

**EXERCICES****Exercice 1 :**

Soit  $(P)$  la parabole d'équation  $y^2 = 2px$  dans un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $\alpha$  un réel. Une droite  $D$  de vecteur directeur  $\alpha \vec{i} + \vec{j}$  passe par le foyer  $F$  de la parabole  $(P)$  et coupe cette parabole en deux points  $M'$  et  $M''$ .

1°/ Déterminer, en fonction de  $\alpha$  les coordonnées du milieu  $K$  de  $[M'M'']$

2°/ Déterminer l'ensemble des points  $K$  lorsque  $\alpha$  décrit  $\mathbf{R}$ .

**Exercice 2 :**

Le plan est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

Soit  $F(2,0)$  et  $D$  la droite d'équation  $x = -2$ .

1°/ Ecrire une équation cartésienne de la parabole  $P$  de foyer  $F$  et de directrice  $D$ .

2°/ Soit  $m$  un réel donné et  $(T)$  le point de la parabole  $P$  d'ordonnée  $m$  et d'abscisse  $x$ .

a) Exprimer  $x$  en fonction de  $m$ .

b) Donner une équation de la tangente à  $P$  au point  $T$  en fonction de  $m$ .

3°/ Montrer que si  $T$  et  $T'$  sont deux points distincts de  $P$  d'ordonnées respectives  $m$  et  $m'$ , les tangentes à  $P$  en  $T$  et  $T'$  sont sécantes. Soit  $I$  leur point d'intersection. Déterminer les coordonnées de  $I$  en fonction de  $m$  et  $m'$ .

**Exercice 3 :**

Soit  $t$  un réel de  $[0, 2\pi[$  et l'ellipse  $E$  de représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = 2 \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad \text{dans un repère orthonormé } (o, \vec{i}, \vec{j}).$$

1°/ a) Ecrire une équation cartésienne de l'ellipse  $E$ .

b) Ecrire une équation cartésienne de la tangente à l'ellipse  $E$  au point  $M_0$  de paramètre  $t_0$ .

2°/ Soit  $F$  le foyer d'abscisse  $c > 0$  et soit  $D$  la droite dont une équation cartésienne est  $x = \frac{4}{c}$ .

on suppose que  $t_0 \neq 0$  et  $t_0 \neq \pi$ . Déterminer en fonction de  $t_0$  les coordonnées du point  $K$  d'intersection de la tangente en  $M_0$  à  $E$  de la droite  $D$ .

3°/ Montrer que les droites  $(M_0F)$  et  $(FK)$  sont perpendiculaires.

**Exercice 4 :**

Soit dans un repère orthonormé  $(o, \vec{i}, \vec{j})$  l'hyperbole  $(\mathcal{H})$  d'équation :

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Soient le foyer  $F$  d'abscisse  $c > 0$  et  $D$  la droite d'équation:  $x = \frac{a^2}{c}$

1°/ Soit  $M$  un point de  $(\mathcal{H})$  et  $H$  le projeté orthogonal sur la droite  $D$ .

Montrer que  $\frac{MF}{MH} = \frac{c}{a}$ .

2°/ Soit  $M$  un point de  $(\mathcal{H})$  de coordonnées  $x_0$  et  $y_0$ , avec  $y_0 \neq 0$ .

Déterminer les coordonnées du point  $K$  d'intersection de la tangente en  $M$  à  $(\mathcal{H})$  et la droite  $D$ .

3°/ Montrer que les droites  $(FM)$  et  $(FK)$  sont perpendiculaires.

**Exercice 5 :**

Soit  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  un repère orthonormé du plan et

$$f: P \rightarrow P : M(z) \mapsto M'(z') / z' = 2z - z^2.$$

1°/ Soit  $M_1$  et  $M_2$  les points d'affixes respectives  $z^2$  et  $2z$  où  $z \in \mathbb{C}$ .

Montrer que  $OM_1M_2M'$  est un parallélogramme.

2°/ Soit  $H$  l'ensemble des points  $M(z)$  tels que  $z'$  soit un nombre imaginaire.

a) Déterminer une équation cartésienne de  $H$ .

b) Montrer que  $H$  est une hyperbole passant par  $O$ .

c) Ecrire une équation cartésienne de la tangente  $(T)$  à  $H$  en  $O$ .

**Exercice 6 :**

Soit  $u$  un nombre complexe et  $(E_u)$  l'équation :

$$z^2 - (2u - i\bar{u})z - 2iu \cdot \bar{u} = 0.$$

1°/ Résoudre dans  $\mathbb{C}$ , l'équation  $(E_u)$ . On désignera par  $z'$  et  $z''$  les solutions de cette équation.

