

EXERCICES**Exercice 1 :**

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x^2 + 4} & \text{pour } x \geq 0 \\ \frac{x^2}{x^2 + 2} + 2 & \text{pour } x < 0 \end{cases}$$

1°/ Montrer que f est continue en 0

2°/

- a) Montrer que f est dérivable en 0
- b) Interpréter géométriquement le résultat .

Exercice 2:

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$x \mapsto \begin{cases} \sqrt{x-1} & \text{si } x \geq 1 \\ \frac{2x^2 - 2}{x^2 + 1} & \text{pour } x < 1 \end{cases}$$

1°/ Montrer que f est continue en 1

2°/

- a) Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$
- b) Interpréter géométriquement le résultat .

Exercice 3:

$$f(x) = \sqrt{|x| + x^2}$$

1°/ Df

2°/ Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 0$

Exercice 4:

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} \text{ pour } x > 0 \\ f(x) = x^2 + ax + 2b \text{ pour } x \leq 0 \end{cases}$$

1°/ Calculer b pour que f soit continue en 0

2°/ Calculer a pour que f soit dérivable en 0

Exercice 5 :

$$f(x) = x^3 + 2x - 1$$

1°/ Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$

2°/

a) Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$

b) Montrer que C_f a un seul point d'inflexion I

3°/ Ecrire l'équation de la tangente (T) à C_f au point I .

Exercice 6 :

1°/ Montrer que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ on a : $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{\pi}$.

2°/ En déduire que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{3\pi}$.

3°/ Démontrer que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$.

Exercice 7 :

Utiliser le théorème des inégalités des accroissements finis pour montrer que :

1°/ $\frac{b-a}{\cos^2 a} \leq \tan(b) - \tan(a) \leq \frac{b-a}{\cos^2 b} \quad (0 < a < b < \frac{\pi}{2})$.

2°/ $\frac{1}{2\sqrt{a+1}} \leq \sqrt{a+1} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} \quad (a > 0)$

3°/ $\frac{\pi}{2} - 2x \leq (\cotg x) - 1 \leq \frac{\pi}{4} - x \quad (x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}])$.

Exercice 8 :

Soit $f(x) = \sqrt{x^2 + 8} - x$.

1°/ Prouver que $\forall x \in [1, 2]$ on a : $1 \leq f(x) \leq 2$ et $|f'(x)| \leq \frac{2}{3}$

2°/ Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $1 \leq U_n \leq 2$.

b) En utilisant le théorème des inégalités des accroissements finis, montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left| U_{n+1} - 2\sqrt{\frac{2}{3}} \right| \leq \frac{2}{3} \left| U_n - 2\sqrt{\frac{2}{3}} \right|$.

3°/a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\left| U_n - 2\sqrt{\frac{2}{3}} \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

b) En déduire que (U_n) est une suite convergente vers un réel l que l'on calculera.

Exercice 9 :

Soit $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3}$.

1°/ Etudier les variations de f .

2°/ On définit la suite (U_n) par : $\begin{cases} U_0 = 0 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $-\frac{1}{3} \leq U_n \leq 0$.

b) Montrer que $\forall x \in [-\frac{1}{3}, 0]$, $|f'(x)| \leq \frac{27}{98}$.

3°/ On pose $\forall n \in \mathbb{N}$, $V_n = U_{2n}$ et $W_n = U_{2n+1}$.

Prouver que $|W_{n+1} - V_{n+1}| \leq \left(\frac{27}{98}\right)^{2n} |W_n - V_n|$.

4°/a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$|W_n - V_n| \leq \left(\frac{27}{98}\right)^{2n} |W_0 - V_0|.$$

b) Montrer que (V_n) et (W_n) sont deux suites convergentes vers la même limite l .

5°/ En déduire que (U_n) est convergente vers l .

Exercice 10 :

Soit f la fonction définie par : $f(x) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1}$.

1°/ Etudier les variations de f .

2°/ Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Montrer que le point $A(0,1)$ est un centre de symétrie de C_f .

b) Ecrire une équation cartésienne de la tangente (T) à C_f au point

A.

3°/ a) Etudier la position de C_f et (T).

b) Tracer C_f et (T).

Exercice 11 :

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto \frac{x^3 + 2x^2 + 3x - 2}{x^2 + 3}$$

A. On note $(\mathcal{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°/ Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que : $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = \frac{(x+1)^2(x^2 - 2x + 9)}{(x^2 + 3)^2}.$$

2°/ Etudier les variations de f .

3°/ a) Montrer qu'il existe trois réels a, b, c tels que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, f(x) = ax + b + \frac{c}{x^2 + 3}.$$

b) En déduire que $(\mathcal{C})$ admet une asymptote oblique Δ .

4°/ Etudier la position de $(\mathcal{C})$ et Δ .

5°/ a) Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T) à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse $x_0 = 0$.

b) Montrer que $(T) \parallel \Delta$.

c) Etudier la position de $(\mathcal{C})$ et (T).

d) Tracer $(\mathcal{C})$.

B. Soit la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} u_0 = -\frac{1}{2} \\ \text{et} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$$

1°/ Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, -1 \leq u_n \leq 0$.

2°/ Montrer que (u_n) est une suite décroissante.

3°/ Montrer que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

Exercice 12 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 4} & \text{si } x \leq 0 \\ \frac{2}{x+1} - x & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

1°/ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.

2°/a) Etudier la dérivabilité de f en 0.

b) Interpréter géométriquement le résultat.

3°/a) Etudier les variations de f sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.

b) Montrer que C_f admet une asymptote oblique Δ .

4°/ Etudier la position de C_f par rapport à Δ .

5°/ Tracer C_f dans un plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 13 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}_+$ par $f(x) = x - \frac{1}{x\sqrt{x+1}}$.

1°/ Etudier la dérivabilité de f à droite en $x_0 = 0$.

2°/ Ecrire une équation de la tangente Δ à C_f en A d'abscisse $x_0 = 0$.

3°/ Etudier la position de C_f et Δ .

4°/a) Montrer que C_f admet une asymptote oblique D.

b) Etudier la position de C_f et D.

5°/a) Etudier les variations de f .

b) Tracer C_f dans un plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 14 :

Soit $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 1 + \frac{1}{2} \cos x$$

1°/ Etudier les variations de f .

2°/ Montrer que C_f admet un seul point d'inflexion I.

3°/ Tracer C_f dans un plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 15 :

Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1$$

1°/ Etudier les variations de f

2°/ On note (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

a) Ecrire l'équation de la tangente (T) à (C) au point d'abscisse $x_0 = 0$

b) Etudier la position de (C) et (T)

3°/ Tracer (C)

4°/ On considère la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$\begin{cases} U_0 = -\frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

a) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, -1 < U_n < 0$

b) Montrer que (U_n) est convergente et calculer sa limite.

5°/

a) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_{n+1} + 1 \leq \frac{2\sqrt{5}}{5} (U_n + 1)$

b) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n + 1 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \right)^n$

c) Retrouver ainsi la limite de la suite (U_n) .

Exercice 16 :

A) Soit $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{x^n}{\sqrt{x^2+1}}$ où n est entier ≥ 1

On note C_n la courbe représentative de f_n dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°/

- a) Etudier la parité de f_n
- b) Préciser les branches infinies de la courbe (C_n) .

