$ est une homothétie h que l'on caractérisera

3°/ Soit S la similitude directe de P de centre $\Omega\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$, de rapport $\frac{1}{2}$,

dont une mesure de l'angle est $\frac{\pi}{2}$.

a) Déterminer la forme complexe de S

b) Soit $\varphi = f \circ S$

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de φ

Exercice 24 :

On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $-1+i$; $3+2i$ et $i\sqrt{2}$

$$1^\circ/ f : \begin{cases} P \rightarrow P \\ M(z) \mapsto M'(z')/z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}}z - 1 + i(1+\sqrt{2}) \end{cases}$$

a) Déterminer $f(A)$ et $f(C)$

b) En déduire la nature et les éléments caractéristiques de f

2°/

a) Donner l'écriture complexe de l'homothétie h de centre A et de rapport $\sqrt{2}$

b) Soit $g = f \circ h$

Déterminer la forme complexe de g .

3°/

a) Soit M_0 d'affixe $2-4i$

Montrer que : $\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AM_0''}$ où $M_0'' = g(M_0)$

b) Déterminer l'ensemble des couples $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que :

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AM''}$ où $M'' = g(M)$ et $M(x, y)$.

Exercice 25 :

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$. On

considère l'application f qui au point m d'affixe z , fait correspondre le point M d'affixe z' tel que :

$$z' = \frac{(3+4i)}{5}z + \frac{1-2i}{5}$$

1°/ On note x et x' , y et y' les parties réelles et les parties imaginaires de z et z'

$$\text{Démontrer que } \begin{cases} x' = \frac{3x + 4y + 1}{5} \\ y' = \frac{4x - 3y - 2}{5} \end{cases}$$

2°/ Démontrer que f est une symétrie orthogonale que l'on précisera.

3°/ Déterminer l'ensemble (D) des points M d'affixes z tel que : $z' \in \mathbb{R}$

4°/ On cherche à déterminer les points de (D) dont les coordonnées sont entiers.

Donner une solution particulière (x_0, y_0) appartenant à $\mathbb{Z}^2$ de l'équation : $4x - 3y = 2$ ()

Résoudre dans $\mathbb{Z}^2$ l'équation (*)

5°/ On considère les points M d'affixe $z = 1 + iy$ où $y \in \mathbb{R}$ et $M' = f(M)$. Déterminer les entiers relatifs y tel que $\text{Re}(z')$ et $\text{Im}(z')$ soient entiers.

Exercice 26 :

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

$$\text{Soit } f : \begin{cases} P \rightarrow P \\ M(x, y) \mapsto M'(x', y') / \begin{cases} x' = x + y - 1 \\ x - y + 1 \end{cases} \end{cases}$$

1°/

a) Montrer que si $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$

alors : $z' = (1 + i) \bar{z} - 1 + i$

b) Montrer que f est une similitude indirecte que l'on précisera.

2°/ Soit Γ : l'ensemble des points $M(x, y)$

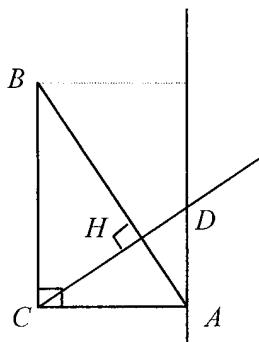
tels que : $2x^2 - y^2 + 2y - 2 = 0$

a) Montrer que Γ est une hyperbole dont on précisera les axes, les sommets les asymptotes ; les foyers et les directrices.

b) Ecrire une équation cartésienne de $\Gamma' = f(\Gamma)$.

SOLUTIONS

Solution 1 :



1° a) On a : $S(C) = A$ et $S(B) = C$

Soit k le rapport de S on a : $k = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}$

Soit θ une mesure de l'angle de S

$$\text{on a : } \theta \equiv \overset{\wedge}{(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{AC})} \quad (2\pi)$$

$$\equiv \overset{\wedge}{(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA})} + \pi \quad (2\pi)$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

b) on a : $(HC) \cap (HB) = \{H\} \Rightarrow S(H)$ est le point d'intersection des droites $S(HC)$ et $S(HB)$.

$S(HC) = \Delta_1 \Rightarrow \Delta_1$ est la droite passant par $S(C) = A$ et perpendiculaire à (HC) d'où $\Delta_1 = (AB)$.

$S(HB) = \Delta_2 \Rightarrow \Delta_2$ est la droite passant par $S(B) = C$ et perpendiculaire à (HB) d'où $\Delta_2 = (CD)$.

or $S(H)$ est le point d'intersection des droites (AB) et (CD) or $(AB) \cap (CD) = \{H\}$ et par suite $S(H) = H$.

Conclusion : H est le centre de S .

$$c) \{A\} = (AC) \cap (AB) \Rightarrow \{S(A)\} = S(AC) \cap S(AB)$$

* $S(AC)$ est la droite passant par $S(C) = A$ et perpendiculaire à (AC) donc $S(AC) = (AD)$.

* $S(AB)$ est la droite passant par $S(B) = C$ et perpendiculaire à (AB) . donc $S(AB) = (CD)$

$$\{S(A)\} = (AD) \cap (CD) = \{D\} \text{ d'où } S(A) = D.$$

$$2^\circ / S : H \rightarrow H$$

$$C \rightarrow A$$

$$B \rightarrow C$$

$$\text{on a : } k = \frac{HA}{HC} \text{ et } k = \frac{HC}{HB}$$

$$\text{d'où } HC^2 = HA \cdot HB$$

$$3^\circ / I = B * C \text{ donc } S(I) = S(B) * S(C) \text{ car } S \text{ conserve les milieux } \Omega$$

$$S(B) = C \text{ et } S(C) = A \text{ d'où } S(I) = C * A = J$$

$$J = A * C \text{ donc } S(J) = S(A) * S(C) = D * A = K$$

$$S : I \rightarrow J$$

$$J \rightarrow K$$

$$\text{On a : } \overset{\wedge}{\rightarrow} (IJ, JK) \equiv \frac{\pi}{2} \quad (2\pi) \text{ donc } IJK \text{ est un triangle rectangle en } J$$

* Montrons que $H \in (IK)$

$$\text{on a : } S : H \rightarrow H$$

$S: I \rightarrow J$ donc $(HI) \perp (HJ)$ et $(HJ) \perp (HK)$

$S: J \rightarrow K$ donc $(HI) \parallel (HK)$ d'où

H, I et K sont alignés et par suite $H \in (IK)$

* Montrons que $(JH) \perp (IK)$

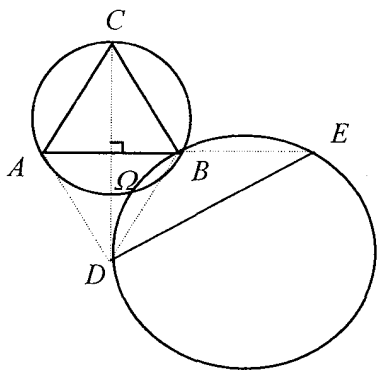
on a $S: H \rightarrow H$

$I \rightarrow J$ donc $(JH) \perp (HI)$

or $(HI) = (IK)$ car I, H, K sont alignés d'où $(JH) \perp (IK)$

Conclusion : H est le pied de la hauteur issue de J dans le triangle IJK .

Solution 2 :



1°/ * On a : $BD = BA$ car ADB est un triangle équilatéral

$AE = 2 AB$ car $B = A * E$ d'où $\frac{BD}{AE} = \frac{1}{2}$

$$* \quad (\vec{AE} \wedge \vec{BD}) \equiv (\vec{AB} \wedge \vec{BD}) \quad (2\pi) \quad \text{car} \quad \vec{AE} = 2 \vec{AB}$$

$$\equiv (\vec{BA} \wedge \vec{BD}) + \pi \quad (2\pi) \equiv \frac{4\pi}{3} \quad (2\pi) \equiv -\frac{2\pi}{3} \quad (2\pi)$$

on a : $\begin{cases} \frac{BD}{AE} = \frac{1}{2} \\ \widehat{(\vec{AE}, \vec{BD})} \equiv -\frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (2\pi)$ donc il existe une unique similitude directe

S_1 de rapport $\frac{1}{2}$ d'angle $-\frac{2\pi}{3}$ qui transforme A en B et E en D .

S et S_1 sont égales car S et S_1 ont même angle, même rapport et transforment de la même façon le point A en B . d'où $S(E) = D$

2°/ $S: \Omega \rightarrow \Omega$

$$A \rightarrow B$$

$$E \rightarrow D$$

$$\text{on a : } \widehat{(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B})} \equiv -\frac{2\pi}{3} \quad (2\pi) \Rightarrow \widehat{(\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B})} \equiv \frac{\pi}{3} \quad (\pi)$$

$\Rightarrow \Omega$ appartient au cercle passant par A et B et tangente en A à la

demi-droite (AE) tel que $\widehat{(\vec{AE}, \vec{AB})} \equiv \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$ or $\widehat{(\vec{CA}, \vec{CB})} \equiv \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$

donc $C \in$

donc Ω, A, B, C appartiennent à et par suite Ω appartient au cercle circonscrit au triangle ABC .

* on a : $\widehat{(\vec{\Omega E}, \vec{\Omega D})} \equiv -\frac{2\pi}{3} \quad (2\pi) \Rightarrow \Omega$ appartient au cercle passant par E et

D et tangent en E à la demi-droite $[Et')$ tel que $\widehat{(\vec{Et'}, \vec{ED})} \equiv -\frac{2\pi}{3} \quad (2\pi)$

$$\text{or } \widehat{(\vec{BE}, \vec{BD})} \equiv \widehat{(\vec{AB}, \vec{BD})} \quad (2\pi)$$

$$\equiv -\frac{2\pi}{3} \quad (2\pi) \quad \text{donc } B \in$$

d'où Ω, E, B, D appartient à ' et par suite Ω appartient au cercle circonscrit au triangle BDE d'où la construction du point ($\Omega \neq B$)

3°/ $S : C \rightarrow C'$

$$A \rightarrow B \quad \text{d'où} \quad \widehat{(\vec{CA}, \vec{C'B})} \equiv -\frac{2\pi}{3} \quad (2\pi)$$

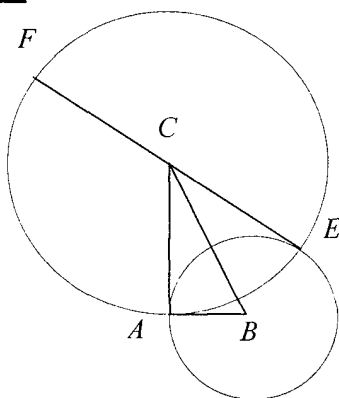
$$\Rightarrow \widehat{(\vec{CA}, \vec{CB})} + \widehat{(\vec{CB}, \vec{C'B})} \equiv -\frac{2\pi}{3} \quad (2\pi)$$

or $\widehat{(\vec{CA}, \vec{CB})} \equiv \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$ d'où $\widehat{(\vec{CB}, \vec{C'B})} \equiv -\pi \quad (2\pi)$ et par conséquent B, C, C' sont alignés.

b) $S(A) = B$ et $S(C) = C'$ d'où $S(AC) = (BC')$

or $(BC') = (BC)$ car B, C, C' sont alignés d'où $S(AC) = (BC)$

Solution 3 :



1°/ On a : $S(\mathcal{C}(B)) = \mathcal{C}(C)$

le rapport de S est k tel que : $k = \frac{CA}{AB} = 2$

Soit I le centre de S .

$$\text{on a : } S(B) = C \Rightarrow IC = 2IB \Rightarrow \frac{IC}{IB} = 2$$

on a : $\frac{IC}{IB} = 2 \Leftrightarrow I$ est un point du cercle de diamètre $[JK]$ où J est le

barycentre de $(C,1)$ et $(B,-2)$ et K est le barycentre de $(C,1)$ et $(B,2)$

Conclusion : l'ensemble Γ est le cercle de diamètre $[JK]$.

