

EXERCICES**Exercice 1 :**Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{|x|}{x} \sqrt{|x|} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

- 1°/ Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$.
- 2°/ Etudier la dérivabilité de f en 0.
- 3°/ Calculer pour chaque $x \neq 0$, $f'(x)$.
- 4°/ a) Démontrer que f est strictement monotone sur $\mathbf{R}$.
b) Montrer que f admet une fonction réciproque notée g .
c) Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}$, $g(x) = x \cdot |x|$.
- 5°/ a) Montrer que g est dérivable en 0.
b) Calculer $g'(x)$ pour $x \neq 0$.

Exercice 2 :Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto \sqrt{2x-4} + 1$$

- 1°/ Préciser le domaine de définition D de f .
- 2°/ Montrer que f est continue sur D .
- 3°/ Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 2$ et interpréter géométriquement le résultat obtenu.
- 4°/ Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} que l'on déterminera.

Exercice 3 :Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto x^3 + x + 1$$

- 1°/ Montrer que f est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$.
- 2°/ Soit g la réciproque de f (on ne demande pas le calcul de $g(x)$).
 - a) Calculer $g(1)$.
 - b) Préciser le domaine de continuité et de dérivabilité de g .

c) Calculer $g'(1)$.

d) Ecrire une équation cartésienne de la tangente T à la courbe de g au point d'abscisse $x_0 = 1$.

Exercice 4 :

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto \frac{2x}{x^2 + 1}$$

1°/ Etudier les variations de f .

2°/a) Ecrire une équation cartésienne de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse 0.

b) Etudier la position de C_f et T .

3°/ Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0, 1]$.

a) Montrer que g est une bijection de $[0, 1]$ sur lui-même.

b) Expliciter g^{-1} .

c) Calculer pour tout $x \in]0, 1[$, $(g^{-1})'(x)$.

Exercice 5 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = \sqrt{x^2 + 8} - x$.

1°/ Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$, on

$$a : f'(x) = -\frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 8}}.$$

2°/a) Montrer que $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) > 0$.

b) En déduire que f est strictement décroissante sur $\mathbf{R}$.

3°/a) Montrer que f est une bijection de $\mathbf{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Expliciter f^{-1} .

Exercice 6 :

Soit la fonction f définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{x-1} - \sqrt{x}$.

1°/ Etudier les variations de f sur $]1, +\infty[$.

2°/a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α .

b) Montrer que $1,44 < \alpha < 2$.

3°/ Montrer que l'équation $f(x) = 0$ est équivalente à l'équation:

$$(E) : 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x$$

4°/ Soit la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par : $g(x) = 1 + \frac{1}{\sqrt{x}}$.

a) Vérifier que $g(\alpha) = \alpha$.

b) Montrer que g est une bijection de $]0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

c) Calculer $g^{-1}(x)$ pour chaque $x \in J$.

Exercice 7 :

Soit $g(x) = x^3 - x^2 + 3x + 1$.

1°/a) Etudier les variations de g .

b) Montrer qu'il existe un seul réel α solution de $g(x) = 0$.

c) Vérifier que $-\frac{1}{3} < \alpha < 0$.

2°/ Etudier le signe de $g(x)$.

3°/ Soit $h(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3}$.

a) Vérifier que $h(\alpha) = \alpha$.

b) Etudier les variations de h .

Exercice 8 :

Soit la fonction φ définie sur $[0, \pi]$ par $\varphi(x) = 1 + 4 \cos x$.

1°/ Etudier les variations de φ sur $[0, \pi]$.

2°/a) Montrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une seule solution α .

b) Vérifier que $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{2\pi}{3}$.

c) Etudier le signe de $\varphi(x)$.

3°/ Soit $f : [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 2 \cos^2 x + \cos x - 1$$

a) Montrer que f est dérivable sur $[0, \pi]$ et que :

$$\forall x \in [0, \pi] : f'(x) = -\sin x \cdot \varphi(x).$$

b) Calculer $f(\alpha)$.

c) Etudier les variations de f sur $[0, \pi]$.

Exercice 9 :

Soit $f: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto \sqrt{x} + 2x + 1$$

1°/ Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter géométriquement le résultat trouvé.

2°/ Etudier les variations de f .

3°/ Montrer que f est une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur un intervalle J que l'on précisera.

4°/ Expliciter f^{-1} .