2°/

- a) Déterminer les points fixes de (C_n)
- b) Etudier la position relative de (C_{n+1}) et (C_n)

3°/ Etudier les variations de f_n .**B)** $U_0 \in]0, 1[$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = f_k(U_n)$ où k est un entier fixe ≥ 1 .1°/ Prouver que $\forall n \geq 1, 0 < U_n < 1$ 2°/ Prouver que $\forall n \geq 1, U_{n+1} < \frac{1}{\sqrt{2}} U_n$

3°/

- a) Prouver que (U_n) est une suite décroissante.
- b) Prouver que (U_n) est une suite convergente vers un réel que l'on calculera.

SOLUTIONS

Solution 1 :

$$1^{\circ} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x^2 + 4} = \sqrt{4} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x^2 + 2} + 2 = 2$$

On a : $\lim_0 f = 2 = f(0)$ d'où f est continue en 0 .

2°/

$$a) \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \left(\frac{\frac{x^2}{x^2 + 2}}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{x^2 + 2} = 0 = f'_g(0)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(x^2 + 4 - 4)}{x(\sqrt{x^2 + 4} + 2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4} + 2} = 0 = f'_d(0)$$

On a : $f'_g(0) = f'_d(0)$ d'où f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$

b) C_f admet au points A(0,2) une tangente horizontale d'équation

$$D : y = f'(0)x + f(0) = 2$$

Solution 2:

$$1^\circ / \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \sqrt{x-1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x^2 - 2}{x^2 + 1} = 0$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = f(1)$ d'où f est continue en 1

2°/

a)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sqrt{x-1}}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{1}{\sqrt{x-1}} = +\infty$$

f est dérivable à droite en 1

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)(x - 1)} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2(x+1)}{x^2 + 1} = 2$$

f n'est pas dérivable à gauche en 1 et $f'_g(1) = 2$

b) C_f admet à gauche en 1, une demi tangente verticale

$$\text{d'équation } \begin{cases} y = 2(x-1) \\ x \leq 1 \end{cases}$$

C_f admet à droite en 1, une demi tangente d'équation $\begin{cases} x = 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$

Solution 3 :

1°/ Pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\text{On a : } |x| + x^2 \geq 0$$

D'où $Df = \mathbb{R}$

$$2^\circ / * \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + |x|}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + x}{x \sqrt{x^2 + x}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+x}} = +\infty$$

$$* \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2 - x}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(x-1)}{\sqrt{x^2+x}} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x(x-1)}{x\sqrt{x^2+x}} = -\infty$$

f non dérivable en 0

Solution 4 :

$$1^\circ / \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2}{x^2(\sqrt{x^2+1}+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+1} = \frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = 2b = f(0)$$

Pour que f soit continue en 0, il faut que $2b = \frac{1}{2}$ d'où $b = \frac{1}{4}$

2°/

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + ax + 2b - 2b}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x+a)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+a) = a$$

D'où $f'_g(0) = a$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x^2} - \frac{1}{2}}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2\sqrt{x^2+1} - (2+x^2)}{2x^3} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{4(x^2+1) - (2+x^2)^2}{2x^3(2\sqrt{x^2+1} + 2 + x^2)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x}{2[2\sqrt{x^2+1}+2+x^2]} = 0 = f'_d(0)$$

D'où $a = 0$

Solution 5 :

1°/ f est une fonction polynôme d'où f est dérivable sur $\mathbb{R}$

2°/

a) $f'(x) = 3x^2 + 2$; $f''(x) = 6x$

b) $f''(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

x		0
$f''(x)$		0
		$- \quad +$

f'' s'annule en 0, en changeant de signe. d'où Cf a un seul point d'inflexion $I(0, -1)$

3°/ $T: y = f'(0)x + f(0)$

$$y = 2x - 1$$

Solution 6 :

1°/ Montrons que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x$

$$1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \Leftrightarrow \cos x + \frac{x^2}{2} - 1 \geq 0$$

Soit $f(x) = \cos x + \frac{x^2}{2} - 1$, $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

f est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f'(x) = -\sin x + x$

f' est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$ et $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $f''(x) = -\cos x + 1 \geq 0$ car

$$-1 \leq \cos x \leq 1.$$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f''(x)$	0	+
$f'(x)$	0	→
$f(x)$	0	→

D'après ce tableau, 0 est un minimum absolu de f sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, donc

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], f(x) \geq 0 \text{ et par suite : } \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], 1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x.$$

• Montrons que $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{\pi}$:

$$\cos x \leq 1 - \frac{x^2}{\pi} \Leftrightarrow \cos x + \frac{x^2}{\pi} - 1 \leq 0.$$

$$\text{Soit } g(x) = \cos x + \frac{x^2}{\pi} - 1, x \in [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$g'(x) = -\sin x + \frac{2x}{\pi}; g' \text{ est dérivable sur } [0, \frac{\pi}{2}]$$

$$g''(x) = -\cos x + \frac{2}{\pi}$$

$$g^{(2)} \text{ est dérivable sur } [0, \frac{\pi}{2}] \text{ donc } g^{(3)}(x) = \sin x$$

x	0	β	$\frac{\pi}{2}$
$g^{(3)}(x)$	0	+	
$g^{(2)}(x)$	$\frac{2}{\pi} - 1$	0	$\frac{2}{\pi}$
$g'(x)$	0	$g'(\beta)$	0
$g(x)$	0		

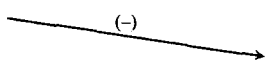
d'après le tableau des variations de g , 0 est un maximum absolu sur

$$[0, \frac{\pi}{2}] \text{ donc } \forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{\pi}.$$

Conclusion : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, on a : $1 - \frac{x^2}{2} \leq \cos x \leq 1 - \frac{x^2}{\pi}$.

2°/• Soit $k(x) = x - \frac{x^3}{6} - \sin x$; k est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$.

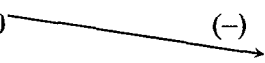
$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $k'(x) = 1 - \frac{x^2}{2} - \cos x \leq 0$ (d'après 1°/).

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$k'(x)$		-
$k(x)$	0	(-) 

donc $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $k(x) \leq 0 \Rightarrow x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x$.

• Soit $h(x) = \sin x - x + \frac{x^3}{3\pi}$

h est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}]$, $h'(x) = \cos x - 1 + \frac{x^2}{\pi} \leq 0$ (d'après 1°/)

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$		-
$h(x)$	0	(-) 

donc $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $h(x) \leq 0$ et par suite $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $\sin x \leq x - \frac{x^3}{3\pi}$.

Conclusion : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{3\pi}$.

3°/ On a : $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}]$, $x - \frac{x^3}{6} \leq \sin x \leq x - \frac{x^3}{3\pi} \Rightarrow -\frac{x^3}{6} \leq \sin x - x \leq -\frac{x^3}{3\pi}$

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}], -\frac{x}{6} \leq \frac{\sin x - x}{x^2} \leq -\frac{x}{3\pi}$$

On a : $\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x}{6} = \lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x}{3\pi} = 0$ donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$.

Cherchons $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x - x}{x^2}$.