2°/ On a : $S_A(B) = C \Rightarrow AC = 2AB \Rightarrow A \in \Gamma$

$S_A(A) = A$ et $s_A(B) = C$

l'angle de S_A est $(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$

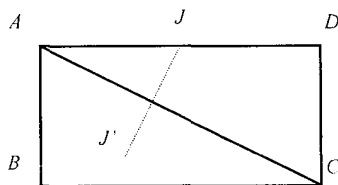
Soit $E' = S_A(E)$; $E \in \mathcal{O}(B)$ il en résulte que son image E' est un point de $\mathcal{O}(C)$.

or $(\vec{AE}, \vec{AE'}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \Rightarrow E'$ appartient à la droite passant par A et $\perp$

à (AE) d'où $E' \in \mathcal{O}(C) \cap \Delta = \{A, F\}$ or $E' \neq A$ d'où $E' = F$.

Conclusion : $S_A(E) = F$

Solution 4 :



1°/ Soit S la similitude directe qui transforme A en C et B en J ;

$S(A) = C$ et $S(B) = J$; le rapport de S est $\frac{CJ}{AB} = \frac{\sqrt{2}a}{a} = \sqrt{2}$; l'angle de

S est $(\vec{AB}, \vec{CJ}) \equiv -\frac{3\pi}{4} (2\pi)$

Conclusion : S est la similitude directe de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$

2°/ Soit $J' = S_{(AC)}(J)$

on a : $J'C = JC$ et $J'A = AJ$ (une symétrie orthogonale conserve les distances) $\Rightarrow \frac{J'C}{J'A} = \frac{JC}{JA} = \sqrt{2}$ d'autre part $(\vec{J'A}, \vec{J'C}) \equiv (\vec{JC}, \vec{JA}) (2\pi)$
(une symétrie orthogonale transforme les mesures des angles en leurs opposées)

$$\text{or } (\vec{JC}, \vec{JA}) \equiv (\vec{JC}, \vec{JD}) + (\vec{JD}, \vec{JA}) (2\pi)$$

$$\equiv \frac{\pi}{4} + \pi (2\pi) \equiv -\frac{3\pi}{4} (2\pi).$$

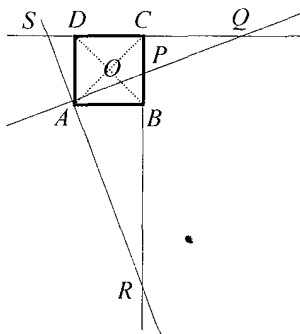
Soit S' la similitude directe de centre J' , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{3\pi}{4}$.

$$\text{on a : } \frac{J'C}{J'A} = \sqrt{2} \text{ et } (\vec{J'A}, \vec{J'C}) \equiv -\frac{3\pi}{4} (2\pi) \Rightarrow S'(A) = C$$

donc S' est une similitude directe qui a le même rapport et le même angle que S , de plus S' et S coïncident au point A donc $S' = S$.

Conclusion : le centre de S est le point $K = S_{AC}(J)$

Solution 5 :



$$* r(B) = D$$

Soit Δ_1 l'image de la droite (BC) par r on a : $(\vec{BC}, \vec{\Delta_1}) \equiv \frac{\pi}{2} (\pi)$.

($\vec{\Delta}_1$: vecteur directeur de Δ_1)

d'où Δ_1 est une droite passant par $r(B) = D$ et perpendiculaire à (BC)

d'où $r(BC) = (DC)$

* Δ_2 l'image de (AR) par r et ($\vec{\Delta}_2$: vecteur directeur de Δ_2)

on a : $(\vec{AR}, \vec{\Delta}_2) \equiv \frac{\pi}{2} (\pi) \Rightarrow \Delta_2 \perp (AR)$

or $r(A) = A$ d'où $\Delta_2 = (AQ)$

on a : $R \in (BC) \cap (AR)$ d'où $r(R) \in (DC) \cap (AQ) \Rightarrow r(R) = Q$.

* $P \in (BC) \cap (AP)$

$r((BC)) = (CD)$; $r((AP))$ est une droite passant par $r(A) = A$ et

perpendiculaire à (AP) d'où $r((AP)) = (AS)$ d'où

$r(P) \in (CD) \cap (AS) \Rightarrow r(P) = S$.

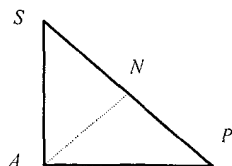
b) on a : $r(R) = Q \Leftrightarrow \begin{cases} AR = AQ \\ \text{et} \\ (\vec{AR}, \vec{AQ}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow ARQ \text{ est un triangle}$

isocèle rectangle en A , de sens direct.

$r(P) = S \Leftrightarrow \begin{cases} AP = AS \\ \text{et} \\ (\vec{AP}, \vec{AS}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow APS \text{ est un triangle isocèle}$

rectangle en A , de sens direct.

2°/ a) On a : $AN = NS = NP = \frac{\sqrt{2}}{2} AP$



$$\text{on a : } \begin{cases} AN = \frac{1}{\sqrt{2}} AP \\ (\vec{AP}, \vec{AN}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases} \quad \text{d'où } s(P) = N$$

$$\text{on a : } \begin{cases} AM = \frac{1}{\sqrt{2}} AR \\ (\vec{AR}, \vec{AM}) \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi) \end{cases} \quad \text{d'où } s(R) = M$$

$$b) P \text{ décrit } [BC] \setminus \{B\} \Leftrightarrow s(P) \text{ décrit } [s(B)s(C)] \setminus \{s(B)\}$$

$$\text{or } s(B) = O \text{ car } \begin{cases} (\vec{AB}, \vec{AO}) \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi) \\ AO = \frac{1}{\sqrt{2}} AB \end{cases} \text{ et}$$

$$s(C) = D \text{ car } \begin{cases} (\vec{AC}, \vec{AD}) \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi) \\ AD = \frac{1}{\sqrt{2}} AC \end{cases} \text{ et}$$

$$\text{d'où } s(P) \text{ décrit } [OD] \setminus \{O\}$$

Conclusion : N décrit $[OD] \setminus \{O\}$

$$c) \text{ on a : } N \in [OD] \setminus \{O\} \Rightarrow O, N, D \text{ sont alignés, or } B \in (OD)$$

$$\Rightarrow B, N, D \text{ sont alignés.}$$

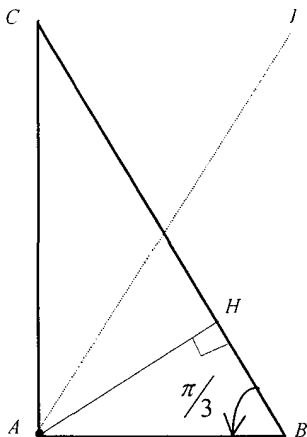
on a : B, C, R alignés et s étant une application qui conserve l'alignement donc $s(B), s(C)$ et $s(R)$ sont alignés.

or $s(B) = O$; $s(C) = D$ et $s(R) = M$ d'où O, D, M sont alignés $\Rightarrow M, B, D$ sont alignés.

Conclusion : B, N, D, M sont alignés.

Solution 6 :

1°/ a)



$$S_1 : A \longrightarrow A$$

$$H \longrightarrow B$$

le rapport de S_1 est $k_1 = \frac{AB}{AH}$ or $\sin \hat{B} = \frac{AH}{AB}$

$$\text{d'où } k_1 = \frac{1}{\sin \hat{B}} = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

soit θ_1 une mesure de l'angle de S_1

$$\text{on a : } \theta_1 \equiv (\vec{AH}, \vec{AB}) (2\pi) \equiv -\frac{\pi}{6} (2\pi)$$

Conclusion : S_1 est une similitude directe de centre A de rapport $\frac{2\sqrt{3}}{3}$

et d'angle dont une mesure est $-\frac{\pi}{6}$

$$\text{b) on a : } (\vec{AC}, \vec{AI}) \equiv -\frac{\pi}{6} (2\pi)$$

ACI est un triangle rectangle en C donc $\frac{AC}{AI} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ d'où

$$\frac{AI}{AC} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{on a : } \begin{cases} (\vec{AC}, \vec{AI}) \equiv -\frac{\pi}{6} (2\pi) \\ \frac{AI}{AC} = \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{cases} \quad \text{d'où } S_1(C) = I$$

$$S_1((BC)) = S_1((HC)) = (BI) \quad \text{car : } S_1(H) = B ; S_1(C) = I$$

2°/ a)

$$S_2 : A \longrightarrow A$$

$$B \longrightarrow C$$

le rapport de S_2 est $k_2 = \frac{AC}{AB} = \text{tg}\left(\frac{\pi}{3}\right) = \sqrt{3}$ l'angle de S_2 est

$$\theta_2 \equiv (\vec{AB}, \vec{AC}) (2\pi) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$$

S_2 est une similitude directe de centre A de rapport $\sqrt{3}$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

$$S_2((BI)) = \Delta \quad \text{où} \quad (\vec{BI}, \vec{\Delta}) \equiv \frac{\pi}{2} (\pi) \quad \text{or} \quad S_2(B) = C$$

d'où Δ est une droite passant par C et perpendiculaire à (BI)

d'où $\Delta = (CI)$

Conclusion : l'image de la droite (BI) par S_2 est la droite (CI) .

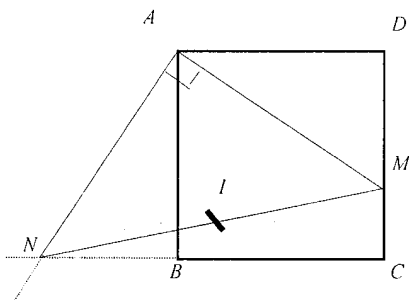
b) $M \in (BI)$; $M' = S_2(M)$ donc $M' \in S_2((BI))$ d'où $M' \in (CI)$

$$\text{on a : } (\vec{AM}, \vec{AM'}) \equiv \frac{\pi}{2} (\pi)$$

$$(\vec{IM}, \vec{IM'}) \equiv (\vec{BI}, \vec{IC}) (\pi) \equiv -\frac{\pi}{2} (\pi)$$

$$\text{d'où } (\vec{AM}, \vec{AM'}) \equiv (\vec{IM}, \vec{IM'}) (\pi).$$

Solution 7 :



1°/ La rotation r de centre A , d'angle $-\frac{\pi}{2}$; transforme D en B , donc

cette rotation transforme la droite (DC) en la droite (BC) .

$$r((AM)) = (AN)$$

$$M \in (AM) \cap (DC) \Rightarrow r(M) \in (AN) \cap (BC) = \{N\}$$

$$\text{donc } r(M) = N \text{ d'où } \begin{cases} AM = AN \\ (\vec{AM}, \vec{AN}) \equiv -\frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases}$$

ce qui donne que le triangle AMN est isocèle rectangle en A .