Exercice 10 :

Soit $f: [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto 2 \cos x + 3$$

1°/ Etudier les variations de f sur $[0, \pi]$.

2°/ Montrer que f est une bijection de $[0, \pi]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3°/ Soit $g = f^{-1}$.

a) Calculer $g(5)$ et $g(3)$.

b) Montrer que g est dérivable sur $]1, 5[$.

4°/ Montrer que $\forall x \in]1, 5[, g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{-x^2 + 6x - 5}}$.

Exercice 11 :

Soit $f: [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto \frac{\sin x}{2 + \sin x}$$

1°/ Etudier les variations de f .

2°/ Montrer que f est une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle J que l'on précisera.

3°/ Soit g la réciproque de f .

a) Calculer $g(0)$ et $g(\frac{1}{5})$.

b) Montrer que g est dérivable sur $] -1, \frac{1}{3}[$.

4°/ Montrer que $\forall x \in] -1, \frac{1}{3}[$ on a : $g'(x) = \frac{2}{(1-x)\sqrt{-3x^2-2x+1}}$.

Exercice 12 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+2}}$.

1°/ Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2+2x+2)^3}}.$$

2°/ a) Etudier les variations de f .

b) Montrer que f est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $] -1, 1[$.

3°/ a) Montrer que $\forall x \in] -1, 1[$ on a : $f(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - 1) = x$.

b) En déduire l'expression de f^{-1} .

Exercice 13 :

Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $g(x) = \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}} - \frac{1}{2}$.

1°/ Etudier les variations de g .

2°/ Montrer que g est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $] -1, 0[$.

3°/ Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto \frac{-x}{2} + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$$

a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que $\forall x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = g(x)$.

b) Etudier les variations de f .

c) Montrer que f est une bijection de $\mathbf{R}$ sur un intervalle E que l'on précisera.

4°/ Montrer que $\forall x \in E$ on a : $f^{-1}(x) = \frac{1}{4(x-1)} + 1 - x$.

Exercice 14 :

Soit la fonction $f : x \mapsto \sqrt{2x - x^2}$.

1°/ Etudier la dérivabilité de f .

2°/ Etudier les variations de f .

3°/ Résoudre dans $\mathbf{R}$ l'équation : $f(x) = x$.

4°/ Soit φ la restriction de f à $[0,1]$.

a) Montrer que φ est une bijection de $[0,1]$ sur un intervalle J que l'on préc...

b) Expliciter φ^{-1} .

Exercice 15 :

Soit $g(x) = x^3 + 12x - 2$.

1°/ Etudier les variations de g .

2°/ a) Montrer qu'il existe un seul réel α tel que $g(\alpha) = 0$ et que $0 < \alpha < 1$.

b) Etudier le signe de $g(x)$.

3°/ Soit $f : x \mapsto \frac{x^3 + 1}{x^2 + 4}$.

a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que $\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(x^2 + 4)^2}$.

b) Montrer que $f(\alpha) = \frac{3 - 12\alpha}{\alpha^2 + 4}$.

4°/ Etudier les variations de f .

Exercice 16 :

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1}$$

1°/ Etudier les variations de f et en déduire $f(\mathbf{R})$.

2°/ Soit (E) : $f(x) = x$.

Montrer que (E) est équivalente à $g(x) = 0$ où g est une fonction polynôme de 3[°] degré.

3°/ Déterminer le nombre de solutions de l'équation (E). Interpréter géométriquement.

4°/ Soit φ la restriction de f à l'intervalle $\mathbf{R}_+$.

- a) Prouver que ϕ est une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur un intervalle J que l'on précisera.
 b) Expliciter ϕ^{-1} .

Exercice 17 :

Soit $\alpha \in]0, 1[$ et $\varphi_\alpha :]0, \pi[\rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto \alpha \cos(\alpha x) \sin x - \sin(\alpha x) \cos x$$

1°/a) Etudier les variations de φ_α sur $]0, \pi[$.

b) Montrer que $\forall x \in]0, \pi[$, on a : $\varphi_\alpha(x) > 0$.

2°/ Soit $f_\alpha :]0, \pi[\rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto \frac{\sin(\alpha x)}{\sin x}$$

a) Calculer $\lim_{0^+} f_\alpha$ et $\lim_{\pi^-} f_\alpha$.

b) Etudier les variations de f_α .

c) Vérifier que $f_\alpha(x) = \alpha + \frac{1-\alpha^2}{2}$. Montrer que (E) a une seule solution dans l'intervalle $]0, \pi[$.