On pose $t = -x$. Lorsque $x \rightarrow 0^- \Rightarrow t \rightarrow 0^+$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(-t) + t}{t^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-\sin t + t}{t^2} = - \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin t - t}{t^2} = 0$$

Donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$.

Conclusion : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^2} = 0$.

Solution 7 :

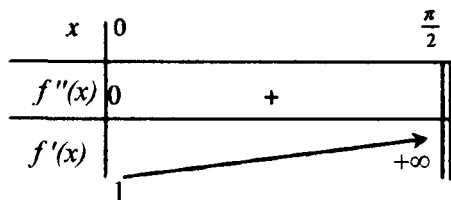
1°/ Soit $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \tan x$

f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$,

$$f'(x) = 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

f' est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

et $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $f''(x) = 2 \tan x (1 + \tan^2 x)$



Soient a et b tels que $0 < a < b < \frac{\pi}{2}$.

f est dérivable sur $[a, b]$ et $\forall x \in [a, b]$, $f'(a) \leq f'(x) \leq f'(b)$

(car f' est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$)

$$\Rightarrow \frac{1}{\cos^2 a} \leq f'(x) \leq \frac{1}{\cos^2 b}$$

Donc d'après le théorème des inégalités des accroissements finis :

$$(b-a)f'(a) \leq f(b) - f(a) \leq f'(b)(b-a)$$

$$\Rightarrow \frac{(b-a)}{\cos^2 a} \leq \tan(b) - \tan(a) \leq \frac{(b-a)}{\cos^2 b}$$

2°/ Soit $g(x) = \sqrt{x}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

g' est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$, $g''(x) = \frac{-1}{4\sqrt{x}^3} < 0$

Donc g' est strictement décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

Soit $\alpha > 0$, $a \leq x \leq a+1 \Rightarrow g'(a+1) \leq g'(x) \leq g'(a)$

$$\Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{(a+1)}} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} g \text{ est dérivable sur } [a, a+1] \\ \forall x \in]0, +\infty[, \frac{1}{2\sqrt{(a+1)}} \leq g'(x) \leq \frac{1}{2\sqrt{a}} \end{array} \right. \text{ d'où } \frac{1}{2\sqrt{(a+1)}} \leq \sqrt{(a+1)} - \sqrt{a} \leq \frac{1}{2\sqrt{a}}$$

3°/ Soit $h : [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}], x \mapsto \cotg x$

h est dérivable sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ et $\forall x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$,

$$h'(x) = -1 - \cotg^2 x = \frac{-1}{\sin^2 x}$$

h' est dérivable sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ et $\forall x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$,

$$h''(x) = \frac{2 \sin x \cos x}{\sin^4 x} = \frac{2 \cos x}{\sin^3 x} \geq 0$$

Donc h' est strictement croissante sur $[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}]$ donc $\frac{\pi}{4} \leq x \leq \frac{\pi}{2} \Rightarrow$

$$h'(\frac{\pi}{4}) \leq h'(x) \leq h'(\frac{\pi}{2}) \Rightarrow -2 \leq h'(x) \leq -1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{h est dérivable sur } [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}] \\ \forall x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}], -2 \leq h'(x) \leq -1 \end{array} \right.$$

D'après le théorème des inégalités des accroissements finis on a :

$$\forall x \in [\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}], -2(x - \frac{\pi}{4}) \leq h(x) - h(\frac{\pi}{4}) \leq -1.(x - \frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - 2x \leq \cot gx - 1 \leq \frac{\pi}{4} - x$$

Solution 8 :

$$\begin{aligned} 1^\circ / \bullet f(x) - 1 &= \sqrt{x^2 + 8} - x - 1 = \sqrt{x^2 + 8} - (x + 1) = \frac{x^2 + 8 - (x + 1)^2}{\sqrt{x^2 + 8} + x + 1} \\ &= \frac{7 - 2x}{\sqrt{x^2 + 8} + x + 1} \end{aligned}$$

$$\text{or } \forall x \in [1, 2] \text{ on a : } 2 \leq 2x \leq 4 \Leftrightarrow -4 \leq -2x \leq -2 \Leftrightarrow 3 \leq 7 - 2x \leq 5$$

$$\text{et comme } \forall x \in [1, 2], \sqrt{x^2 + 8} + x + 1 > 0 \text{ d'où } f(x) - 1 \geq 0$$

$$\text{et par suite } f(x) \geq 1.$$

$$\bullet f(x) - 2 = \sqrt{x^2 + 8} - (x + 2) = \frac{x^2 + 8 - (x + 2)^2}{\sqrt{x^2 + 8} + x + 2} = \frac{4 - 4x}{\sqrt{x^2 + 8} + x + 2}$$

$$\text{or } 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 4 \leq 4x \leq 8 \Rightarrow 4 - 4x \leq 0 \text{ d'où } f(x) - 2 \leq 0.$$

$$\text{Conclusion : } \forall x \in [1, 2], 1 \leq f(x) \leq 2.$$

$$\bullet f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 8}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 8}}{\sqrt{x^2 + 8}} = \frac{-f(x)}{\sqrt{x^2 + 8}}$$

$$\Rightarrow |f'(x)| = \frac{|f(x)|}{\sqrt{x^2 + 8}} = \frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 8}} \text{ car } f(x) > 0$$

$$\text{or } 1 \leq f(x) \leq 2 \text{ et comme } 1 \leq x \leq 2 \Rightarrow 1 \leq x^2 \leq 4 \Rightarrow 9 \leq x^2 + 8 \leq 12$$

$$3 \leq \sqrt{x^2 + 8} \leq 2\sqrt{3} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{3}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2 + 8}} \leq \frac{1}{3}$$

On a donc : $\frac{f(x)}{\sqrt{x^2+8}} \leq \frac{2}{3}$

Conclusion : $\forall x \in [1,2], |f'(x)| \leq \frac{2}{3}$.

2°/a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}, 1 \leq U_n \leq 2$.

• Pour $n=0$, $U_0=1 \Rightarrow 1 \leq U_0 \leq 2$

• Supposons que pour un entier donné n , $1 \leq U_n \leq 2$ et montrons que $1 \leq U_{n+1} \leq 2$.

On a : $U_n \in [1,2]$ or pour tout $x \in [1,2]$, $1 \leq f(x) \leq 2 \Rightarrow$

$1 \leq f(U_n) \leq 2 \Rightarrow 1 \leq U_{n+1} \leq 2$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbf{N}, 1 \leq U_n \leq 2$.

b) on a :

$$\begin{cases} f \text{ est dérivable sur } [1,2] \\ \forall x \in [1,2], |f'(x)| \leq \frac{2}{3} \\ \forall n \in \mathbf{N}, U_n \in [1,2] \end{cases} \quad \text{donc, d'après le théorème des}$$

inégalités des accroissements finis :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \left| f(U_n) - f\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\right) \right| \leq \frac{2}{3} \left| U_n - 2\sqrt{\frac{2}{3}} \right|$$

or $f(U_n) = U_{n+1}$ et $f\left(2\sqrt{\frac{2}{3}}\right) = \sqrt{\frac{32}{3}} - 2\sqrt{\frac{2}{3}} = 4\sqrt{\frac{2}{3}} - 2\sqrt{\frac{2}{3}} = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$

Conclusion : $\forall n \in \mathbf{N}, \left| U_{n+1} - 2\sqrt{\frac{2}{3}} \right| \leq \frac{2}{3} \left| U_n - 2\sqrt{\frac{2}{3}} \right|$.