2°/ on a: AMN est un triangle isocèle rectangle en M

$$\text{et } I = M * N \text{ donc } AM = \sqrt{2} AI \text{ et } (\vec{AM}, \vec{AI}) \equiv -\frac{\pi}{4} (2\pi)$$

$$\text{d'où } \begin{cases} \frac{AM}{AI} = \sqrt{2} \\ (\vec{AM}, \vec{AI}) \equiv -\frac{\pi}{4} (2\pi) \end{cases} \quad \text{d'où } I \text{ est l'image de } M \text{ par la similitude}$$

directe s de centre A , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{4}$.

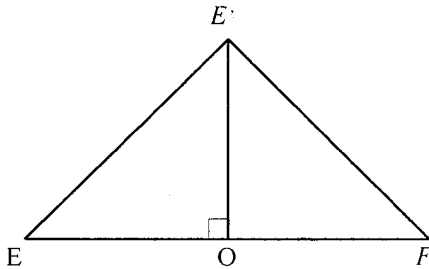
3°/ M appartient à la droite (DC) donc I est un point de l'image de (DC) par s .

* l'image de D par s est O : centre du carré $ABCD$

* l'image de C par s est B donc l'image de la droite (DC) est la droite (OB) et par suite lorsque M décrit (DC) , I décrit (OB) .

Solution 8 :

1°/



$$\text{* Soit } E' = S_E(O) \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{EE'}{EO} = \sqrt{2} \\ (\vec{EO}, \vec{EE'}) \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi) \end{cases}$$

donc E' est tel que le triangle EOE' est isocèle rectangle en O et de sens direct.

* Le triangle $FE'O$ est isocèle rectangle en O et de sens direct.

$$\text{donc } \begin{cases} \frac{FE'}{FO} = \sqrt{2} \\ (\vec{FE'}, \vec{FO}) \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \frac{FO}{FE'} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ (\vec{FE'}, \vec{FO}) \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi) \end{cases}$$

ce qui entraîne que $S_F(E') = O$

Conclusion : $S_F \circ S_E(O) = O$

b) $S_F \circ S_E$ est la composée de deux similitudes directes, de rapport

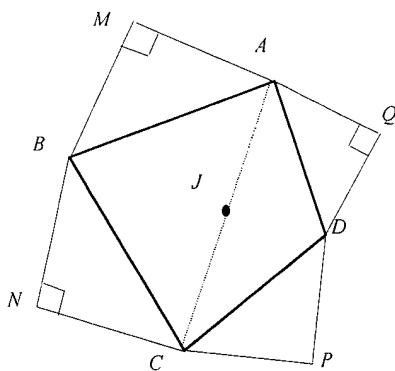
$$\frac{1}{\sqrt{2}} \times \sqrt{2} = 1 \text{ donc } S_F \circ S_E \text{ est un déplacement d'angle :}$$

$$\theta \equiv \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} (2\pi)$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$$

donc $S_F \circ S_E$ est une rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2°/



a) * S_A est la similitude directe de centre A telle que $S_A(M) = B$ donc

le rapport de S_A est $\frac{AB}{AM} = \sqrt{2}$ et l'angle de S_A a pour mesure

$(\vec{AM}, \vec{AB}) \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi)$ (car le triangle AMB est isocèle rectangle en M et de sens direct).

* De la même manière on trouve que S_C est la similitude de centre C , de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{4}$.

D'après la 1°/ $g = S_C \circ S_A$ est la rotation de centre $J = A * C$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

b) * S'_C est la similitude directe de centre C , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

* S'_A est la similitude directe de centre A , de rapport $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et d'angle

$\frac{\pi}{4}$ donc $S'_A \circ S'_C$ est la rotation de centre $J = A * C$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$

(d'après 1°/) d'où $S'_A \circ S'_C = g$

c) $g(M) = S_C \circ S_A(M) = S_C(B) = N$

$g(P) = S'_A \circ S'_C(P) = S'_A(D) = Q$

donc $g(M) = N$ et $g(P) = Q$ ce qui donne $MP = NQ$ et

$(\vec{MP}, \vec{NQ}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ et par suite les segments $[MP]$ et $[NQ]$ sont

isométriques et orthogonaux.

d) on a : $K = M * P \Rightarrow g(K) = g(M) * g(P)$

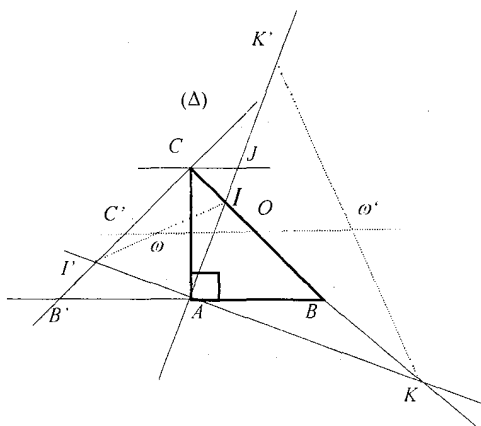
(une rotation conserve les milieux) $\Rightarrow g(K) = N * Q = L$ d'où $g(K) = L$

donc $\begin{cases} JL = JK \\ (\vec{JK}, \vec{JL}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases}$ ce qui prouve que le triangle JKL est isocèle

rectangle en J .

Solution 9 :

1°/



2°/ a) on a : $AB = AC$ et $(\vec{AB}, \vec{AC}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ d'où $r(B) = C$

on a : $r(A) = A$ et $r(B) = C$ donc $r((AB)) = (AC)$

- $r(BC)$ est la droite passant par $r(B) = C$ et $\perp (BC) \Rightarrow r(BC) = \Delta$
- La droite (AK) est perpendiculaire à (AI) et $r(A) = A$ d'où $r((AK)) = (AI)$

b) * Soit $K' = r(K)$

On a : $K \in (AK)$ donc $K' \in (AI)$ (car $r((AK)) = (AI)$)

de plus $AK = AK'$ donc K' est un point du cercle $\mathcal{C}$ de centre A et de

rayon AK . et comme $(\vec{AK}, \vec{AK'}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$

donc AKK' est un triangle isocèle rectangle en A et de sens direct d'où la construction de K'

$$* \text{ Soit } I' = r(I) \Leftrightarrow \begin{cases} AI = AI' \\ (\vec{AI}, \vec{AI'}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \text{le triangle } AII' \text{ est}$$

isocèle rectangle en A et de sens direct d'où la construction de I' .

$$3^\circ / \omega = I * I' ; \quad \omega' = K * K'$$

a) * Le triangle AKK' est isocèle rectangle en A et de sens direct

$$\text{et } \omega' = K * K' \text{ donc } (\vec{AK}, \vec{AK'}) \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi) \text{ et } A\omega' = \frac{\sqrt{2}}{2} AK \text{ d'où}$$

$$S(K) = \omega'.$$

* Le triangle AIL' est isocèle rectangle en A et de sens direct

$$\text{et } \omega = I * I' \text{ donc } (\vec{AI}, \vec{AI'}) \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi) \text{ et } A\omega = \frac{\sqrt{2}}{2} AI \text{ d'où } S(I) = \omega.$$

$$\text{b) On a : } S(I) = \omega.$$

donc lorsque I décrit $[BC]$ privé du point O alors ω décrit le segment $[S(B)S(C)]$ privé du point $S(O)$

$$\text{or } S(B) = O \text{ car } (\vec{AB}, \vec{AO}) \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi) \text{ et } \frac{AO}{AB} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Cherchons $S(C)$

on a le triangle ACB' est isocèle rectangle en A de sens direct

$$\text{Soit } C' = B' * C. \quad \text{On a : } \frac{AC'}{AC} = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ et } (\vec{AC}, \vec{AC'}) \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi) \text{ donc}$$

$$S(C) = C'$$

$$\text{et on a : } O = B * C \text{ donc } S(O) = S(B) * S(C) = O * C'$$

Conclusion : ω décrit le segment $[OC']$ privé du point $O * C'$.

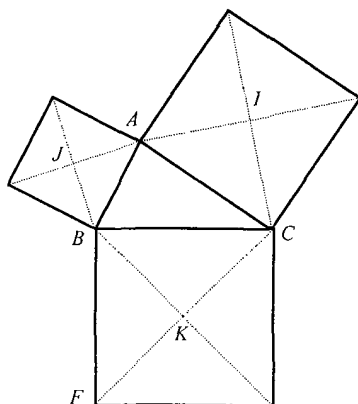
c) K, B et I sont alignés et S conserve l'alignement donc $S(K), S(B)$ et $S(I)$ sont alignés

$$\text{or } S(K) = \omega'; S(B) = O \text{ et } S(I) = \omega \text{ donc } \omega, O \text{ et } \omega' \text{ sont alignés.}$$

$$4^\circ / r \circ S = S(A, \frac{\sqrt{2}}{2}; \frac{3\pi}{4})$$

$$z' = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i \frac{3\pi}{4}} (z - z_A) + z_A \text{ or } z_A = 0 \text{ et } e^{i \frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\text{et par suite } z' = (-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i)z.$$

Solution 10 :

1°/ a) * le triangle IAC est isocèle rectangle en I

donc $\frac{CA}{CI} = \sqrt{2}$ et $(\vec{CI}, \vec{CA}) \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi)$ d'où S_1 est la similitude directe de

centre C , de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$

* le triangle JBA est isocèle rectangle en J donc $\frac{BJ}{BA} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ et

$(\vec{BA}, \vec{BJ}) \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi)$ d'où S_2 est la similitude directe de centre B , de

rapport $\frac{\sqrt{2}}{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$

b) $S_2 \circ S_1$ est une similitude directe d'angle $\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$ et de rapport

$\sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = 1$ donc $S_2 \circ S_1$ est un déplacement d'angle $\frac{\pi}{2}$ d'où $S_2 \circ S_1$

est une rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$.

2°/ * $S_2 \circ S_1(I) = S_2(A) = J$

* $S_2 \circ S_1(B) = S_2(F) = K$

3°/ a) On a : $S_2 \circ S_1(I) = J$ et $S_2 \circ S_1(B) = K$ donc $IB = JK$ (car une rotation conserve les distances) et $(\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{JK}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ d'où $(IB) \perp (JK)$.