Exercice 18 :

Soit $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto \tan x$$

1°/a) Etudier les variations de f .

b) Donner l'équation de la tangente (Δ) à C_f au point $x_0 = 0$.

c) Etudier la position de C_f et (Δ) .

2°/a) Montrer que f est une bijection de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $\mathbf{R}$.

b) On note g la réciproque de f .

Prouver que g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que : $\forall x \in \mathbf{R}, g'(x) = \frac{1}{1+x^2}$.

3°/a) Prouver que g est une fonction impaire.

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x}$.

4°/a) Montrer que $\forall x > 0$ on a : $0 < x - g(x) < \frac{x^2}{3}$.

b) Calculer alors $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - x}{x^2}$.

5°/ Soit $\phi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Prouver que ϕ est paire.

b) Montrer que ϕ est continue sur $\mathbf{R}$.

c) Montrer que ϕ est dérivable sur $\mathbf{R}$.

d) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \phi$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi$.

Exercice 19 :

Soit $f:]0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto \frac{\sqrt{\sin 2x}}{\sin x}.$$

1°/a) Montrer que f est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Etudier la dérivabilité de f en $\frac{\pi}{2}$.

b) Etudier les variations de f .

2°/ Montrer que f est une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}]$ sur un intervalle J que

l'on précisera.

3°/ Soit g la réciproque de f .

a) Préciser le domaine de continuité, de dérivabilité de g .

b) Calculer $g'(x)$ pour chaque $x > 0$.

4°/ Soit $\varphi(x) = g(\sqrt{2x}) + g(\sqrt{\frac{2}{x}})$.

a) Montrer que φ est dérivable sur $]0, +\infty[$.

b) Calculer $\varphi'(x)$ pour $x > 0$. Que vaut $\varphi(1)$?

c) Calculer enfin $\varphi(x)$ pour $x > 0$.

Exercice 20 :

Soit un entier $n \geq 2$ et $\varphi_n : [0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto \sqrt[n]{\operatorname{tg} x}$$

1°/a) Etudier les variations de φ_n sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

b) Montrer que φ_n est une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur un intervalle J à préciser. On note ψ_n la fonction réciproque de φ_n .

c) Déterminer le domaine E' de dérivabilité de ψ_n .

d) Montrer que $\forall x \in E'$ on a : $\psi_n'(x) = \frac{nx^{n-1}}{1+x^{2n}}$.

2°/ Soit $N : [0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto 1 + \operatorname{tg}^2 x - 2\sqrt{\operatorname{tg} x}$$

a) Montrer que N est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et que l'équation

$(x \in]0, \frac{\pi}{2}[\text{ et } N'(x) = 0)$ admet une unique solution notée x_0 .

Calculer $N(x_0)$.

b) En déduire que l'équation $N(x) = 0$ admet deux solutions dans $[0, \frac{\pi}{2}[$. (On remarquera que $N(\frac{\pi}{4}) = 0$).

c) Soit $f : [0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto \sqrt{\operatorname{tg} x} - x$$

Etudier les variations de f . En déduire le signe de $f(x)$.

Exercice 21 :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{\sqrt{x^2+1}-1}{x} & \text{pour } x > 0 \\ f(x) = \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}} & \text{pour } x \leq 0 \end{cases}$$

1°/ Montrer que f est continue en 0

2°/ Montrer que f est dérivable en 0 et que vaut f'_0

3°/ a) Montrer que $D : y = \frac{1}{2}x$ est la tangente à C_f au point d'abscisse 0.

b) Etudier les variations de f

4°/

a) Etudier les variations de f

b) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur J .

Exercice 22 :

A. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par : $h(x) = x^3 - 3x^2 + 3x + 3$.

1°/ Etudier les variations de h .

2°/ a) Montrer qu'il existe un seul réel α tel que $h(\alpha) = 0$.

b) Encadrer α à 0,1 près.

3°/ Etudier le signe de $h(x)$.

B. On considère la fonction f définie par : $f(x) = \frac{x^3 - 3x}{(x-1)^2}$.

1°/ Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ et que $\forall x \neq 1$ on a :

$$f'(x) = \frac{h(x)}{(x-1)^3}.$$

2°/ Etudier les variations de f .