3°/a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}, \left| U_n - 2\sqrt{\frac{2}{3}} \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$.

• Pour $n=0$, $U_0=1 \Rightarrow \left| 1 - 2\sqrt{\frac{2}{3}} \right| \leq 1$

• Supposons que pour un entier n donné, $\left| U_n - 2\sqrt{\frac{2}{3}} \right| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

et montrons que $\left| U_{n+1} - 2\sqrt{\frac{2}{3}} \right| \leq \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1}$

On a : $\left| U_n - 2\sqrt{\frac{2}{3}} \right| \leq \left(\frac{2}{3} \right)^n \Rightarrow \frac{2}{3} \left| U_n - 2\sqrt{\frac{2}{3}} \right| \leq \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1}$

Or $\left| U_{n+1} - 2\sqrt{\frac{2}{3}} \right| \leq \frac{2}{3} \left| U_n - 2\sqrt{\frac{2}{3}} \right| \Rightarrow \left| U_{n+1} - 2\sqrt{\frac{2}{3}} \right| \leq \left(\frac{2}{3} \right)^{n+1}$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, \left| U_n - 2\sqrt{\frac{2}{3}} \right| \leq \left(\frac{2}{3} \right)^n$.

b) On a : $\forall n \in \mathbb{N}, \left| U_n - 2\sqrt{\frac{2}{3}} \right| \leq \left(\frac{2}{3} \right)^n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3} \right)^n = 0$ car $-1 < \frac{2}{3} < 1$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 2\sqrt{\frac{2}{3}}$.

Solution 9 :

1°/ f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{8x}{(x^2 + 3)^2}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	1		1

2°/a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, -\frac{1}{3} \leq U_n \leq 0$.

On a : $U_0 = 0$ donc $-\frac{1}{3} \leq U_0 \leq 0$

Supposons que $-\frac{1}{3} \leq U_n \leq 0$ et montrons que $-\frac{1}{3} \leq U_{n+1} \leq 0$.

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}_-$ donc :

$$-\frac{1}{3} \leq U_n \leq 0 \Rightarrow f(0) \leq f(U_n) \leq f\left(-\frac{1}{3}\right)$$

or $f(0) = -\frac{1}{3}$, $f(-\frac{1}{3}) = -\frac{2}{7}$ d'où $-\frac{1}{3} \leq U_{n+1} \leq 0$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $-\frac{1}{3} \leq U_n \leq 0$.

b) $f'(x) = \frac{8x}{(x^2+3)^2}$. Etudions les variations de f' sur $[-\frac{1}{3}, 0]$.

$$f''(x) = \frac{8(x^2+3)^2 - 8x(4x)(x^2+3)}{(x^2+3)^4} = \frac{24(1-x^2)}{(x^2+3)^2}$$

x	$-\frac{1}{3}$	0
$f''(x)$		+
$f'(x)$		0
	$-\frac{27}{98}$	

d'où $|f'(x)| \leq \frac{27}{98}$.

$$3^\circ / |W_{n+1} - V_{n+1}| = |U_{2n+3} - U_{2n+2}| = |f(U_{2n+2}) - f(U_{2n+1})|$$

On a : f est dérivable sur $[-\frac{1}{3}, 0]$ et $\forall x \in [-\frac{1}{3}, 0]$, $|f'(x)| \leq \frac{27}{98}$ donc

d'après le théorème des inégalités des accroissements finis on a :

$$\forall X \in [-\frac{1}{3}, 0] \text{ et } \forall Y \in [-\frac{1}{3}, 0] \text{ on a : } |f(X) - f(Y)| \leq \frac{27}{98} |X - Y|$$

$$\text{Donc } |f(U_{2n+2}) - f(U_{2n+1})| \leq \frac{27}{98} |U_{2n+2} - U_{2n+1}| \Rightarrow$$

$$|W_{n+1} - V_{n+1}| \leq \frac{27}{98} |U_{2n+2} - U_{2n+1}|$$

$$\text{Or } |U_{2n+2} - U_{2n+1}| = |f(U_{2n+1}) - f(U_{2n})| \leq \frac{27}{98} |U_{2n+1} - U_{2n}|$$

$$\text{Donc } |W_{n+1} - V_{n+1}| \leq \left(\frac{27}{98}\right)^2 |W_n - V_n|.$$

4°/ Montrons que $\forall n \in \mathbf{N}, |W_n - V_n| \leq \left(\frac{27}{98}\right)^{2n} |W_0 - V_0|$

• pour $n=0$: $|W_0 - V_0| \leq \left(\frac{27}{98}\right)^0 |W_0 - V_0|$

• Supposons que $|W_n - V_n| \leq \left(\frac{27}{98}\right)^{2n} |W_0 - V_0|$ et montrons que

$$|W_{n+1} - V_{n+1}| \leq \left(\frac{27}{98}\right)^{2n+2} |W_0 - V_0|$$

$$|W_{n+1} - V_{n+1}| \leq \left(\frac{27}{98}\right)^2 |W_n - V_n| \leq \left(\frac{27}{98}\right)^2 \left(\frac{27}{98}\right)^{2n} |W_0 - V_0|$$

$$\text{d'où } |W_{n+1} - V_{n+1}| \leq \left(\frac{27}{98}\right)^{2n+2} |W_0 - V_0|.$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbf{N}, |W_n - V_n| \leq \left(\frac{27}{98}\right)^{2n} |W_0 - V_0|.$

b) On a : $-\frac{1}{3} \leq V_n \leq 0$

Etudions le sens des variations de la suite (V_n) .

$$\text{On a : } V_0 = U_0 = 0, \quad V_1 = U_2 = f(U_1) = f \circ f(U_0) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{-27}{98}.$$

$$\text{On a : } V_0 > V_1$$

Supposons que pour un entier donné n , $V_n > V_{n+1}$ et montrons que

$$V_{n+1} > V_{n+2}.$$

On a : $V_n > V_{n+1}$ et f est strictement décroissante sur $[-\frac{1}{3}, 0]$ donc

$$f(V_n) < f(V_{n+1}).$$

$$\text{Or } f(V_n) = f(U_{2n}) = U_{2n+1}$$

$f(V_{n+1}) = f(U_{2n+2}) = U_{2n+3}$ donc $U_{2n+1} < U_{2n+3}$ et par suite

$f(U_{2n+1}) > f(U_{2n+3})$ d'où $U_{2n+2} > U_{2n+4}$ donc $V_{n+1} > V_{n+2}$.

d'où (V_n) est une suite décroissante

$$* W_n = f(V_n)$$

$W_{n+1} - W_n = f(V_{n+1}) - f(V_n)$ or $V_{n+1} < V_n$ et f est strictement décroissante

d'où : $f(V_{n+1}) > f(V_n)$ d'où $W_{n+1} > W_n$

conclusion : (W_n) est une suite croissante

$$\text{et comme } \lim_{n \rightarrow +\infty} (V_n - W_n) = 0 \quad (|W_n - V_n| \leq \left(\frac{27}{98}\right)^{2n} |W_n - V_n|)$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{27}{98}\right)^{2n} = 0)$$

d'où (V_n) et (W_n) sont deux suites adjacentes et par suite elles convergent vers la même limite ℓ .