4°/ a) on a : $S_1(I) = A$ et $S_1(C) = C \Rightarrow z_C - z_A = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} (z_C - z_I)$ or

$$z_C = c \text{ et } z_A = 0 \Rightarrow c = \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}} (c - z_I) \Rightarrow z_I = \frac{c(-1 + \sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}})}{\sqrt{2} e^{i\frac{\pi}{4}}}$$

$$\text{d'où } z_I = \frac{c}{2}(1+i)$$

$$\text{on a : } S_2(A) = J \text{ et } S_2(B) = B \Rightarrow z_J - z_B = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}} (z_A - z_B)$$

$$\text{or } z_B = b \text{ et } z_A = 0 \Rightarrow z_J = b(1 - \frac{\sqrt{2}}{2} e^{i\frac{\pi}{4}}) \text{ d'où } z_J = \frac{b}{2}(1-i)$$

$$\text{on a : } S_2 \circ S_1(I) = J \text{ et } S_2 \circ S_1(B) = K \Rightarrow z_K - z_J = e^{i\frac{\pi}{2}} (z_B - z_I)$$

$$\Rightarrow z_K = \frac{b}{2}(1-i) + i(b - \frac{c}{2}(1+i)) \text{ d'où } z_K = \frac{1+i}{2}(b-ic)$$

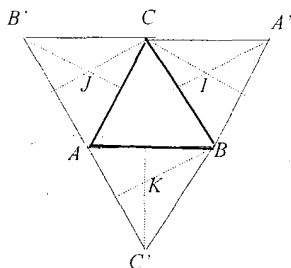
$$\text{b) on a : } z_I \neq b \text{ donc } \frac{z_K - z_J}{b - z_I} = \frac{ib - \frac{ic}{2}(1+i)}{b - \frac{c}{2}(1+i)} = \frac{i(b - \frac{c}{2}(1+i))}{b - \frac{c}{2}(1+i)} = i = \left[1, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\text{donc } \begin{cases} \left| \frac{z_K - z_J}{b - z_I} \right| = 1 \\ \arg\left(\frac{z_K - z_J}{b - z_I}\right) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |z_K - z_J| = |b - z_I| \\ \arg\left(\frac{z_K - z_J}{b - z_I}\right) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow IB = JK \text{ et } (\overrightarrow{IB}, \overrightarrow{JK}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \text{ d'où } IB = JK \text{ et } (IB) \perp (JK)$$

Solution 11 :

1°/.



$$f = S(C, \frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\pi}{6}) \quad ; \quad g = S(A, \sqrt{3}, \frac{\pi}{6})$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \sqrt{3} = 1 \text{ d'où } f \circ g \text{ est la composée de deux similitudes directes}$$

dont le produit des rapports est 1 .

d'où $f \circ g$ est une similitude directe de rapport 1 .

$$\text{or } \frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi) \text{ d'où } f \circ g = S(\Omega, 1, \frac{\pi}{6}) = R(\Omega, \frac{\pi}{3})$$

$$\text{b) } g(J) = B' \text{ car } (\vec{AJ}, \vec{AB'}) \equiv \frac{\pi}{6} (2\pi) \text{ et } \frac{AB'}{AJ} = \sqrt{3}$$

$$f \circ g(J) = f(g(J)) = f(B') = J \text{ car } (\vec{CB'}, \vec{CJ}) \equiv \frac{\pi}{6} (2\pi) \text{ et } \frac{CJ}{CB'} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\text{d'où } f \circ g = R(J, \frac{\pi}{3})$$

$$2^\circ / f \circ g(K) = f(g(K))$$

$$g(K) = B \text{ car } \frac{AB}{AK} = \sqrt{3} \text{ et } (\vec{AK}, \vec{AB}) \equiv \frac{\pi}{6} (2\pi)$$

$$f(B) = I \text{ car } (\vec{CB}, \vec{CI}) \equiv \frac{\pi}{6} (2\pi) \text{ et } \frac{CI}{CB} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\text{d'où } f \circ g(K) = I$$

$$3^\circ / f \circ g(K) = I \Leftrightarrow R\left(J, \frac{\pi}{3}\right)(K) = I \Leftrightarrow \begin{cases} JK = JI \\ (\vec{JK}, \vec{JI}) \equiv \frac{\pi}{3} (2\pi) \end{cases}$$

d'où IJK est un triangle équilatéral.

$$4^\circ / R\left(B, \frac{\pi}{3}\right)(A) = C' \Leftrightarrow z_{C'} = e^{i\frac{\pi}{3}}(a-b) + b$$

$$R\left(C, \frac{\pi}{3}\right)(B) = A' \Leftrightarrow z_{A'} = e^{i\frac{\pi}{3}}(b-c) + c$$

$$R\left(A, \frac{\pi}{3}\right)(C) = B' \Leftrightarrow z_{B'} = e^{i\frac{\pi}{3}}(c-a) + a$$

or I centre de gravité du triangle $A'BC$ d'où $z_I = \frac{z_{A'} + z_B + z_C}{3}$

$$z_I = \frac{e^{i\frac{\pi}{3}}(b-c) + c + b + c}{3} = \frac{(2c+b) + e^{i\frac{\pi}{3}}(b-c)}{3}$$

J centre de gravité du triangle ACB' d'où $z_J = \frac{z_A + z_C + z_{B'}}{3}$

$$z_J = \frac{a + c + e^{i\frac{\pi}{3}}(c-a) + a}{3} = \frac{2a + c + e^{i\frac{\pi}{3}}(c-a)}{3}$$

K centre de gravité du triangle ABC'

$$z_K = \frac{z_A + z_B + z_{C'}}{3} = \frac{a + 2b + e^{i\frac{\pi}{3}}(a-b)}{3}$$

b) Soit Ω_1 le centre de gravité du triangle ABC

$$z_{\Omega_1} = \frac{z_A + z_B + z_C}{3} = \frac{a + b + c}{3}$$

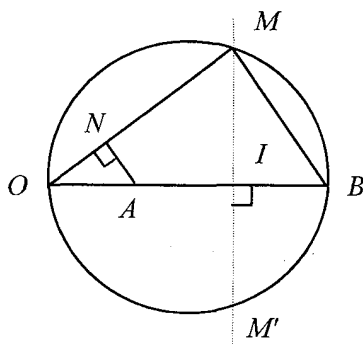
Ω_2 le centre de gravité du triangle IJK

$$z_{\Omega_2} = \frac{z_I + z_J + z_K}{3}$$

$$= \frac{3c + 3b + 3a + e^{\frac{i\pi}{3}}(b - c + c - a + a - b)}{3} = \frac{a + b + c}{3}$$

$$\Rightarrow \Omega_1 = \Omega_2$$

Solution 12:



1°/ a) On a $I = A * B$ et $I = M * M'$

donc $AMB M'$ est un parallélogramme, d'autre part M appartient à la médiatrice de $[AB]$ donc $MA = MB$ et par suite $AMB M'$ est un losange.

b) * D'une part on a $(AM') \parallel (MB)$ car $AMB M'$ est un parallélogramme.

* D'autre part M appartient au cercle de diamètre $[OB]$

donc $(MB) \perp (MO)$ et par suite $(AM') \perp (MO)$

On a : $(AN) \perp (MO)$ et $(MO) \perp (AM')$ donc $(AN) \parallel (AM')$ et par suite N, A et M' sont alignés.

2°/ a) On a $S : N \rightarrow N$

$M \rightarrow A$ Soit θ une mesure de l'angle de S

$$\theta \equiv (\vec{NM}, \vec{NA}) \quad (2\pi) \equiv -\frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

b) $S(MI)$ est la droite passant par $S(M) = A$ et perpendiculaire à la droite (MI) d'où $S(MI) = (AB)$.

* $S(NA)$ est la droite passant par $S(N) = N$ et perpendiculaire à (AN) donc $S(NA) = (ON)$

* On a : $(MI) \cap (NA) = \{M'\}$ donc $\{S(M')\} = S(MI) \cap S(NA)$
 $= (AB) \cap (ON) = \{O\}$

d'où $S(M') = O$.

3°/ a) On a $I = M * M'$ donc $S(I) = S(M) * S(M')$ or $S(M) = A$ et $S(M') = O$ d'où $I' = S(I) = A * O$

b) Il suffit de montrer que N appartient au cercle de diamètre $[OA]$ et que $(NI') \perp (NI)$

* On a : $(NA) \perp (NO)$ donc N appartient au cercle de diamètre $[OA]$

* On a : $S(N) = N$ or $S(I) = I'$ donc $(NI') \perp (NI)$

4°/ $\sigma : M' \rightarrow N$

$$B \rightarrow A$$

$$a) \sigma \circ S_{(OB)}(M) = \sigma(M') = N$$

$$\sigma \circ S_{(OB)}(B) = \sigma(B) = A$$

b) * $\sigma \circ S_{(OB)}$ est la composée de 2 similitudes indirectes donc $\sigma \circ S_{(OB)}$ est une similitude directe. Soit θ une mesure de son angle

$$\theta \equiv (\overrightarrow{MB}, \overrightarrow{NA}) \quad (2\pi)$$

$$\equiv 0 \quad (2\pi) \quad \text{car } \overrightarrow{MB} \text{ et } \overrightarrow{NA} \text{ sont 2 vecteurs colinéaires et de même}$$

sens donc $\sigma \circ S_{(OB)}$ est une homothétie h de rapport $K = \frac{NA}{BM}$

Or dans le triangle OBM , $(NA) \parallel (MB)$ donc d'après le théorème de

thales ; on a : $\frac{OA}{OB} = \frac{ON}{OM} = \frac{NA}{BM}$ Or $\frac{OA}{OB} = \frac{1}{4}$ d'où $K = \frac{1}{4}$

* Soit Ω le centre de h .

on a : $h(M) = N$ donc $\Omega \in (MN)$

$h(B) = A$ donc $\Omega \in (AB)$

or $(AB) \cap (NM) = \{O\}$ d'où $\Omega = O$

Conclusion : $\sigma \circ S_{(OB)} = h(O, \frac{1}{4})$

$$c) \sigma \circ S_{(OB)} = h(O, \frac{1}{4})$$

d'où $\sigma = S_{(OB)} \circ h(O, \frac{1}{4}) = h(O, \frac{1}{4}) \circ S_{(OB)}$ c'est la forme réduite de σ .

Solution 13:

1°/ Soit $M(z) \xrightarrow{S_1} M'(z')$

$$z' = x' + iy' = 1 - 2y + i(2x) = 1 + 2i(x + yi) = 2iz + 1$$

On a : $z' = az + b$ où $a = 2i \neq 0$ et $b = 1$

et par suite S_1 est une similitude directe de rapport $k = |a| = 2$; d'angle

$$\theta_1 \equiv \arg a \quad (2\pi) \quad \equiv \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

$$\text{et de centre } \Omega_1 \text{ d'affixe } z_1 = \frac{b}{1-a} = \frac{1}{1-2i} = \frac{1+2i}{5}$$

2°/ a) S_2 est une similitude directe :

* De rapport $k_2 = |3i| = 3$

* D'angle $\theta_2 \equiv \arg(3i) \quad (2\pi)$

$$\equiv \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

de centre Ω_2 d'affixe $z_2 = \frac{5-2i}{1-3i} = \frac{11+13i}{10}$

b) Soit $M \in P$ et $M' = h(M) = S_1 \circ S_2(M)$

$$M' = S_1(M_2) \text{ où } M_2 = S_2(M)$$

$$\text{on a : } z_{M_2} = 3iz + 5 - 2i \text{ et } z' = 2iz_{M_2} + 1$$

$$\text{d'où } z' = 2i(3iz + 5 - 2i) + 1 = -6z + 5 + 10i$$

h est une similitude directe de rapport $k = |-6| = 6$

$$\text{D'angle } \theta \equiv \arg(-6) \quad (2\pi)$$

$$\equiv \pi \quad (2\pi)$$

et de centre Ω_1 d'affixe $z_1 = \frac{b}{1-a} = \frac{1}{1-2i} = \frac{1+2i}{5}$

2°/ a) S_2 est une similitude directe :