2°/ On rapporte le plan à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$  et on désigne par  $A, M, M'$  et  $M''$  les points d'affixes respectives  $2i, u, z'$  et  $z''$ .

Soit  $H$  l'ensemble des points  $M$  tels que les points  $A, M'$  et  $M''$  soient alignés.

a) Trouver une équation cartésienne de  $H$ .

b) Montrer que l'ensemble  $H$  est une hyperbole dont on précisera le centre, les sommets, les foyers et les asymptotes.

c) Vérifier que  $H$  passe par le point  $O$  et donner une équation cartésienne de la tangente à  $H$  en  $O$ .

d) Tracer  $H$ .

**Exercice 7 :**

a tout réel  $m \in ]0, 1[$  on associe dans un plan (P) rapporté à un repère

orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  la conique  $(E_m)$  d'équation  $y^2 = 2x - \frac{x^2}{m}$

1°/ Déterminer et construire  $(E_{\frac{3}{4}})$

2°/ Quelle est la nature de  $(E_m)$  ?

Déterminer par leurs coordonnées dans  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ , le centre et les sommets de  $(E_m)$ .

3°/ Déterminer et tracer la courbe  $(\Gamma)$  constituant l'ensemble des sommets du grand axe de  $(E_m)$  quand  $m$  varie dans  $]0, 1[$ .

4°/

a) Déterminer par leurs coordonnées dans  $(O, \vec{i}, \vec{j})$  les foyers de  $(E_m)$ .

b) Déterminer la courbe  $(C)$  constituant l'ensemble de ces foyers quand  $m$  varie dans l'intervalle  $]0, 1[$

**Exercice 8 :**

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . Soit  $(\Gamma)$

l'ensemble des points  $M(x, y)$  vérifiant :  $4x|x| + y^2 - 16x - 20 = 0$

1°/ Montrer que  $(\Gamma)$  est la réunion d'une partie d'une conique  $(C_1)$  et d'une partie d'une conique  $(C_2)$

2°/ Déterminer pour chacune des coniques  $(C_1)$  et  $(C_2)$  la nature, le centre, les sommets et éventuellement les asymptotes

3°/ Montrer qu'en chacun des points où les courbes  $(C_1)$  et  $(C_2)$  coupent le droite  $(O, \vec{j})$  elles ont même tangente.

**Exercice 9 :**

On considère l'ensemble  $(\Gamma)$  des points  $M$  du plan dont les coordonnées  $(x,y)$  dans le repère orthonormé  $(O, \vec{u}, \vec{v})$  satisfont à la

relation : 
$$\frac{y^4}{16} = x^4 - 2x^2 + 1$$

1°/Démontrer que  $(\Gamma)$  est la réunion de deux coniques

2°/Tracer  $\Gamma$  en précisant leurs axes , leurs sommets , leurs foyers et leur asymptotes éventuelles.

**Solution 10 :**

Le plan  $(P)$  est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . A tout nombre réel  $m$  , on associe l'ensemble  $(C_m)$  des points  $M(x,y)$  dont les coordonnées vérifient l'équation :

$$mx^2 - 4mx - (m-1)y^2 + 2 = 0$$

Etudier suivant  $m$  , la nature de  $(C_m)$

**Solution 11 :**

Le plan  $(P)$  est rapporté à un repère orthonormé direct  $(O, \vec{u}, \vec{v})$ .

1°/Pour tout point  $M$  du plan , on note  $z$  son affixe

a) Vérifier que l'ensemble des points  $M$  tels que  $\overline{z} + z + 4 = 0$  est une droite  $(D)$  , tracer  $(D)$  .

b) Démontrer que , pour tout point  $M$  de  $(P)$  la distance de  $M$  à  $D$

est : 
$$\frac{1}{2} \left| z + \overline{z} + 4 \right|$$

2°/On note F le point d'affixe  $(1 + i)$  P' le plan P privé de la droite D .

Soit (E) : l'ensemble des points M , d'affixe z de P' tels que :

$$\left| \frac{z - 1 - i}{z + \overline{z} + 4} \right| = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

- a) Démontrer que (E) est une conique dont on précisera l'excentricité
- b) Vérifier que (E) passe O .