$$5^\circ / \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{2n} = \ell \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} U_{2n+1} = \ell \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell \quad (\text{théorème de cours})$$

Solution 10 :

1°/ $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 1 \neq 0$. f est continue, dérivable sur $\mathbf{R}$

$$\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = \frac{(2x+1)(x^2+1) - 2x(x^2+x+1)}{(x^2+1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^3 + 2x + x^2 + 1 - 2x^3 - 2x^2 - 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-x^2 + 1}{(x^2+1)^2}$$

x	$-\infty$	-1		1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	1			$\frac{3}{2}$	
		$\searrow$	$\nearrow$	$\searrow$	
		$\frac{1}{2}$			

2°/a) $\forall x \in \mathbf{R}$ on a : $(2 \times 0 - x) = -x \in \mathbf{R}$.

$$\bullet f(-x) = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$$

$$\bullet 2 \times 1 - f(x) = 2 - \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} = \frac{2x^2 + 2 - x^2 - x - 1}{x^2 + 1} = \frac{x^2 - x + 1}{x^2 + 1}$$

On a : $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(-x) = 2 \times 1 - f(x)$.

Conclusion : $A(0,1)$ est un centre de symétrie de C_f .

b) $T : y = f'(0)(x-0) + f(0)$ or $f(0) = 1$ et $f'(0) = 1$ d'où

$$T : y = x + 1.$$

$$\begin{aligned} 3^\circ/a) \text{ Soit } \varphi(x) &= f(x) - (x+1) = \frac{x^2 + x + 1}{x^2 + 1} - (x+1) \\ &= \frac{x^2 + x + 1 - (x^3 + x + x^2 + 1)}{x^2 + 1} \end{aligned}$$

$$\text{On a : } \varphi(x) = \frac{-x^3}{x^2 + 1}$$

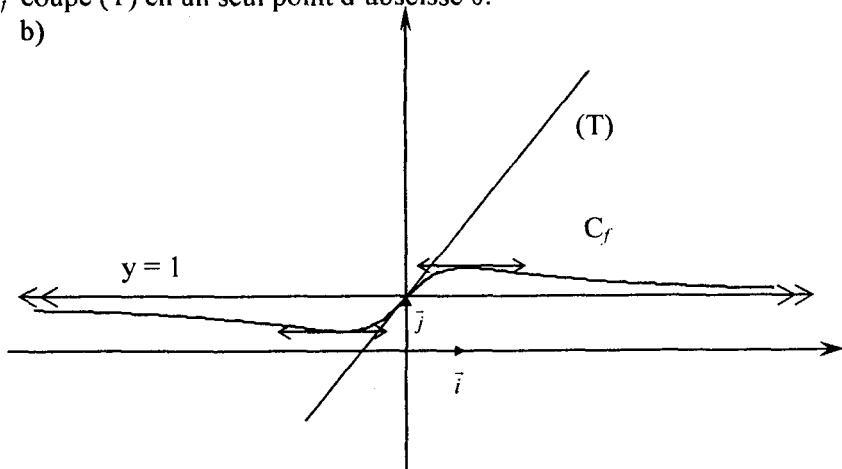
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\varphi(x)$	$+$	0	$-$

C_f est au dessus de (T) sur $]-\infty, 0[$.

C_f est au dessous de (T) sur $]0, +\infty[$.

C_f coupe (T) en un seul point d'abscisse 0.

b)



Solution 11 :**A. 1°/a) $D_f = \mathbf{R}$** f est dérivable sur $\mathbf{R}$ car f est une fonction rationnelle.

$$\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = \frac{(3x^2 + 4x + 3)(x^2 + 3) - 2x(x^3 + 2x^2 + 3x - 2)}{(x^2 + 3)^2}$$

$$\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = \frac{x^4 + 6x^2 + 16x + 9}{(x^2 + 3)^2}$$

$$\text{or } (x+1)^2(x^2 - 2x + 9) = (x^2 + 2x + 1)(x^2 - 2x + 9) = x^4 + 6x^2 + 16x + 9$$

$$\text{d'où } \forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = \frac{(x+1)^2(x^2 - 2x + 9)}{(x^2 + 3)^2}$$

2°/

x	$-\infty$	-1	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	-1	$+\infty$

$$3^\circ/\text{a) } ax + b + \frac{c}{x^2 + 3} = \frac{ax^3 + bx^2 + 3ax + 3b + c}{x^2 + 3} = f(x)$$

$$\text{d'où } \begin{cases} a = 1 \\ b = 2 \\ c = -8 \end{cases} \quad \text{d'où } \forall x \in \mathbf{R}, f(x) = x + 2 - \frac{8}{x^2 + 3}.$$

$$\text{b) } f(x) - (x + 2) = \frac{-8}{x^2 + 3} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-8}{x^2 + 3} = 0$$

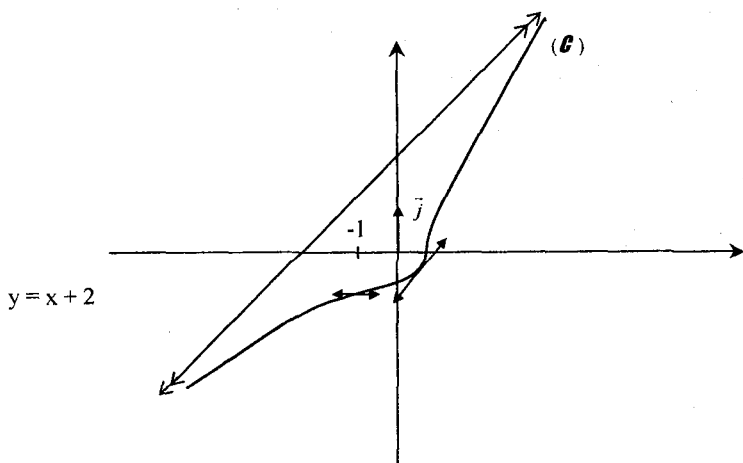
donc la droite $\Delta : y = x + 2$ est une asymptote oblique à $(\mathcal{C})$ au voisinage de $\pm\infty$.

$$4^\circ/ h(x) = f(x) - y = f(x) - (x + 2) = \frac{-8}{x^2 + 3} < 0 \quad \text{d'où } (\mathcal{C}) \text{ est au dessous de } \Delta.$$

$$5^\circ/\text{a) } T : y = f'(0)x + f(0) \text{ or } f(0) = \frac{-2}{3} \text{ et } f'(0) = 1 \text{ donc } T : y = x - \frac{2}{3}.$$

b) $\Delta : y = x + 2$. T et Δ ont même coefficient directeur donc $T \parallel \Delta$.

c) Soit $k(x) = f(x) - (x - \frac{2}{3}) = \frac{8x^2}{3(x^2 + 3)} \geq 0$ donc **(C)** est au dessus de (T).



B. 1°/ Pour $n = 0$ on a : $u_0 = \frac{-1}{2}$ d'où $-1 \leq u_0 \leq 0$.

Soit $n \in \mathbf{N}$, supposons que $-1 \leq u_n \leq 0$ et montrons que $-1 \leq u_{n+1} \leq 0$.