* De rapport $k_2 = |3i| = 3$

* D'angle $\theta_2 \equiv \arg(3i) \quad (2\pi) \equiv \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$

de centre Ω_2 d'affixe $z_2 = \frac{5-2i}{1-3i} = \frac{11+13i}{10}$

b) Soit $M \in P$ et $M' = h(M) = S_1 \circ S_2(M)$

$$M' = S_1(M_2) \text{ où } M_2 = S_2(M)$$

$$\text{on a : } z_{M_2} = 3iz + 5 - 2i \text{ et } z' = 2iz_{M_2} + 1$$

$$\text{d'où } z' = 2i(3iz + 5 - 2i) + 1 = -6z + 5 + 10i$$

h est une similitude directe de rapport $k = |-6| = 6$

$$\text{D'angle } \theta \equiv \arg(-6) \quad (2\pi) \equiv \pi \quad (2\pi)$$

de centre Ω d'affixe $\frac{5+10i}{7}$

donc h est une homothétie de rapport -6 et de centre $\Omega(\frac{5}{7}, \frac{10}{7})$

Solution 14 :

1°/ a) Soit θ une mesure de l'angle de s .

$$\text{On a : } \theta \equiv (\vec{AD}, \vec{AC}) \quad (2\pi)$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

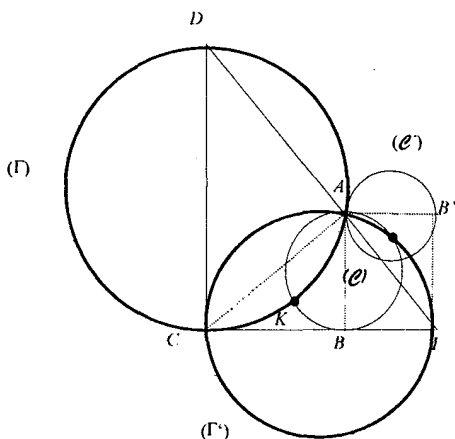
* l'image de la droite (CD) par la similitude s et la droite Δ passant par C (car $s(D) = C$) et orthogonale à (CD) .

Ce qui entraîne que $s((DC)) = (CI)$.

* Soit $s(C) = C'$ donc $(\vec{AC}, \vec{AC'}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$ d'où $C' \in (AI)$, d'autre part

$C \in (DC)$ donc $C' \in s((DC)) = (CI)$ et par suite $C' \in (CI) \cap (AI) = \{I\}$

Conclusion : $s(C) = I$



b) Soit $B' = s(B)$ et on a : $s(A) = A$, $s(C) = I$

donc $(AB) \perp (AB')$ et $(BC) \perp (IB')$ donc $B' \in$ à la droite Δ_1 passant par A et $\perp (AB)$ et $B' \in$ à la droite Δ_2 passant par I et $\perp (BC)$

1°/ * on a : $BM = CN$ donc il existe un unique déplacement R tel que

$$R(M) = N \text{ et } R(B) = C \text{ et comme } (\vec{BM}, \vec{CN}) \equiv (\vec{AB}, \vec{AC}) (2\pi) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$$

Alors R est une rotation d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{2}$

* Soit Ω le centre de R .

$$\text{on a : } R(B) = C \text{ donc } \Omega B = \Omega C \text{ et } (\vec{\Omega B}, \vec{\Omega C}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \text{ ce qui entraîne}$$

que le triangle ΩBC est isocèle rectangle en Ω et de sens direct, d'où la construction de Ω .

$$2^\circ/ \text{ a) } * f(B) = S_{(O\Omega)} \circ R(B) = S_{(O\Omega)}(C) = B$$

car la droite $(O\Omega)$ est la médiatrice de $[BC]$.

$$* f(\Omega) = S_{(O\Omega)} \circ R(\Omega) = S_{(O\Omega)}(\Omega) = \Omega$$

b) f est la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement donc c'est un antidéplacement, d'autre par f possède deux points invariants

Ω et B donc f est une symétrie orthogonale d'axe (ΩB) .

$$3^\circ/ \text{ a) Soit } M \in (AB); N = R(M) \Leftrightarrow \begin{cases} \Omega M = \Omega N \\ (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega N}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \end{cases} \text{ donc le}$$

triangle ΩMN est isocèle rectangle en Ω .

$$\text{Or } I = M * N \text{ alors } \Omega M = \sqrt{2} IM \text{ et } (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega I}) \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi) \text{ d'où}$$

$$\begin{cases} \frac{\Omega I}{\Omega M} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega I}) \equiv \frac{\pi}{4} (2\pi) \end{cases}$$

Soit s la similitude de centre Ω et d'angle $\frac{\pi}{4}$ il vient alors $s(M) = I$

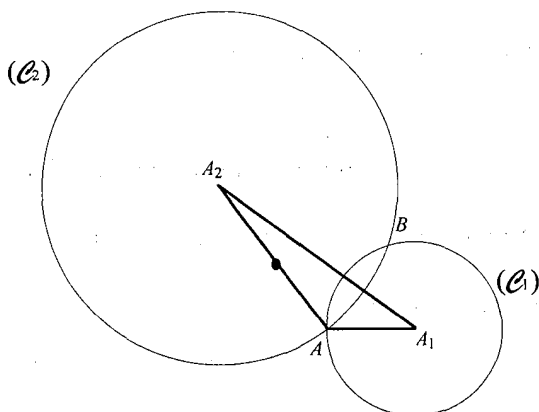
Lorsque M décrit la droite (AB) alors I décrit la droite D image de (AB) par s .

b) $D = s((AB))$ on a : $s(B) = O$ donc D est la droite passant par O

et tel que $(\vec{AB}, \vec{D}) \equiv \frac{\pi}{4}(\pi)$

Pour construire D , il suffit de choisir un point M de (AB) et un point N de (BC) tel que $BM = CN$ (voir figure) et $I = M * N$. la droite D est alors (OI) .

Solution 16 :



1°/ On a : $S_A(C_1) = C_2$ donc $S_A(A_1) = A_2$

d'autre part $S_A(M) = M'$ et $S_A(A) = A$

or on sait qu'une similitude directe conserve les mesures des angles

d'où : $(\vec{A_1A}, \vec{A_1M}) \equiv (\vec{A_2A}, \vec{A_2M'})(2\pi)$

b) $(\vec{BM}, \vec{BM'}) \equiv (\vec{BM}, \vec{BA}) + (\vec{BA}, \vec{BM'})(2\pi)$

Or les points B, M et A appartiennent au cercle (C_1) et B, M' et A appartiennent au cercle (C_2)

$$\text{donc } (\vec{BM}, \vec{BA}) \equiv \frac{1}{2} (\vec{A_1M}, \vec{A_1A}) (\pi) \text{ et } (\vec{BA}, \vec{BM'}) \equiv \frac{1}{2} (\vec{A_2A}, \vec{A_2M'}) (\pi)$$

$$\text{d'où } (\vec{BM}, \vec{BM'}) \equiv \frac{1}{2} [(\vec{A_1M}, \vec{A_1A}) + (\vec{A_2A}, \vec{A_2M'})] (\pi) \equiv 0 (\pi) \text{ (d'après 1-}$$

a)

2°/ on a : $\sigma_A(C_1) = C_2$ donc $\sigma_A(A_1) = A_2$ d'où le rapport de σ_A est

$$\frac{AA_2}{AA_1} = 2 \quad (\text{car } AA_2 = 2AA_1).$$

Soit D l'axe de σ_A donc cette similitude indirecte s'écrit :

$$\sigma_A = h_{(A, 2)} \circ S_D \Rightarrow S_D = h_{(A, \frac{1}{2})} \circ \sigma_A \Rightarrow S_D(A_1) = h_{(A, \frac{1}{2})} \circ \sigma_A(A_1)$$

$$\Rightarrow S_D(A_1) = h_{(A, \frac{1}{2})}(A_2) = K \quad \text{car } \vec{AK} = \frac{1}{2} \vec{A_1A_2}$$

d'où D est la médiatrice du segment $[A_1 K]$

$$\text{b) } f = \sigma_A \circ S_A^{-1}$$

* f est la composée d'une similitude indirecte et d'une similitude

directe donc c'est une similitude indirecte de rapport $2 \times \frac{1}{2} = 1$

donc f est un antidéplacement.

on a : $f(A) = A$; $f(A_2) = \sigma_A \circ S_A^{-1}(A_2) = \sigma_A(A_1) = A_2$ donc A et A_2 sont deux points invariants par f ce qui entraîne que f est la symétrie orthogonale d'axe (AA_2) .

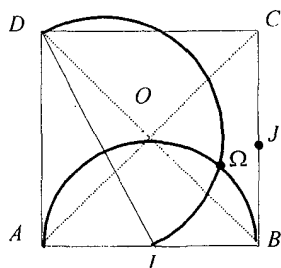
Conclusion : $f = S_{(AA_2)}$.

* Soit M un point du plan; $M' = S_A(M)$ et $M'' = \sigma_A(M)$

$$\Rightarrow S_A^{-1}(M') = M$$

donc $f(M') = \sigma_A \circ S_A^{-1}(M') = \sigma_A(M) = M''$ et par suite $S_{(AA_2)}(M') = M''$

ce qui prouve que M' et M'' sont symétriques par rapport à la droite (AA_2) .

Solution 17 :

1°/ a) on a : $AB = CD$ donc il existe un unique déplacement f qui envoie A sur C et B sur D .

or $(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) \equiv \pi \ (2\pi)$ donc f est une rotation d'angle π donc f est une symétrie centrale.

Soit Ω le centre de f , on a : $f(A) = C$ donc $\Omega = A * C = O$

Conclusion : f est une symétrie centrale de centre O .

b) $g(A) = C$ et $g(B) = D$

$$g \circ f(C) = g(A) = C$$

$$g \circ f(D) = g(B) = D$$

$g \circ f$ est un antidéplacement car c'est la composée d'un déplacement et d'un antidéplacement et comme C et D sont points invariants par $g \circ f$.

alors $g \circ f = S_{(DC)}$ où $S_{(DC)}$ est la symétrie orthogonale d'axe la droite (DC)

2°/ a) On a : $S(A) = B$ et $S(D) = I$ donc le rapport de S est le réel

$$k = \frac{IB}{AD} = \frac{1}{2} \text{ et l'angle de } S \text{ est } \theta \equiv (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BI}) \ (2\pi)$$

$$\text{or } (\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{BI}) \equiv (\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BI}) \ (2\pi)$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} \ (2\pi)$$

Conclusion : S est une similitude directe de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle dont une mesure est $\frac{\pi}{2}$.

Construction du centre Ω de S :

$$\text{on a : } S(A) = B \text{ et } S(D) = I \Rightarrow (\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$$

$$\text{et } (\vec{\Omega D}, \vec{\Omega I}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \text{ donc } \Omega \text{ est le point d'intersection du demi-}$$

cercle de diamètre $[AB]$ situé dans le demi-plan de bord (AB) qui contient O , et du demi-cercle de diamètre $[ID]$ situé dans le demi-plan de bord (ID) qui contient O d'où la construction de Ω .

b) on a : $S(A) = B$ donc l'image de la droite (AC) par S est la droite Δ passant par B et orthogonale à (AC) donc $\Delta = (BD)$.