## SOLUTIONS

**Solution 1 :**

$$P: y^2 = 2px$$

$$M \in D \Leftrightarrow \det(\vec{FM}, \alpha \vec{i} + \vec{j}) = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x - \frac{p}{2} & \alpha \\ y & 1 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow x - \frac{p}{2} - \alpha y = 0 \quad ;$$

$$D: x - \alpha y - \frac{p}{2} = 0$$

$$1^\circ / M \in P \cap D \Leftrightarrow \begin{cases} M(x, y) ; y^2 = 2px \\ x - \alpha y - \frac{p}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\text{on a : } y^2 - 2p(\alpha y + \frac{p}{2}) = 0 \Leftrightarrow y^2 - 2p\alpha y - p^2 = 0$$

$$\Delta = 4p^2\alpha^2 + 4p^2 = 4p^2(\alpha^2 + 1)$$

$$y' = \frac{2p\alpha - 2p\sqrt{\alpha^2 + 1}}{2} = p(\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 1}) \quad ; \quad y'' = p(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1}) .$$

$$\Rightarrow x' = \alpha y' + \frac{p}{2} = \alpha p(\alpha - \sqrt{\alpha^2 + 1}) + \frac{p}{2} \text{ d'où } x' = p(\alpha^2 - \alpha\sqrt{\alpha^2 + 1} + \frac{1}{2})$$

$$x'' = \alpha y'' + \frac{p}{2} = \alpha p(\alpha + \sqrt{\alpha^2 + 1}) + \frac{p}{2} = p(\alpha^2 + \alpha\sqrt{\alpha^2 + 1} + \frac{1}{2})$$

$$\text{Soit } K = M' * M'' ; \quad x_K = \frac{x' + x''}{2} = p(\alpha^2 + \frac{1}{2}) ; \quad y_K = \frac{y' + y''}{2} = p\alpha$$

$$\text{d'où } K(p\alpha^2 + \frac{p}{2}, p\alpha)$$

$$2^\circ / \text{ Soit } x = p\alpha^2 + \frac{p}{2} \text{ et } y = p\alpha$$

$$\begin{cases} x = p(\alpha^2 + \frac{1}{2}) \\ y = p\alpha \end{cases}$$

Lorsque  $\alpha$  décrit  $\mathbf{R} \Leftrightarrow y$  décrit  $\mathbf{R}$  d'où

$$x = p(\frac{y^2}{p^2} + \frac{1}{2}) \Leftrightarrow x = \frac{y^2}{p} + \frac{1}{2}p \Leftrightarrow y^2 = p(x - \frac{1}{2}p)$$

$$\text{on pose } \begin{cases} X = x - \frac{1}{2}p \\ Y = y \end{cases} \quad \text{on obtient } Y^2 = 2qX \text{ où } q = \frac{p}{2}$$

**Conclusion :**  $K$  décrit la parabole de foyer  $F'(\frac{3p}{4}, 0)$  et de directrice

$$\Delta: x = \frac{p}{4}$$

### Solution 2 :

$$l^{\circ}/ (P) = \{ M / d(M, F) = d(M, D) \}$$

$$M(x, y) \text{ et } D: x+2=0 \Rightarrow d(M, D) = \frac{|x+2|}{\sqrt{1^2+0^2}} = |x+2|$$

$$MF = \sqrt{(x-2)^2 + y^2} ; \text{ on a : } \sqrt{(x-2)^2 + y^2} = |x+2| \Leftrightarrow$$

$$(x-2)^2 + y^2 = (x+2)^2 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 4 + y^2 = x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow y^2 = 8x.$$

**Conclusion :**  $(P): y^2 = 8x$ .

$$2^{\circ}/a) T \in (P) \text{ et } T(x, m). \text{ On a : } m^2 = 8x \text{ d'où } x = \frac{m^2}{8}.$$

b)  $\Delta$  la tangente à  $(P)$  au point  $T$ .

$$\Delta: yy_0 = 4(x + x_0) \text{ or } x_0 = \frac{m^2}{8} \text{ et } y_0 = m$$

$$\text{d'où } \Delta: my = 4(x + \frac{m^2}{8})$$

$$\textbf{Conclusion : } \Delta: 4x - my + \frac{m^2}{2} = 0.$$

$$3^{\circ}/ \Delta: 4x - my + \frac{m^2}{2} = 0 ; \Delta': 4x - m'y + \frac{m'^2}{2} = 0$$

$$\text{coef}(\Delta) = \frac{4}{m} \text{ et } \text{coef}(\Delta') = \frac{4}{m'} \text{ or } m \neq m' \text{ donc } \text{coef}(\Delta) \neq \text{coef}(\Delta')$$

et par suite  $\Delta$  et  $\Delta'$  ne sont pas parallèles.