On a : $\begin{cases} -1 \leq u_n \leq 0 \\ \text{et } f \text{ est strictement croissante sur } \mathbf{R} \end{cases}$, donc :

$$f(-1) \leq f(u_n) \leq f(0) \text{ or } f(-1) = -1 \text{ et } f(0) = \frac{-2}{3}$$

$$\text{d'où } -1 \leq u_{n+1} \leq \frac{-2}{3} \leq 0.$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbf{N}, -1 \leq u_n \leq 0$.

$$2^\circ/ u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^3 + 2u_n^2 + 3u_n - 3}{u_n^2 + 3} - u_n = \frac{2(u_n - 1)(u_n + 1)}{u_n^2 + 3}$$

or $-1 \leq u_n \leq 0 \Rightarrow u_n - 1 < 0$ et $u_n + 1 \geq 0$ donc $\forall n \in \mathbf{N}, u_{n+1} - u_n \leq 0$.

Conclusion : (u_n) est une suite décroissante.

3°/ (u_n) est une suite décroissante, minorée par -1 donc (u_n) est convergente.

Soit $l = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.

On a : $u_{n+1} = f(u_n)$ et f est continue en l donc $f(l) = l$.

$$\frac{l^3 + 2l^2 + 3l - 2}{l^2 + 3} = l \Leftrightarrow l^3 + 2l^2 + 3l - 2 = l^3 + 3l \Leftrightarrow l = \pm 1 \text{ or}$$

$$-1 \leq u_n \leq 0 \Rightarrow -1 \leq l \leq 0 \text{ d'où } l = -1.$$

Conclusion : (u_n) est convergente et $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = -1$.

Solution 12 :

1°/• La fonction $f_1 : x \mapsto \sqrt{x^2 + 4}$ est continue sur $\mathbf{R}$ et en particulier sur $\mathbf{R}_+$.

• La fonction $f_2 : x \mapsto \frac{2}{x+1} - x$ est continue sur $\mathbf{R} \setminus \{-1\}$ et en particulier sur $\mathbf{R}_+^*$.

• $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 2 = f(0)$ et $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \sqrt{4} = 2 = f(0)$ donc f est continue en 0.

Conclusion : f est continue sur $\mathbf{R}$.

$$\begin{aligned} 2^\circ/a) \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\sqrt{x^2 + 4} - 2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x^2}{x(\sqrt{x^2 + 4} + 2)} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4} + 2} = 0 \end{aligned}$$

donc f est dérivable à gauche en 0 et $f'_g(0) = 0$.

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{2}{x+1} - x - 2}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x^2 - 3x}{x(x+1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(-x-3)}{x(x+1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-x-3}{x+1} = -3 \end{aligned}$$

donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = -3$.

• On a : $f'_g(0) \neq f'_d(0)$ donc f n'est pas dérivable en 0.

b) La courbe de f admet 2 demi tangentes (le point d'abscisse 0 est un point anguleux)

$$T_1: \begin{cases} y = f'_g(0)x + f(0) = 2 \\ x \leq 0 \end{cases} \quad \text{et} \quad T_2: \begin{cases} y = f'_d(0)x + f(0) = -3x + 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$3^\circ/a) \bullet \forall x \in]-\infty, 0[, f(x) = \sqrt{x^2 + 4} \Rightarrow f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$$

$$\Rightarrow \forall x \in]-\infty, 0[, f'(x) < 0.$$

x	$-\infty$	0
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	2

$$\bullet \forall x \in]0, +\infty[, f(x) = \frac{2}{x+1} - x \Rightarrow f'(x) = \frac{-2}{(x+1)^2} - 1 < 0$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	2	$-\infty$

d'où le tableau des variations de f sur $\mathbf{R}$:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	$\parallel$	-
$f(x)$	$+\infty$	2	$-\infty$

$$b) \bullet \text{ On a : } \forall x \in]0, +\infty[, f(x) = \frac{2}{x+1} - x \text{ et comme } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2}{x+1} = 0$$

donc la droite $\Delta : y = -x$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

$$\bullet \text{ On a : } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 4}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-x \sqrt{1 + \frac{4}{x^2}}}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\sqrt{1 + \frac{4}{x^2}} = -1$$

et

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) + x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 4} + x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 + 4 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4} - x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4} - x} = 0$$

donc la droite $\Delta : y = -x$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $-\infty$.

4°/ Etudions le signe de $f(x) + x$:

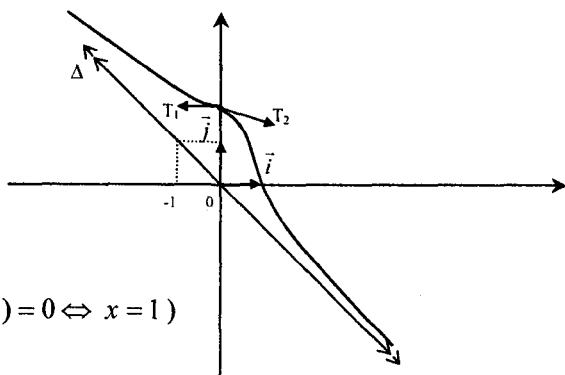
$$\bullet \forall x \in]0, +\infty[, f(x) + x = \frac{2}{x+1} > 0 \Rightarrow C_f \text{ est au dessus de } \Delta \text{ sur }]0, +\infty[.$$

$$\bullet \forall x \in]-\infty, 0],$$

$$f(x) + x = \sqrt{x^2 + 4} + x = \frac{x^2 + 4 - x^2}{\sqrt{x^2 + 4} - x} = \frac{4}{\sqrt{x^2 + 4} - x} > 0 \text{ donc } C_f \text{ est au dessus de } \Delta \text{ sur }]-\infty, 0].$$

Conclusion : C_f est au dessus de Δ .

$$5^\circ/ \text{ Demi tangentes : } T_1 : \begin{cases} y = 2 \\ x \leq 0 \end{cases} \text{ et } T_2 : \begin{cases} y = -3x + 2 \\ x \geq 0 \end{cases}$$



$$(f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 1)$$

Solution 13 :1°/ $D_f = \mathbb{R}_+$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \frac{1}{x\sqrt{x+1}} + 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2\sqrt{x+1} + x + x\sqrt{x+1}}{x(x\sqrt{x+1})}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{x+1} + \sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}} = 1$$

d'où f est dérivable à droite en $x_0 = 0$ et $f'_d(0) = 1$.2°/ $\Delta : y = f'(0)(x-0) + f(0)$ or $f(0) = -1$ et $f'(0) = 1$ d'où $\Delta : y = x - 1$.

$$3^\circ/ h(x) = f(x) - y = x - \frac{1}{x\sqrt{x+1}} - x + 1 = \frac{-1 + x\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}}$$

$$\forall x \geq 0 : h(x) = \frac{x\sqrt{x}}{x\sqrt{x+1}} \geq 0 \text{ d'où } C_f \text{ est au dessus de } \Delta.$$

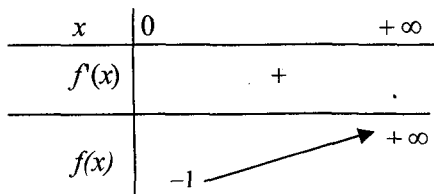
$$4^\circ/a) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{x\sqrt{x+1}}\right) = 0 \text{ d'où } D : y = x \text{ est une asymptote oblique}$$

à C_f au voisinage de $+\infty$.