De même on a : $S(D) = I$ donc l'image de la droite (CD) par S est la droite Δ' passant par I et orthogonale à (CD) donc $\Delta' = (OI)$

$$\text{on a : } C \in (AC) \cap (DC) \Rightarrow S(C) \in S(AC) \cap S(DC)$$

$$\Rightarrow S(C) \in (BD) \cap (OI) = \{O\} \text{ donc } S(C) = O \Rightarrow (\vec{\Omega C}, \vec{\Omega O}) \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi} \text{ ce}$$

qui prouve que le triangle $O\Omega C$ est rectangle en Ω .

c) on sait qu'une similitude directe conserve les rapports des distances et l'orthogonalité donc l'image du carré $ABCD$ est un carré. Comme $S(A) = B$; $S(D) = I$ et $S(C) = O$ alors l'image du carré $ABCD$ est le carré $OIBJ$.

d) on a : $S(A) = B$; $S(D) = I$ et $S(C) = O$ et l'image du carré $ABCD$ est

le carré $OIBJ$ donc $S(B) = J \Rightarrow (\vec{\Omega B}, \vec{\Omega J}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi)$, d'autre part

$$S(A) = B \Rightarrow (\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B}) \equiv \frac{\pi}{2} (2\pi) \Rightarrow (\vec{\Omega A}, \vec{\Omega B}) + (\vec{\Omega B}, \vec{\Omega J}) \equiv \pi (2\pi)$$

$\Rightarrow (\vec{\Omega A}, \vec{\Omega J}) \equiv \pi (2\pi)$ ce qui prouve que les points A, Ω et J sont alignés.

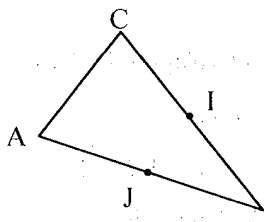
Solution 18 :

$$1^\circ / a) * h(I) = r^{-1} \circ s(I)$$

$$= r^{-1}[s(I)]$$

$$= r^{-1}(C')$$

$$= C$$



$$* h(J) = r^{-1}[s(J)] = r^{-1}(A') = A$$

b) * h est la composée de 2 similitude directes donc h est une

similitude directe de rapport $k = 1 \cdot \frac{A'C'}{IJ} = \frac{AC}{IJ} = 2$

car : $A'C' = AC$ (r conserve les distances)

et $\vec{AC} = 2 \vec{IJ}$ (théorème des milieux)

* Soit θ une mesure de l'angle de h .

$$\theta \equiv (\vec{IJ}, \vec{CA}) \quad (2\pi)$$

$$\equiv 0 \quad (2\pi)$$

donc h est une homothétie de rapport 2.

* Soit Ω le centre de h .

on a : $h(I) = C \Leftrightarrow \Omega \in (IC)$

et $h(J) = A \Leftrightarrow \Omega \in (AJ)$

or $(AJ) \cap (IC) = \{B\}$ d'où $\Omega = B$

Conclusion : h est une homothétie de centre B et de rapport 2.

2°/ a) * On a : $r(A) = A'$ et $r(C) = C'$

$$\Rightarrow \widehat{(\vec{AC}, \vec{A'C'})} \equiv \frac{\pi}{2} \quad (2\pi) \quad \text{d'où } (AC) \perp (A'C')$$

* On a : $h(I) = C$ et $h(J) = A \Rightarrow (IJ) \parallel (AC)$

d'où $(IJ) \perp (A'C')$.

* On a : $A'C' = AC = 2IJ$ (d'après 1°/ b))

$$\text{b) } h = r^{-1} \circ s \Rightarrow s = r \circ h$$

* soit k le rapport de $s \Rightarrow k = 1.2 = 2$

* soit α une mesure de l'angle de s

$$\alpha \equiv \frac{\pi}{2} + 0 \quad (2\pi)$$

$$\equiv \frac{\pi}{2} \quad (2\pi)$$

Soit ω le centre de s

$$s : \omega \rightarrow \omega$$

$$I \rightarrow C'$$

$$J \rightarrow A'$$

On a : $\widehat{(\vec{\omega I}, \vec{\omega C'})} \equiv \frac{\pi}{2} \quad (2\pi) \Rightarrow \omega$ appartient au demi-cercle Γ_1 de diamètre $[IC']$

* $\widehat{(\vec{\omega J}, \vec{\omega A'})} \equiv \frac{\pi}{2} \quad (2\pi) \Rightarrow \omega$ appartient au demi-cercle Γ_2 de diamètre $[JA']$.

c) On a : $r^{-1} \circ s = h \Rightarrow s = r \circ h$

$$s(B) = r \circ h(B) = r(B)$$

or : $JB = JB'$ et $\widehat{(JB, JB')} \equiv \frac{\pi}{2} \pmod{2\pi}$ d'où $r(B) = B'$

d'où $s(B) = B'$ et comme $s(\omega) = \omega$ alors $(\omega B) \perp (\omega B')$.

Solution 19 :

f étant un antidéplacement

donc f est :

soit une symétrie orthogonale S_Δ

soit une symétrie glissante.

Si $f = S_\Delta$

On a : $C \xrightarrow{f} A$ donc $A \xrightarrow{f} C$ or $f(A) = B$ d'où $f \neq S_\Delta$ et par suite

f est une symétrie glissante et par conséquent il existe un vecteur $\vec{u}$ et

une droite D de vecteur $\vec{u}$ tel que :

$$f = S_D \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}} \circ S_D \quad (D \text{ étant l'axe de } f)$$

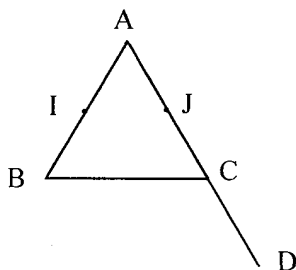
on a : $f \circ f = T_{2\vec{u}}$ d'où $T_{2\vec{u}}(C) = f \circ f(C) = f(A) = B$

et par suite $2\vec{u} = \vec{CB} \Rightarrow \vec{u} = \frac{1}{2}\vec{CB}$

$$f(C) = A \Rightarrow C * A = J \in D$$

$$f(A) = B \Rightarrow A * B = I \in D \quad \text{d'où } D = (IJ)$$

$$\text{Conclusion : } f = S_{(IJ)} \circ T_{\frac{1}{2}\vec{CB}} = T_{\frac{1}{2}\vec{CB}} \circ S_{(IJ)}$$



$$\left(\frac{1}{2}\vec{CB} = \vec{JI} \text{ (théorème des milieux))}\right)$$

$$2^\circ / \text{ on a : } \vec{AI} = \vec{IB} \text{ car } I = A * B$$

$$\text{on a : } g(A) = A', g(B) = D \text{ et } g(I) = C$$

$$\text{donc } \vec{A'C} = \vec{CD} \text{ or } \vec{CD} = \vec{AC} \text{ car } C = A * D$$

$$\text{d'où } \vec{A'C} = \vec{AC} \text{ et par suite } A' = A$$

$$\textbf{Conclusion : } g(A) = A$$

$$* \text{ Soit } k \text{ le rapport de } g \text{ on a : } k = \frac{AD}{AB} = \frac{2AC}{AB} = 2 \text{ car } AB = AC$$

$$* \text{ Soit } \theta \text{ une mesure de son angle}$$

$$\theta \equiv (\vec{AB}, \overset{\wedge}{\vec{AD}}) \quad [2\pi]$$

$$\equiv (\vec{AB}, \overset{\wedge}{\vec{AC}}) \quad [2\pi]$$

$$\equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]$$

3°/ a) $f \circ g$ est la composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte donc $f \circ g$ est une similitude indirecte.

$$\text{b) } f \circ g = f(g(I)) = f(C) = A$$

$$f \circ g = f(g(A)) = f(A) = B$$

$$\text{c) On a : } \vec{\Omega A} + 2\vec{\Omega I} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\Omega A} + 2\vec{\Omega B} + 2\vec{BI} = \vec{0}$$

$$\text{or } 2\vec{BI} = \vec{BA} \text{ d'où } \vec{\Omega A} + 2\vec{\Omega B} + \vec{BA} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$\vec{\Omega A} + (\vec{\Omega B} + \vec{\Omega B}) + \vec{BA} = \vec{0} \Rightarrow \vec{\Omega A} + \vec{\Omega B} + \vec{\Omega A} = \vec{0} \text{ soit}$$

$$\text{ainsi } 2\vec{\Omega A} + \vec{\Omega B} = \vec{0}$$

Ω est le barycentre du système $\{(A,1); (I,2)\}$ $f \circ g$ conserve les barycentre donc $f \circ g(\Omega)$ est le barycentre du système

$$\{(f \circ g(A), 1); (f \circ g(I), 2)\} \text{ or } f \circ g(A) = B \text{ et } f \circ g(I) = A$$

d'où $f \circ g(\Omega)$ est le barycentre du système $\{(A,1); (I,2)\}$ or Ω est le barycentre de ce système donc $f \circ g(\Omega) = \Omega$ (unicité du barycentre d'un système donné).

4°/a) Soit k' le rapport de $f \circ g$. $k' = 1.k = 2$

$$\text{b) On a : } f \circ g = S_{\Delta} \circ h(\Omega, 2) = h(\Omega, 2) \circ S_{\Delta} \quad \Omega \in \Delta$$

$$\text{On a : } S_{\Delta} = h(\Omega, \frac{1}{2}) \circ f \circ g$$

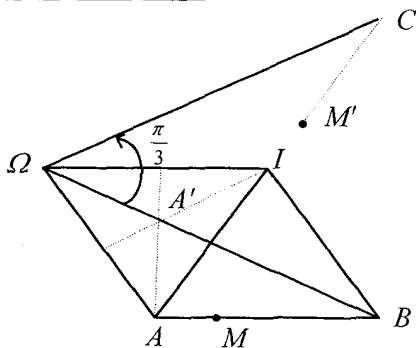
$$S_{\Delta}(A) = h(\Omega, \frac{1}{2})(f \circ g(A)) = h(\Omega, \frac{1}{2})(B)$$

$$\text{Soit } B_1 = h(\Omega, \frac{1}{2})(B) \Rightarrow B_1 \in (\Omega B) = (AB)$$

on a : $S_{\Delta}(A) = B_1 \Rightarrow \Delta$ est perpendiculaire à la droite $(AB_1) = (AB)$

Conclusion : l'axe Δ de $f \circ g$ est la droite passant par Ω et perpendiculaire à la droite (AB) .

Solution 20 :



$$1^\circ/\text{a) On a : } BA = BI, S_{(AI)}(B) = \Omega, S_{(AI)}(A) = A, S_{(AI)}(I) = I$$

or $S_{(A I)}$ conserve les distances donc $\Omega A = \Omega I$

donc il existe un unique déplacement f tel que :

$$f(\Omega) = \Omega \text{ et } f(A) = I$$

$$\text{or } (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega I}) \equiv (\overrightarrow{BI}, \overrightarrow{BA}) \quad (2\pi)$$

($S_{A I}$ transforme les mesures des angles en leurs opposés)

$$\text{et par suite } (\overrightarrow{\Omega A}, \overrightarrow{\Omega I}) \equiv \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$$

donc f est une rotation de centre Ω , d'angle $\frac{\pi}{3}$ et R sont deux rotations de même angle et qui transforment de la même façon le point A en I et par suite $f = R$.