**Conclusion :**  $\Delta$  et  $\Delta'$  se coupent en un point  $I$ .



$$\text{Soit } I(x, y) \in \Delta \cap \Delta' \Rightarrow \begin{cases} 4x - my + \frac{m^2}{2} = 0 \\ 4x - m'y + \frac{m'^2}{2} = 0 \end{cases}$$

$$\text{d'où } (m - m')y + \frac{m'^2 - m^2}{2} = 0 \Rightarrow y = \frac{m + m'}{2}$$

on a

$$4x - my + \frac{m^2}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}(my - \frac{m^2}{2}) = \frac{1}{4}(\frac{m^2 + mm'}{2} - \frac{m^2}{2}) \Leftrightarrow x = \frac{mm'}{8}$$

$$I(\frac{mm'}{8}, \frac{m + m'}{2})$$

### Solution 3 :

$$1^\circ / \text{ a) } M(x, y) \in E \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x}{2} = \cos t \\ y = \sin t \end{cases} \quad \text{d'où l'équation } \frac{x^2}{4} + y^2 = 1$$

$$\text{b) } M_0(x_0, y_0) / \begin{cases} x_0 = 2 \cos t_0 \\ y_0 = \sin t_0 \end{cases} \quad \text{la tangente à } E \text{ en } M_0 \text{ a pour équation :}$$

$$\frac{xx_0}{4} + yy_0 = 1 \Rightarrow \frac{x \cos t_0}{2} + y \sin t_0 = 1 \Rightarrow T: x \cos t_0 + 2 \sin t_0 \cdot y - 2 = 0$$

$$2^\circ / \text{ on a : } c = \sqrt{a^2 - b^2} \Rightarrow c = \sqrt{3}$$

$$\text{Soit } D: x = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

$$\text{Soit } K(x, y) \text{ le point d'intersection de } T \text{ et } D \quad \begin{cases} x = \frac{4}{\sqrt{3}} \\ x \cos t_0 + 2y \sin t_0 - 2 = 0 \end{cases}$$

$$2 \sin t_0 \cdot y = 2 - \frac{4}{\sqrt{3}} \cos t_0$$

$$y = \frac{1}{\sin t_0} - \frac{2 \cos t_0}{\sqrt{3} \sin t_0} \Rightarrow y = \frac{\sqrt{3} - 2 \cos t_0}{\sqrt{3} \sin t_0} \quad \text{d'où } K(\frac{4}{\sqrt{3}}, \frac{\sqrt{3} - 2 \cos t_0}{\sqrt{3} \sin t_0})$$

$$3^\circ / \vec{M_0F} \begin{pmatrix} \sqrt{3} - 2 \cos t_0 \\ -\sin t_0 \end{pmatrix} ; \vec{FK} \begin{pmatrix} \frac{4}{\sqrt{3}} - \sqrt{3} \\ \frac{\sqrt{3} - 2 \cos t_0}{\sqrt{3} \sin t_0} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \vec{M_0F} \cdot \vec{FK} &= \frac{1}{\sqrt{3}}(\sqrt{3} - 2 \cos t_0) - \frac{(\sqrt{3} - 2 \cos t_0)}{\sqrt{3}} \\ &= 1 - \frac{2}{\sqrt{3}} \cos t_0 - 1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \cos t_0 = 0 \Rightarrow (M_0F) \perp (FK) \end{aligned}$$

**Solution 4 :**

$$1^\circ / \text{on a : } y^2 = \left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)b^2 \text{ or } c^2 = a^2 + b^2 \text{ d'où } y^2 = \left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)(c^2 - a^2)$$

$$MF^2 = (x - c)^2 + y^2$$

$$MF^2 = (x - c)^2 + (x^2 - a^2)\left(\frac{c^2}{a^2} - 1\right)$$

$$= x^2 - 2cx + c^2 + \frac{x^2 c^2}{a^2} - x^2 - c^2 + a^2$$

$$= \frac{x^2 c^2}{a^2} - 2cx + a^2 = \frac{c^2}{a^2} \left[ x^2 - \frac{2a^2 x}{c} + \frac{a^4}{c^2} \right]$$

$$= \frac{c^2}{a^2} \left( x - \frac{a^2}{c} \right)^2 \text{ or } MH^2 = \left( x - \frac{a^2}{c} \right)^2 \text{ d'où } \frac{MF}{MH} = \frac{c}{a}$$

2°/ Soit  $M(x_0, y_0)$  avec  $y_0 \neq 0$ .