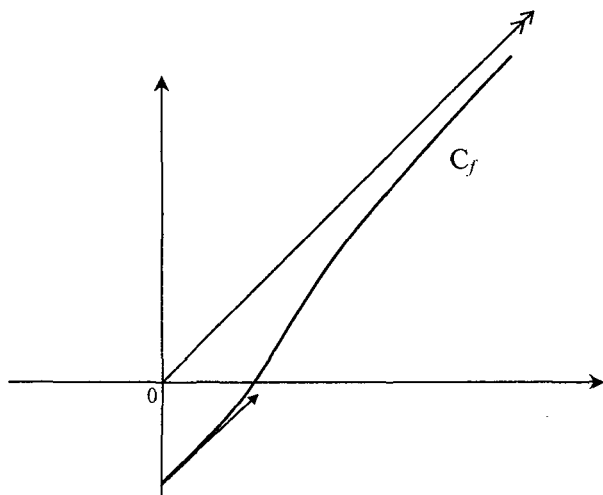
$$b) k(x) = f(x) - y = f(x) - x = \frac{-1}{x\sqrt{x+1}} < 0 \text{ d'où } C_f \text{ est au dessous}$$

de D .

$$5^\circ/a) \forall x \geq 0 : f'(x) = 1 + \frac{\frac{3}{2}\sqrt{x}}{(x\sqrt{x+1})^2} > 0.$$



b)

**Solution 14:**

1°/ f est définie, continue, dérivable sur $[0, \pi]$,

$$\forall x \in [0, \pi] : f'(x) = \frac{-1}{2} \sin x$$

x	0		π
$f'(x)$	0	-	0
$f(x)$	$\frac{3}{2}$	$\swarrow$ $\frac{1}{2}$	

2°/ f' est dérivable sur $[0, \pi]$ et $\forall x \in [0, \pi] : f''(x) = \frac{-1}{2} \cos x$.

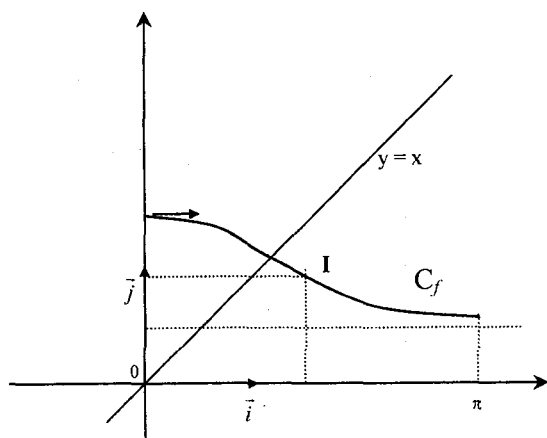
x	0	$\pi/2$	π
f''	-	0	+

f'' s'annule une seule fois sur $[0, \pi]$ en changeant de signe donc C_f

admet un seul point d'inflexion $I(\frac{\pi}{2}, f(\frac{\pi}{2}))$ or $f(\frac{\pi}{2}) = 1$ d'où $I(\frac{\pi}{2}, 1)$

est le seul point d'inflexion de C_f .

3°/


Solution 15 :

 1°/ f est définie, continue et dérivable sur $\mathbb{R}$ car $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 + 1 > 0$

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{\sqrt{x^2 + 1} - \frac{x(x+1)}{\sqrt{x^2 + 1}}}{x^2 + 1} = \frac{1-x}{(x^2 + 1)^{3/2}}$$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f'(x)$		+		-	
$f(x)$			$\sqrt{2}-1$		
			-2		0

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1 + \frac{1}{x})}{|x| \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} - 1 = -2$$

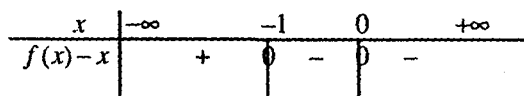
$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{x}}{-\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} - 1 = 0$$

2°/

$$a) \quad T: y = f'(0)x + f(0) \Rightarrow y = x$$

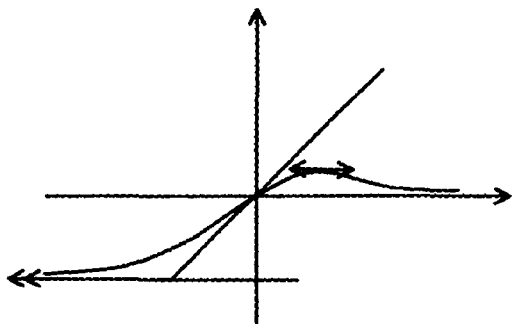
$$b) \quad f(x) - x = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 - x = (x+1) \left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} - 1 \right)$$

$$\Rightarrow f(x) - x = \frac{(x+1)(1-\sqrt{x^2+1})}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{-(x+1)x^2}{(1+\sqrt{x^2+1})\sqrt{x^2+1}}$$



- Sur $] -\infty, -1[$ on a : $f(x) - x > 0$ donc C_f est au dessus de T .
- Sur $] -1, 0[\cup] 0, +\infty [$ on a : $f(x) - x < 0$ donc C_f est au dessous de T .
- $C_f \cap T = \{ O(0,0) ; I(-1, -1) \}$.

3°/



4°/

a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, -1 < U_n < 0$

- Pour $n = 0$, $U_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow -1 < U_0 < 0$
- Supposons que pour un entier donné n , $-1 < U_n < 0$ et montrons que $-1 < U_{n+1} < 0$.

On a : $-1 < U_n < 0$ et comme f est strictement croissante sur $[-1, 0]$ alors

$$f(-1) < f(U_n) < f(0) \text{ or } f(-1) = -1 \text{ et } f(0) = 0$$

d'où $-1 < U_{n+1} < 0$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, -1 < U_n < 0$.

Etudions le sens de variations de la suite (U_n) .

Soit $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n$

Or $f(x) - x < 0$ pour tout réel $x \in]-1, 0[$ et comme $U_n \in]-1, 0[$ donc $f(U_n) - U_n < 0$ et par suite $U_{n+1} - U_n < 0$ d'où (U_n) est une suite décroissante.