Conclusion : Ω est le centre de R .

$$\text{b) on a : } R(A) = I \text{ et } R(B) = C \text{ donc } AB = IC \text{ et } (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IC}) \equiv \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$$

or $AB = IA$ donc $IA = IC$

$$(\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}) \equiv (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{AB}) + (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{IC}) \quad (2\pi)$$

$$\equiv (\overrightarrow{AI}, \overrightarrow{AB}) + \pi + \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$$

$$\equiv -\frac{\pi}{3} + \pi + \frac{\pi}{3} \quad (2\pi)$$

$$\equiv \pi \quad (2\pi)$$

$$\begin{cases} IA = IC \\ (\overrightarrow{IA}, \overrightarrow{IC}) \equiv \pi \end{cases} \quad (2\pi) \quad \Rightarrow I = A * C$$

Conclusion : I est le milieu de $[AC]$

2°/ On a : $AM = IM'$ donc il existe un unique déplacement g tel que $g(A) = I$ et $g(M) = M'$

$$\begin{aligned} \text{or } (\vec{AM}, \vec{IM'}) &\equiv (\vec{AB}, \vec{AI}) \quad (2\pi) \\ &\equiv \frac{\pi}{3} \quad (2\pi) \end{aligned}$$

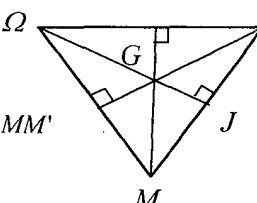
donc g est une rotation d'angle $\frac{\pi}{3}$ et qui transforme A en I alors $g =$

R et par suite $R(M) = M'$ donc

$$\begin{cases} \Omega M = \Omega M' \\ (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega M'}) \equiv \frac{\pi}{3} \quad (2\pi) \end{cases}$$

Conclusion : $\Omega MM'$ est un triangle équilatéral.

3°/ a) Soit k le rapport de S on a :

$$\begin{aligned} k &= \frac{\Omega G}{\Omega M} \\ \Omega G &= \frac{2}{3} \Omega J = \frac{2}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} MM' \quad (J = M * M') \end{aligned}$$


d'où $k = \frac{\sqrt{3}}{3}$

Soit θ une mesure de l'angle de S

$$\begin{aligned} \text{On a : } \theta &\equiv (\vec{\Omega M}, \vec{\Omega G}) \quad (2\pi) \\ &\equiv \frac{\pi}{6} \quad (2\pi) \end{aligned}$$

$$\text{b) On a : } (\vec{\Omega B}, \vec{\Omega I}) \equiv \frac{\pi}{6} \quad (2\pi) \quad . \quad \text{D'autre part : } \frac{\Omega I}{\Omega B} = \frac{\Omega I}{2\Omega O} \quad \text{où}$$

$$O = A * I \quad \text{or} \quad \frac{\Omega O}{\Omega I} = \cos \frac{\pi}{6} \quad (\Omega O I \text{ triangle rectangle en } O)$$

* Soit k le rapport de S ; on a : $k = \frac{AB}{AC} = 2 \frac{AC}{AC} = 2$

b) on a : $S : A \rightarrow B$

$C \rightarrow A$ donc $(\Omega A) \perp (\Omega B)$ car l'angle de S est $\frac{\pi}{2}$

on a : $s : C \rightarrow A$

$\Omega \rightarrow \Omega$ donc $(\Omega A) \perp (\Omega C)$

On a ainsi $\begin{cases} (\Omega A) \perp (\Omega B) \\ (\Omega A) \perp (\Omega C) \end{cases}$ donc $(\Omega B) \parallel (\Omega C)$ et par suite Ω, B, C

sont alignés d'où $\Omega \in (BC)$.

on a : $(\Omega A) \perp (\Omega B)$ et $(\Omega B) = (BC)$ d'où $(\Omega A) \perp (BC)$

Conclusion : Ω est le projeté orthogonal de A sur (BC) .

2°/ a) $S(D')$ est une droite perpendiculaire à D' car l'angle de la similitude S a pour mesure $\frac{\pi}{2}$.

d'autre part $C \in D'$ donc $S(C) \in S(D')$ or $S(C) = A$ donc $A \in S(D')$

on a : $\begin{cases} S(D') \perp D' \\ A \in S(D') \end{cases}$ donc $S(D') = \Delta$

* $S(\Delta)$ est une droite perpendiculaire à Δ et comme $A \in \Delta$ donc $S(A) \in S(\Delta)$

or $S(A) = B$ donc $B \in S(\Delta)$

on a donc $S(\Delta)$ est la droite passant par B et perpendiculaire à Δ
donc $S(\Delta) = D$.

b) $\{J\} = \Delta \cap D'$ donc $\{s(J)\} = s(\Delta) \cap s(D') = D \cap \Delta = \{I\}$ donc $s(J) = I$

c) On a : $s : J \rightarrow I$

$\Omega \rightarrow \Omega$ donc $(\vec{\Omega J}, \vec{\Omega I}) \equiv \frac{\pi}{2} \quad [2\pi]$

donc Ω appartient au cercle de diamètre $[IJ]$.

$$\begin{aligned}
 &\equiv - (\overset{\wedge}{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CB}}) \quad [2\pi] \\
 &\equiv (\overset{\wedge}{\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BA}}) \quad [2\pi] \equiv \frac{\pi}{3} \quad [2\pi]
 \end{aligned}$$

Erreur ! Signet non défini. $\overrightarrow{CK}$ et $\overrightarrow{C'K}$ sont colinéaires et de même sens (1)

$$* \frac{CK}{CD} = \frac{CB}{AB} = \frac{1}{\cos \frac{\pi}{3}} = 2 \quad \text{donc} \quad CK = C'K \quad (2)$$

$$(1) \quad \text{et} \quad (2) \Rightarrow \underline{s(C) = C}$$

2°) $f: D \rightarrow A \quad \text{et} \quad f: A \rightarrow A'$

a) Supposons que f est une symétrie orthogonale d'axe Δ .

Donc $S_{\Delta}(D) = A$ alors $S_{\Delta}(A) = D$ or $S_{\Delta}(A) = A'$ ce qui est impossible donc $f \neq S_{\Delta}$ d'où f est une symétrie glissante.

On a : $f = S_{\Delta} \circ T_{\vec{u}} = T_{\vec{u}} \circ S_{\Delta}$ (forme réduite de f)

d'une part on a : $f \circ f = T_{\vec{u}} \circ T_{\vec{u}}$ et d'autre part : $f \circ f(D) = A'$ d'où

$$2\vec{u} = \overrightarrow{DA'} = 2\overrightarrow{DC} \quad \text{d'où} \quad \vec{u} = \overrightarrow{DC} \quad \text{est son vecteur}$$

$$* f(D) = A \Rightarrow D * A = J \in \Delta$$

d'où Δ est la droite qui passe par J et de vecteur directeur $\overrightarrow{DC}$.

$\Delta = (IJ)$ est l'axe de f .

Conclusion : $f = S_{(IJ)} \circ T_{\overrightarrow{DC}} = T_{\overrightarrow{DC}} \circ S_{(IJ)}$.

$$b) f(K) = S_{(IJ)} \circ T_{\overrightarrow{DC}}(K) = S_{(IJ)}(A) = C$$

car : (IJ) est la médiatrice de $[AC]$

$$3^{\circ}) g = f \circ s$$

a) g est la composée d'une similitude directe et d'un antidéplacement

(similitude indirecte de rapport 1) alors g est une similitude indirecte de rapport 2.

$$b) \text{ On a : } g = S_{\Delta} \circ h_{(\Omega, 2)} = h_{(\Omega, 2)} \circ S_{\Delta}$$

$$g \circ g = h_{(\Omega, 2)} \circ S_{\Delta} \circ S_{\Delta} \circ h_{(\Omega, 2)} = h_{(\Omega, 4)}$$

$$* g(D) = f \circ s(D) = f(K) = C$$

$$* g \circ g(D) = g(g(D)) = g(C) = f \circ s(C) = f(C)$$

Détermination de $f(C)$:

On a : $KACD$ parallélogramme donc $K * C = A * D$

d'où $f(K) * f(C) = f(A) * f(D)$ soit $C * f(C) = A' * A$

$C * f(C) = I$ d'où $f(C) = B$.

Conclusion : $g \circ g(D) = B$.

$$c) \text{ On a : } g \circ g = h_{(\Omega, 4)}$$

d'où : $h_{(\Omega, 4)}(D) = B$ et par suite : $\vec{\Omega B} = 4\vec{\Omega D}$

$$\Rightarrow \vec{\Omega D} + \vec{DB} = 4\vec{\Omega D} \Rightarrow 3\vec{\Omega D} = \vec{DB} \text{ et par suite } \vec{D\Omega} = -\frac{1}{3}\vec{DB}$$

d'où la construction du point Ω centre de g .

$$\text{On a : } g = S_{\Delta} \circ h_{(\Omega, 2)} \approx h_{(\Omega, 2)} \circ S_{\Delta} \Rightarrow S_{\Delta} = h_{(\Omega, \frac{1}{2})} \circ g$$

$$S_{\Delta}(D) = h_{(\Omega, \frac{1}{2})} \circ g(D) = h_{(\Omega, \frac{1}{2})}(C) = C' \text{ tel que } \vec{\Omega C'} = \frac{1}{2}\vec{\Omega C}$$

Donc $C' = \Omega * C$

On a ainsi $S_{\Delta}(D) = C'$ alors Δ est la médiatrice de $[DC']$

(Δ passe par Ω).

Solution 23:

$$1^{\circ} / f : z' = -2i\bar{z} + 1 + i$$

z' est de la forme $a\bar{z} + b$ où $a \neq 0$

alors f est une similitude indirecte de rapport $k = |a| = |-2i| = 2$

Soit Ω le centre de f :

$$\text{On a : } f(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow z = -2i \bar{z} + 1 + i$$

où z : affixe de Ω

on pose $z = x + iy$ on obtient

$$x + iy = -2i(x - iy) + 1 + i \Leftrightarrow x + iy = -2y + 1 + i(-2x + 1)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2y + 1 & (1) \\ y = -2x + 1 & (2) \end{cases}$$

$$(1) : x = -2(-2x + 1) + 1$$

$$x = 4x - 1 \text{ d'où } x = \frac{1}{3} \text{ et par suite } y = \frac{1}{3}$$

Conclusion : Ω d'affixe $\frac{1}{3}(1 + i)$ est le centre de f

$D = \text{Axe de } f$

$$D = \left\{ M(x, y) \in P / \overline{\Omega M'} = 2\overline{\Omega M} \right\}$$

$$\overline{\Omega M'} = 2\overline{\Omega M} \Leftrightarrow z' - z_{\Omega} = 2(z - z_{\Omega}) \Leftrightarrow$$

$$-2i\bar{z} + 1 + i - \frac{1}{3}(1 + i) = 2z - \frac{2}{3}(1 + i)$$

On pose $z = x + iy$ on obtient :

$$-2i(x - iy) + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}i = 2(x + iy) - \frac{2}{3}(1 + i)$$

$$-2ix - 2y + \frac{2}{3} + \frac{2}{3}i = 2x + 2iy - \frac{2}{3} - \frac{2}{3}i$$

$$\Leftrightarrow 3x + 3y - 2 = 0$$

L'axe de f est la droite D d'équation : $3x + 3y - 2 = 0$

2°/ On sait que $f = h_{(\Omega, 2)} \circ S_D = S_D \circ h_{(\Omega, 2)}$

$$\text{d'où } f \circ f = h_{(\Omega, 2)} \circ S_D \circ S_D \circ h_{(\Omega, 2)}$$

$$f \circ f = h_{(\Omega, 4)}$$

$$f \circ f : z' - z_{\Omega} = 4(z - z_{\Omega})$$

$$f \circ f : z' = 4z - 1 - i$$

$$3^\circ/ \text{ a) } S : z' = az + b$$

$$\text{on a : } a = ke^{i\theta} = \frac{1}{2} e^{i\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2} i$$

$$\frac{b}{1-a} = z_\Omega = \frac{1}{3} + \frac{1}{3}i \Rightarrow b = \frac{1}{3}(1+i)\left(1 - \frac{1}{2}i\right)$$

$$b = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}i$$

$$S : z' = \frac{1}{2} iz + \frac{1}{2} + \frac{i}{6}$$

$$\text{b) } \varphi = f \circ S$$

$$\varphi : z' = -2i \left[\frac{-i}{2} z + \frac{1-i}{2 \cdot 6} \right] + 1 + i$$

$$z' = -\overline{z} - i - \frac{1}{6} + 1 + i$$

$$\varphi : z' = -\overline{z} + \frac{5}{6}$$

φ est la composée d'une similitude directe et d'une similitude indirecte d'où φ est une similitude indirecte le rapport de φ est $h =$

$$2 \times \frac{1}{2} = 1$$

D'où φ est un antidéplacement.