Soit  $T$  la tangente à  $(\mathcal{H})$  en  $M$ .  $T: \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$

Soit  $K(x, y) \in T \cap D$

$$\begin{cases} \frac{xx_0}{a^2} - \frac{yy_0}{b^2} = 1 & (*) \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{a^2}{c} & (**) \end{cases}$$

$$(*) \text{ dévient : } \frac{x_0}{c} - \frac{yy_0}{b^2} = 1$$

$$y = \left( \frac{x_0}{c} - 1 \right) \frac{b^2}{y_0} \quad (y_0 \neq 0) \text{ d'où } K \left( \frac{a^2}{c}; \frac{x_0}{y_0} \frac{b^2}{c} - \frac{b^2}{y_0} \right)$$

$$3^\circ / \vec{FM} \begin{pmatrix} x_0 - c \\ y_0 \end{pmatrix} ; \vec{FK} \begin{pmatrix} \frac{a^2}{c} - c \\ \frac{x_0}{y_0} \frac{b^2}{c} - \frac{b^2}{y_0} \end{pmatrix}$$

$$\vec{FM} \cdot \vec{FK} = (x_0 - c) \left( \frac{a^2 - c^2}{c} \right) + b^2 \left( \frac{x_0}{c} - 1 \right)$$

$$= (x_0 - c) \left( -\frac{b^2}{c} \right) + \frac{b^2}{c} (x_0 - c) = 0 \text{ d'où } (FM) \perp (FK).$$

### Solution 5 :

$$1^\circ / \text{On a : } z \overrightarrow{OM_1} = z^2 \text{ et } z \overrightarrow{MM_2} = 2z - z' = 2z - 2z + z^2 = z^2 \text{ d'où}$$

$$\overrightarrow{OM_1} = \overrightarrow{MM_2} \text{ et par suite } OM_1M_2M' \text{ est un parallélogramme.}$$

$$2^\circ / a) z' = 2z - z^2. \text{ On pose } z = x + iy$$

$$z' = 2x + 2iy - (x^2 - y^2 + 2ixy) = 2x - x^2 + y^2 + i(2x - 2xy)$$

$$z' \text{ est un nombre imaginaire pur} \Leftrightarrow 2x - x^2 + y^2 = 0 \text{ d'où}$$

$$(H) : x^2 - 2x - y^2 = 0.$$

$$b) x^2 - 2x - y^2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 - y^2 = 1$$

$$\text{on pose } \begin{cases} X = x-1 \\ Y = y \end{cases} \text{ d'où } (H) : X^2 - Y^2 = 1$$

alors (H) est un hyperbole équilatère.

Les coordonnées de O vérifient l'équation de ( H )  $\Rightarrow O \in ( H )$ .

$$c) T : (x-1)(x_0-1) - yy_0 = 1$$

$$\text{or } x_0 = 0 \text{ et } y_0 = 0 \Rightarrow T : x = 0$$

### Solution 6 :

$$\begin{aligned} 1^\circ / \Delta &= (2u - i\bar{u})^2 - 4(-2iu\bar{u}) = 4u^2 - 4iu\bar{u} - (\bar{u})^2 + 8iu\bar{u} \\ &= 4u^2 + 4iu\bar{u} - (\bar{u})^2 = (2u + i\bar{u})^2 \end{aligned}$$

$$z' = \frac{2u - i\bar{u} - 2u - i\bar{u}}{2} = -i\bar{u}$$

$$z'' = \frac{2u - i\bar{u} + 2u + i\bar{u}}{2} = 2u$$

$$\begin{aligned} 2^\circ / a) \ z_{\overline{AM'}} &= z_{M'} - z_A = -i\bar{u} - 2i = -i(x - yi) - 2i \quad (\text{avec } u = x + iy) \\ &= -y - (x+2)i. \end{aligned}$$

$$z_{\overline{AM''}} = z_{M''} - z_A = 2u - 2i = 2x + i(2y - 2)$$

$$A, M', M'' \text{ sont alignés si et seulement si } \begin{vmatrix} -y & 2x \\ -x-2 & 2y-2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$-y(2y-2) + 2x(x+2) = 0 \Leftrightarrow 2x^2 + 4x - 2y^2 + 2y = 0 \Leftrightarrow$$

$$(H) : x^2 + 2x - y^2 + y = 0$$

$$b) M(x, y) \in (H) \Leftrightarrow x^2 + 2x - y^2 + y = 0 \Leftrightarrow (x+1)^2 - (y - \frac{1}{2})^2 = \frac{3}{4}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x+1)^2}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} - \frac{(y - \frac{1}{2})^2}{(\frac{\sqrt{3}}{2})^2} = 1$$

c'est une équation cartésienne d'une hyperbole équilatère de centre

$$\Omega(-1, \frac{1}{2}) \text{ de sommets } A(\frac{\sqrt{3}}{2} - 1, \frac{1}{2}) \text{ et } A'(-\frac{\sqrt{3}}{2} - 1, \frac{1}{2}) \text{ et de foyers}$$