Conclusion : (U_n) est une suite décroissante minorée par -1 donc (U_n) est convergente.

$$U_{n+1} = f(U_n) ; \lim_{n \rightarrow \infty} U_n = l$$

f est continue sur $\mathbb{R}$ en particulier en l donc $f(l) = l$

$$\Rightarrow \frac{l+1}{\sqrt{l^2+1}} = l+1 \Rightarrow (l+1)[1 - \sqrt{l^2+1}] = 0 \Rightarrow l = -1$$

d'où $l = 0$

Or on a : $U_0 = -\frac{1}{2}$ et (U_n) est une suite décroissante donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, U_n \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow l \leq -\frac{1}{2} \text{ d'où } l = -1.$$

5°/

$$a) U_{n+1} + 1 = \frac{U_n + 1}{\sqrt{U_n^2 + 1}}$$

$$\text{Or on a : } -1 \leq U_n \leq -\frac{1}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} \leq U_n^2 < 1 \Rightarrow \frac{5}{4} \leq U_n^2 + 1 < 2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{U_n^2 + 1} \leq \frac{4}{5} \Rightarrow 0 < \frac{1}{\sqrt{U_n^2 + 1}} \leq \sqrt{\frac{4}{5}} \text{ et comme } -1 < U_n < 0$$

$$\Rightarrow U_{n+1} + 1 > 0 \text{ d'où } 0 < \frac{U_n + 1}{\sqrt{U_n^2 + 1}} \leq \frac{2\sqrt{5}}{5} (U_n + 1)$$

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_{n+1} + 1 \leq \frac{2\sqrt{5}}{5} (U_n + 1)$$

$$b) \text{ Montrons par récurrence que } \forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_{n+1} \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \right)^n$$

- Pour $n = 0$ on a : $U_0 = -\frac{1}{2} \Rightarrow 0 < U_0 + 1 \leq \frac{1}{2}$

- Supposons que pour un entier donné n : $0 < U_n + 1 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \right)^n$

et montrons que $0 < U_{n+1} + 1 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \right)^{n+1}$

on a : $0 < U_{n+1} + 1 \leq \frac{2\sqrt{5}}{5} (U_n + 1) \Rightarrow 0 < U_{n+1} + 1 \leq \frac{2\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \right)^n$

$$\Rightarrow 0 < U_{n+1} + 1 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \right)^{n+1}$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n + 1 \leq \frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \right)^n$

c) On a : $-1 < \frac{2\sqrt{5}}{5} < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \right)^n = 0$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} (U_n + 1) = 0 \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -1$

Solution 16 :

A)

1°/ a) $\forall x \in \mathbb{R}$, on a : $x^2 + 1 > 0$ d'où f est définie sur $\mathbb{R}$.

$\forall x \in \mathbb{R}$, on a $-x \in \mathbb{R}$, $f_n(-x) = (-1)^n f_n(x)$

- Si n est pair, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(-x) = f_n(x)$ d'où f_n est une fonction paire.

- Si n est impair, on a : $\forall x \in \mathbb{R}$, $f_n(-x) = -f_n(x)$ d'où f_n est une fonction impaire.

b) • Si $n = 1$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 1$

D'où (C_1) admet au voisinage de $+\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ et au voisinage de $-\infty$ une asymptote horizontale d'équation $y = -1$.

$$\bullet \text{ Si } n = 2, f_n(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 1}}, \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = 1; \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\frac{1}{x}}{(1 + \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}) \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = 0$$

D'où $y = x$ est une asymptote oblique à (C_2) au voisinage de $+\infty$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = +\infty; = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) + x = 0$$

D'où $y = -x$ est une asymptote à (C_2) au voisinage de $-\infty$.

$$\bullet \text{ Si } n \geq 3, \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{n-1}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_n(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{n-2}}{\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = +\infty \quad (n \geq 3)$$

$\Rightarrow (C_n)$ admet au voisinage de $\pm\infty$ une branche infinie parabolique de direction $(O, \vec{j})$.

2°/

$$a) C_1 \cap C_2 = \{ O(0,0); A(1, \frac{\sqrt{2}}{2}) \}$$

$$f_n(0) = 0, f_n(1) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ d'où } (C_n) \text{ admet exactement deux}$$

$$\text{points fixes } O(0,0) \text{ et } A(1, \frac{\sqrt{2}}{2})$$

$$b) d_n(x) = f_{n+1}(x) - f_n(x) = \frac{x^n(x-1)}{\sqrt{x^2+1}}$$

• Si n est pair :

x	$-\infty$		0		1	$+\infty$
x^n		+	0	+	0	+
$x-1$		-	0	-	0	+
$d_n(x)$		-	0	-	0	+

Sur $]-\infty, 1[\setminus \{0\}$: C_{n+1} est au dessous de C_n

Sur $]1, +\infty[$, C_{n+1} est au dessus de C_n

C_{n+1} et C_n se coupent en O et A .

• Si n est impair :

x	$-\infty$		0		1	$+\infty$
x^n		-	0	+	0	+
$x-1$		-	0	-	0	+
$d_n(x)$		+	0	-	0	+

Sur $]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$, C_{n+1} est au dessus de C_n .

Sur $]0, 1[$, C_{n+1} est au dessous de C_n

C_{n+1} et C_n se coupent en O et A.

3°/ • Si n est pair ($n \geq 2$) : $f'_n(x) = \frac{x^{n-1}(n + (n-1)x^2)}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$

x	0
x^{n-1}	0
$f'_n(x)$	0

• Si n est impair ($n \neq 1$) :

x	0
x^{n-1}	0
$f'_n(x)$	0

• Si $n = 1$, $f'_n(x) = \frac{1}{(x^2 + 1)\sqrt{x^2 + 1}}$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_n(x)$		+	
$f_n(x)$		-1	1

B)

1°/ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n < 1$

Pour $n = 0, 0 < U_0 < 1$ est vraie par hypothèse.

Supposons que pour un entier donné n on a : $0 < U_n < 1$ et montrons que $0 < U_{n+1} < 1$.

On a : $0 < U_n < 1$ et f_k est strictement croissante sur $]0, 1[$

Donc $f_k(0) < f_k(U_n) < f_k(1)$ or $f_k(0) = 0$ et $f_k(1) = \frac{1}{\sqrt{2}} < 1$ et

par suite $0 < U_{n+1} < 1$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < U_n < 1$

$$2^\circ/U_{n+1} = f_k(U_n) = \frac{U_n (U_n)^{k-1}}{\sqrt{U_n^2 + 1}} = U_n \cdot f_{k-1}(U_n) \quad \text{or } 0 < U_n < 1 \Rightarrow$$

$$f_{k-1}(U_n) < f_{k-1}(1) \Rightarrow U_n \cdot f_{k-1}(U_n) < U_n \cdot f_{k-1}(1) \quad \text{d'où } U_{n+1} < \frac{U_n}{\sqrt{2}}$$

$$3^\circ/ a) U_{n+1} < U_n \frac{1}{\sqrt{2}} < U_n \quad \text{d'où } (U_n) \text{ est une suite décroissante.}$$

b) On a : (U_n) est une suite décroissante, minorée par 0 donc (U_n) est convergente.

$$\text{On a : } U_2 < \frac{1}{\sqrt{2}} U_1$$

$$U_3 < \frac{1}{\sqrt{2}} U_2$$

$$\vdots$$

$$\forall n \geq 2, U_n < \frac{1}{\sqrt{2}} U_{n-1}$$

D'où en multipliant membre à membre ces inégalités on obtient :

$$\forall n \geq 2, U_2 \cdot U_3 \dots U_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} U_1 \cdot U_2 \cdot U_3 \dots U_{n-1} \quad (\text{car } U_k > 0)$$

$$\text{pour } k \in \{1, 2, \dots, n\} \text{ d'où } \forall n \geq 2, 0 < U_n < \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} U_1$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ car } U_1 = 0 \text{ car } -1 < \frac{1}{\sqrt{2}} < 1 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$