Soit M un point invariant par φ

$$\text{On a : } \varphi(M) = M \Leftrightarrow x + iy = -(\overline{x - iy}) + \frac{5}{6} \Leftrightarrow 2x = \frac{5}{6}$$

$$x = \frac{5}{12}$$

$\Rightarrow$ l'ensemble des points invariants de φ est une droite $\Delta : x = \frac{5}{12}$

$$\text{D'où } \varphi = S_\Delta$$

Solution 24:

$$1^{\circ} / a) f(A) = A'$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } z_{A'} &= \frac{1+i}{\sqrt{2}} (-1-i) - 1+i(1+\sqrt{2}) \\ &= -\sqrt{2}i - 1 + i + i\sqrt{2} \\ &= -1 + i = z_A \text{ d'où } A' = A \end{aligned}$$

$$\text{On a : } f(A) = A$$

$$\text{Soit } C' = f(C)$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } z_{C'} &= \frac{(1+i)}{\sqrt{2}} (i\sqrt{2}) - 1+i(1+\sqrt{2}) = -i(1+i) - 1+i+i\sqrt{2} \\ &= i\sqrt{2} = z_C \end{aligned}$$

$$\text{D'où } C' = C \text{ et par suite } f(C) = C$$

$$b) z' \text{ est de la forme } a\bar{z} + b \text{ où } a = \frac{1+i}{\sqrt{2}} = 1 - e^{i\frac{\pi}{4}} \neq 0$$

alors f est une similitude indirecte or $|a| = 1$ donc f est un antidéplacement qui a des points invariants A et C d'où $f = S_{AC}$

$$2^{\circ} / a) h : z' - z_A = \sqrt{2} (z - z_A)$$

$$z' = \sqrt{2} z + z_A (1 - \sqrt{2})$$

$$h : z' = \sqrt{2} z + (\sqrt{2} - 1)(1 - i)$$

$$b) g = f \circ h$$

$$\text{on a : } g : z' = \frac{1+i}{\sqrt{2}} (\sqrt{2} \bar{z} + (\sqrt{2} - 1)(1 + i)) - 1 + i(1 + \sqrt{2})$$

$$z' = (1+i) \bar{z} + \left(\frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}} \right) (2i) - 1 + i + i\sqrt{2}$$

$$= (1+i) \bar{z} + 2i - \cancel{\sqrt{2}i} - 1 + i + \cancel{i\sqrt{2}}$$

$$= (1+i) \bar{z} - 1 + 3i$$

3°/

$$\text{a) aff } \overrightarrow{AB} = z_B - z_A = 3 + 2i - (-1 + i) = 4 + i$$

$$\text{aff } \overrightarrow{AM_0''} = z_{M_0''} - z_A$$

$$z_{M_0''} = (1 + i)(2 + 4i) - 1 + 3i$$

$$= 2 + 4i + 2i - 4 - 1 + 3i = -3 + 9i$$

$$\text{aff } \overrightarrow{AM_0''} = (-3 + 9i) - (-1 + i) = -2 + 8i$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM_0''} = 4 \times (-2) + (1 \times 8) = -8 + 8 = 0$$

$$\text{D'où } \overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AM_0''}$$

$$\begin{aligned} \text{b) aff } \overrightarrow{AM''} &= z_{M''} - z_A = (1+i)\overline{z} + 2i = (1+i)(x-yi) + 2i \\ &= x - yi + xi + y + 2i \end{aligned}$$

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AM''} = 4(x+y) + x + 2 - y = 5x + 3y + 2$$

$$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AM''} \Leftrightarrow 5x + 3y + 2 = 0 \Leftrightarrow 5x + 3y = -2$$

$$5x + 3y = 5(-1) + 3 \times 1$$

$$5(x+1) = 3(-y+1) \quad \text{et comme } 5 \wedge 3 = 1$$

$$\Rightarrow 3 \text{ divise } (x+1) \text{ et par suite } x+1 = 3k \quad \text{où } k \in \mathbb{Z}$$

$$x = 3k - 1$$

$$\text{on a : } 3(1-y) = 5(x+1) \Leftrightarrow 3(1-y) = 5(3k) \Leftrightarrow$$

$$1-y = 5k$$

$$y = -5k + 1$$

$$\text{Conclusion : } S_{\mathbb{Z}^2} = \{ (3k-1, -5k+1) \text{ où } k \in \mathbb{Z} \}$$

Solution 25:

$$1^\circ / z' = \frac{(3+4i)}{5}z + \frac{1-2i}{5} \Leftrightarrow x' + iy' = \frac{(3+4i)}{5}(x - yi) + \frac{1-2i}{5}$$

$$\Leftrightarrow x' + iy' = \frac{3x + 4y}{5} + i \left(\frac{-3y + 4x}{5} \right) + \frac{1-2i}{5}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} x' = \frac{3x + 4y + 1}{5} \\ y' = \frac{4x - 3y - 2}{5} \end{cases}$$

$$2^\circ / z' \text{ est de la forme } a\bar{z} + b \text{ où } a = \frac{3+4i}{5} \text{ et } b = \frac{1-2i}{5}$$

$a \neq 0$ d'où f est une similitude indirecte de rapport $k = |a| = 1$

d'où f est un antidéplacement

Cherchons l'ensemble des points invariants par f

$$f(M) = M \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3x + 4y + 1}{5} \\ y = \frac{4x - 3y - 2}{5} \end{cases} \Leftrightarrow 2x - 4y - 1 = 0$$

D'où f est la symétrie orthogonale d'axe $\Delta : y = \frac{x}{2} - \frac{1}{4}$

$$3^\circ / z' \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \text{Im}(z') = 0 \Leftrightarrow 4x - 3y - 2 = 0$$

$$\text{D'où : } D : 4x - 3y - 2 = 0$$

4^o/

$(2, 2)$ est solution de (*)

$$4x - 3y = 2 \Leftrightarrow 4x - 3y = 4 \times 2 - 3 \times 2 \Leftrightarrow 4(x - 2) = 3(y - 2)$$

$$4 \wedge 3 = 1 \text{ alors } x - 2 = 3k \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{d'où } x = 2 + 3k$$

$$4(x - 2) = 3(y - 2) \Leftrightarrow 12k = 3(y - 2) \Leftrightarrow y - 2 = 4k$$

$$y = 2 + 4k$$

$$S_{\mathbb{Z}^2} = \{ (2 + 3k, 2 + 4k) \text{ où } k \in \mathbb{Z} \}$$

$$5^\circ / \begin{cases} \operatorname{Re}(z') \in \mathbb{Z} \\ \operatorname{Im}(z') \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x' \in \mathbb{Z} \\ y' \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{4+4y}{5} \in \mathbb{Z} \\ \frac{2-3y}{5} \in \mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4+4y \equiv 0(5) \\ 2-3y \equiv 0(5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4y \equiv -4(5) \\ 3y \equiv 2(5) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \equiv -1(5) \\ 2 \times 3y \equiv 4(5) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y \equiv -1(5) \\ y \equiv -1(5) \end{cases}$$

$$y = 5k - 1 \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

Solution 26 :

$$1^\circ / z' = x' + iy' = (x + y - 1) + i(x - y + 1)$$

$$= x + y - 1 + ix - iy + i$$

$$z' = (1 + i) \bar{z} - 1 + i$$

$$2^\circ / a) z' \text{ est de la forme } a\bar{z} + b \text{ où } a = 1 + i \text{ et } b = -1 + i$$

alors f est une similitude indirecte.

- le rapport de f est $k = |a| = |1 + i| = \sqrt{2}$

- soit Ω le centre de f

$$\text{on a : } f(\Omega) = \Omega \Leftrightarrow \begin{cases} x = x + y - 1 \\ y = x - y + 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 1 \end{cases}$$

$$\text{D'où } \Omega(1, 1)$$

$$\text{Axe de } f \text{ est } D = \{ M(x, y) \in P / \overrightarrow{\Omega M'} = \sqrt{2} \overrightarrow{\Omega M} \}$$

$$\text{On a : } \begin{cases} x' - 1 = \sqrt{2}(x - 1) \\ y' - 1 = \sqrt{2}(y - 1) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x + y - 2 = \sqrt{2}x - \sqrt{2} \\ x - y = \sqrt{2}y - \sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = (\sqrt{2} - 1)x + 2 - \sqrt{2} & (1) \\ x - y(1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} = 0 & (2) \end{cases}$$

(2) devient en remplaçant y :

$$x - [(\sqrt{2} - 1)x + 2 - \sqrt{2}](1 + \sqrt{2}) + \sqrt{2} = 0$$

$$x - (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)x - (\sqrt{2} + 1)(2 - \sqrt{2}) + \sqrt{2} = 0$$

$$x - (1)x - (2\sqrt{2} - 2 + 2 - \sqrt{2}) + \sqrt{2} = 0$$

$$x - x - \sqrt{2} + \sqrt{2} = 0 \quad (\text{vraie})$$

$$\text{d'où (D) : } y = (\sqrt{2} - 1)x + 2 - \sqrt{2}$$

$$2^{\circ} / 2x^2 - y^2 + 2y - 2 = 0 \Leftrightarrow 2x^2 - (y^2 - 2y) - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - (y - 1)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} - \frac{(y - 1)^2}{1^2} = 1$$

Γ est une hyperbole de centre $\Omega'(0, 1)$ d'axes les droites

d'équations respectives $x = 0$ et $y = 1$;

de sommets les points $A\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, 1\right)$; $A'\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}, 1\right)$ les asymptotes

d'équations

$$y = \sqrt{2}x + 1 \text{ et } y = -\sqrt{2}x + 1$$

$$\text{b) On a : } \begin{cases} x + y - 1 = x' \\ x - y + 1 = y' \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{x' + y'}{2} \\ y = \frac{x' - y' + 2}{2} \end{cases}$$

D'où $\Gamma' : f(\Gamma)$ a pour équation :

$$\Gamma' = 2\left(\frac{x + y}{2}\right)^2 - \left(\frac{x - y}{2}\right)^2 = 1$$

$$\text{D'où : } \Gamma' : x^2 + 6xy + y^2 - 4 = 0$$