$$F(\frac{\sqrt{6}}{2} - 1, \frac{1}{2}) ; F'(-\frac{\sqrt{6}}{2} - 1, \frac{1}{2}). \text{ Les asymptotes sont } \Delta : Y = X \text{ et}$$

$$\Delta' : Y = -X \text{ donc } \Delta : y = x + \frac{3}{2} \text{ et } \Delta' : y = -x - \frac{1}{2}.$$

$$c) (H) : x^2 + 2x - y^2 + y = 0$$

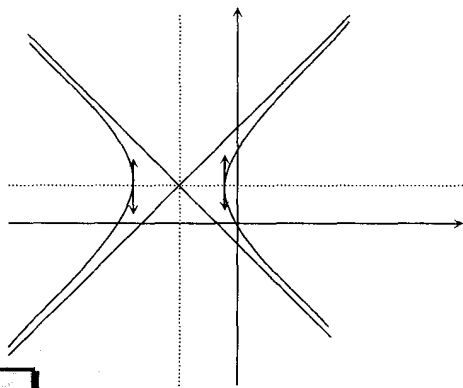
Les coordonnées de  $O(0,0)$  vérifient l'équation de (H) donc  $O(0,0) \in (H)$ .

Soit (T) la tangente à (H) en O

$$T : (x+1)(x_0+1) - (y-\frac{1}{2})(y_0-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4}$$

$$T : x+1 + \frac{1}{2}(y-\frac{1}{2}) = \frac{3}{4} \quad \text{d'où} \quad T : x + \frac{1}{2}y = 0.$$

d)



**Solution 7 :**

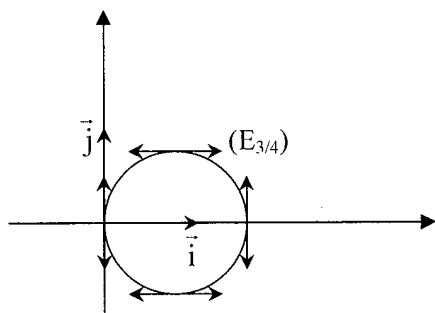
$$1^{\circ} / E_{3/4} : y^2 = 2x - \frac{4x^2}{3} \Leftrightarrow \frac{3}{4}y^2 = \frac{3}{2}x - x^2 \Leftrightarrow x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}y^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{9}{16} + \frac{3}{4}y^2 = 0 \Leftrightarrow \left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = \frac{9}{16} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\left(x - \frac{3}{4}\right)^2}{\left(\frac{3}{4}\right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1$$

D'où  $\left(E_{3/4}\right)$  est une ellipse de centre  $\Omega\left(\frac{3}{4}, 0\right)$  d'axes :  $x = \frac{3}{4}$  ;  $y = 0$

de sommets  $A\left(\frac{3}{2}, 0\right)$  ;  $O(0,0)$  ;  $B\left(\frac{3}{4}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$  et  $B'\left(\frac{3}{4}, -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$



$$2^\circ / y^2 = 2x - \frac{x^2}{m} \Leftrightarrow x^2 - 2mx + my^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - m)^2 - m^2 + my^2 = 0 \Leftrightarrow \frac{(x - m)^2}{m^2} + \frac{y^2}{(\sqrt{m})^2} = 1$$

D'où  $(E_m)$  est une ellipse de centre  $\Omega_m (m, 0)$  et de sommets

$A_m(2m, 0)$ ;  $O(0, 0)$ ;  $B_m(m, \sqrt{m})$  et  $B'_m(m, -\sqrt{m})$

3<sup>o</sup>/ on a :  $\sqrt{m} > m$  ( car  $m \in ]0, 1[$  )

les sommets du grand axe sont donc  $B_m$  et  $B'_m$ .  $M(x, y)$  est un sommet du grand axe

$$\begin{cases} x = m \\ y = \pm\sqrt{m} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = m \\ y^2 = m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (\Gamma): y^2 = x \\ x \in ]0, 1[ \end{cases}$$

$(\Gamma)$  est une partie d'une parabole

4<sup>o</sup>/  $a = m$

$$b = -\sqrt{m} \quad \text{d'où} \quad c = \sqrt{b^2 - a^2} = \sqrt{m - m^2}$$

les foyers de  $(E_m)$  sont  $F_m(m, \sqrt{m - m^2})$  et  $F'_m(m, -\sqrt{m - m^2})$

$M(x, y)$  est un foyer de  $(E_m)$  ssi

$$\begin{cases} x = m \\ y = \pm\sqrt{m - m^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = m \\ y^2 = m - m^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = x - x^2 \\ x \in ]0, 1[ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4} \\ x \in ]0, 1[ \end{cases}$$

D'où (C) est le cercle de centre  $I\left(\frac{1}{2}, 0\right)$  de rayon  $\frac{1}{2}$  privé des points  $O(0,0)$  et  $O'(1,0)$

### Solution 8 :

$$4x|x| + y^2 - 16x - 20 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 4x^2 + y^2 - 16x - 20 = 0 \\ \text{où } x \geq 0 \end{cases} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} -4x^2 + y^2 - 16x - 20 = 0 \\ \text{où } x \leq 0 \end{cases}$$

$$\text{Or : } 4x^2 + y^2 - 16x - 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 4x + \frac{y^2}{4} - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2 + \frac{y^2}{4} - 9 = 0$$

$$\bullet \quad -4x^2 + y^2 - 16x - 20 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x - \frac{y^2}{4} + 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x+2)^2 - \frac{y^2}{4} + 1 = 0$$

$$\text{Soit } (C_1) : \begin{cases} (x-2)^2 + \frac{y^2}{4} - 9 = 0 \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow (C_1) : \begin{cases} \frac{X^2}{3^2} + \frac{Y^2}{6^2} = 1 \\ \text{où } X \geq -2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} X = x - 2 \\ Y = y \end{pmatrix}$$

(C<sub>1</sub>) est une partie d'une ellipse

$$(C_2) : \begin{cases} \frac{-X^2}{1^2} + \frac{Y^2}{2^2} = 1 \\ X \geq 2 \end{cases} \quad \begin{pmatrix} X = x + 2 \\ Y = y \end{pmatrix}$$

(C<sub>2</sub>) est une partie d'une hyperbole.

2°/

- L'ellipse  $(C_1)$  a pour centre  $\Omega_1 (2,0)$  et pour sommets

$$A_1(5,0); A_1'(-1,0)$$

$$B_1(2,6) \text{ et } B_1'(2,-6)$$

- L'hyperbole  $(C_2)$  a pour centre  $\Omega_2 (-2,0)$  pour sommets  $B_2(-2,2); B_2'(-2,-2)$  et pour asymptotes

$$\Delta_1 : y = 2x + 4 \text{ et } \Delta_2 : y = -2x - 4$$

$$1^\circ/ (C_1) \cap (O, \vec{j}) : \begin{cases} 4x^2 + y^2 - 16x - 20 = 0 & (*) \\ x = 0 \end{cases}$$

$$(*) \text{ s'écrit : } y^2 - 20 = 0 \Leftrightarrow y = 2\sqrt{5} \text{ ou } y = -2\sqrt{5}$$

$$(C_1) \cap (O, \vec{j}) = \{ T_1(0, 2\sqrt{5}); T_1'(0, -2\sqrt{5}) \}$$

- L'équation de la tangente à  $(C_1)$  au point  $T_1(0, 2\sqrt{5})$  est :

$$\frac{(x_0 - 2)(x - 2)}{9} + \frac{y_0 y}{36} = 1 \Leftrightarrow \frac{-2(x - 2)}{9} + \frac{2\sqrt{5}y}{36} = 1$$

$$\text{D'où } 4x - \sqrt{5}y + 10 = 0$$

- L'équation de la tangente à  $(C_1)$  au point  $T_1'(0, -2\sqrt{5})$  est

$$4x + \sqrt{5}y + 10 = 0.$$

$$(C_2) \cap (O, \vec{j}) : \begin{cases} -4x^2 + y^2 - 16x - 20 = 0 \\ x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^2 = 20 \\ x = 0 \end{cases}$$

$$\text{D'où } (C_2) \cap (O, \vec{j}) = \{ T_1(0, 2\sqrt{5}); T_1'(0, -2\sqrt{5}) \}$$

- L'équation de la tangente à  $(C_2)$  au point  $T_1$  est :  $4x - \sqrt{5}y + 10 = 0$

- L'équation de la tangente à  $(C_2)$  au point  $T_1'$  est :  $4x + \sqrt{5}y + 10 = 0$



**Solution 9 :**

$$1^{\circ} / \frac{y^4}{16} = x^4 - 2x^2 + 1 \Leftrightarrow \left( \frac{y^2}{4} \right)^2 = (x^2 - 1)^2$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^2}{4} = x^2 - 1 \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{4} = -x^2 + 1 \Leftrightarrow x^2 - \frac{y^2}{2^2} = 1 \quad (1)$$

$$\text{ou} \quad x^2 + \frac{y^2}{2^2} = 1 \quad (2)$$

(1) est l'équation d'une hyperbole (H)

(2) est l'équation d'une ellipse (E)

d'où :  $(\Gamma) = H \cup (E)$

2<sup>o</sup> / (H) a pour axes les axes du repère pour sommets les points A(1,0) et A'(-1,0) pour foyers

$F_1(\sqrt{5}, 0)$  et  $F_2(-\sqrt{5}, 0)$  pour asymptotes les droites  $D_1 : y = 2x$  et  $D_2 : y = -2x$

• (E) a pour axes les axes de coordonnées pour sommets les points A(1,0) ; A'(-1,0) ; B(0,2) ; B'(0,-2)  
pour foyers les points  $F_2(0, \sqrt{3})$  et  $F_2'(0, -\sqrt{3})$ .

**Solution 10 :**

Le plan (P) est rapporté à un repère orthonormé  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ . A tout

nombre réel m, on associe l'ensemble  $(C_m)$  des points M(x,y) dont les coordonnées vérifient l'équation :

$$mx^2 - 4mx - (m-1)y^2 + 2 = 0$$

Etudier suivant m, la nature de  $(C_m)$

$$mx^2 - 4mx - (m-1)y^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow m(x^2 - 4x) - (m-1)y^2 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m[(x-2)^2 - 4] - (m-1)y^2 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m(x-2)^2 - 4m - (m-1)y^2 + 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow m(x-2)^2 - (m-1)y^2 = 4m-2$$

- Pour  $m = \frac{1}{2} : \left( E_{\frac{1}{2}} \right) : \frac{1}{2}(x-2)^2 + \frac{1}{2}y^2 = 0 \Leftrightarrow (x,y) = (2,0)$

$$\text{D'où : } E_{\frac{1}{2}} = \{ \Omega(2,0) \}$$

- Pour  $m \neq \frac{1}{2} : \frac{m}{4m-2}(x-2)^2 + \frac{1-m}{4m-2}y^2 = 1$

| m                  | $-\infty$ | 0 | $\frac{1}{2}$ | 1 | $+\infty$ |
|--------------------|-----------|---|---------------|---|-----------|
| m                  |           | 0 |               |   |           |
| $\frac{m}{4m-2}$   | +         | 0 | -             | + | +         |
| $\frac{1-m}{4m-2}$ | -         | - | +             | 0 | -         |

- Pour  $m \in ]-\infty, 0[ \cup ]1, +\infty[ : \text{l'équation } (E_m) \text{ est de la forme :}$

$$\frac{(x-2)^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad \text{où } a^2 = \frac{4m-2}{m} \text{ et } b^2 = -\left(\frac{4m-2}{1-m}\right)$$

D'où  $(E_m)$  est une hyperbole de centre  $\Omega(2,0)$

- Pour  $m \in ]0, \frac{1}{2}[$  d'où  $E_m = \emptyset$

- Pour  $m = 0 : E_m = \frac{-y^2}{2} = 1 \Rightarrow E_m = \emptyset$

- Pour  $m \in ]\frac{1}{2}, 1[ : (E_m) \text{ est de la forme : } \frac{(x-2)^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

$$\text{où } a^2 = \frac{4m-2}{m} \text{ et } b^2 = \frac{4m-2}{1-m}.$$

**Solution 11 :**

1°/

a) On pose  $z = x + iy$  ( $x \in \mathbb{R}$ ,  $y \in \mathbb{R}$ )

$$\overline{z} + z + 4 = 0 \Leftrightarrow x - iy + x + iy + 4 = 0 \Leftrightarrow 2x + 4 = 0$$

$$D : x = -2$$

$$b) \quad d(M, D) = |x + 2| = \frac{1}{2} |z + \overline{z} + 4|$$

$$2^\circ / M(z) \in (E) \Leftrightarrow \left| \frac{z - 1 - i}{z + \overline{z} + 4} \right| = \frac{\sqrt{2}}{4} \Leftrightarrow \frac{MF}{d(M, D)} = \frac{\sqrt{2}}{2} = e$$

On a :  $0 < e < 1$  d'où (E) est une ellipse d'excentricité  $e = \frac{\sqrt{2}}{2}$ .

(D est une directrice de (E) ; F est l'un de ces foyers)

b) On a :  $O(0,0) \in (E)$  en effet :

$$\left| \frac{z_0 - 1 - i}{z_0 + \overline{z_0} + 4} \right| = \frac{|1 + i|}{|4|} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

D'où  $O \in (E)$ .