3°/ Montrer que C_f admet une asymptote oblique Δ .

4°/ a) Etudier la position de C_f et Δ .

b) Tracer C_f dans un plan $\mathcal{P}$ rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 23 :

A) Soit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$x \mapsto 2x - \sin x$$

1°/ Prouver que $\forall x \in \mathbb{R}, 2x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 1$

2°/ On appelle (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Soient les droites $D_1 : y = 2x - 1$ et $D_2 : y = 2x + 1$

Déterminer les points communs à (C) et D_1 d'une part, à (C) et D_2 d'autre part. Préciser les tangentes à (C) à ces points.

3°/

- Etudier la parité de f .
- Interpréter géométriquement ce résultat.

4°/

- Calculer $f(x + 2\pi)$ en fonction de $f(x)$
- Par quelle transformation géométrique passe-t-on de la partie représentant la restriction de f à $[-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi]$? ($k \in \mathbb{Z}$)

B)

1°/ Montrer que f admet une application réciproque g .

2°/ Démontrer $g(0)$, $g(2\pi)$ et $g(4k\pi)$ ($k \in \mathbb{Z}$).

3°/

- Préciser le domaine de dérivabilité de g
- Que vaut $g'(0)$ et $g'(2\pi)$.

4°/ Montrer que l'équation $2x - \sin x = m$ admet une solution unique x_m .

On notera α la solution de l'équation $2x - \sin x = 4$.

C)

1°/ Soit $\varnothing : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{1}{2}(4 + \sin x)$

a) Montrer que l'équation $f(x) = 4$ est équivalente à $\varnothing(x) = x$

b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, |\varnothing'(x)| \leq \frac{1}{2}$

2°/ Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$U_0 \in \mathbb{R}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, U_{n+1} = \varnothing(U_n)$

a) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha|$

b) Montrer que $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers un réel que l'on précisera.

SOLUTIONS

Solution 1 :

1°/• La fonction $x \mapsto |x|$ est continue sur $\mathbf{R}$.

• $\forall x \in \mathbf{R}, |x| \geq 0$ donc la fonction $x \mapsto \sqrt{|x|}$ est continue sur $\mathbf{R}$.

• La fonction $x \mapsto \frac{1}{x}$ est continue sur $\mathbf{R}^*$ donc f est continue sur $\mathbf{R}^*$

comme produit de ces fonctions continues.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{|x|} = 0.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-x\sqrt{|x|}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} -\sqrt{|x|} = 0.$$

d'où $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ donc f est continue en 0 et par suite f est continue sur $\mathbf{R}$.

$$2^\circ/ \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{|x|\sqrt{|x|}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{|x|}} = +\infty \text{ donc } f \text{ n'est pas}$$

dérivable en 0.

$$3^\circ/ \bullet \forall x \in \mathbf{R}_+^*, f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$\bullet \forall x \in \mathbf{R}_-^*, f(x) = -\sqrt{-x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{-1}{2\sqrt{-x}} = \frac{1}{2\sqrt{-x}}$$

$$\text{d'où } \forall x \in \mathbf{R}^*, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{|x|}}.$$

$$4^\circ/\text{a) On a : } \forall x \in \mathbf{R}^*, f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{|x|}} > 0 \text{ donc } f \text{ est strictement}$$

croissante sur $\mathbf{R}$.

b) f est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$ donc f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ ce qui donne que f admet une fonction réciproque définie sur $\mathbf{R}$.

c) $f^{-1} : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto f^{-1}(x) = y.$$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x.$$

• Pour $x = 0$ on a $f^{-1}(0) = 0$ car $f(0) = 0$.

• Pour $x \neq 0$, on a $y \neq 0 \Rightarrow \frac{|y|}{y} \sqrt{|y|} = x \Rightarrow \left(\frac{|y| \sqrt{|y|}}{y}\right)^2 = x^2 \Rightarrow$

$$|y| = x^2.$$

• Si $x > 0 \Rightarrow f^{-1}(x) > f^{-1}(0)$ or $f^{-1}(0) = 0 \Rightarrow f^{-1}(x) > 0 \Rightarrow y > 0 \Rightarrow y = x^2 = x \cdot |x|$.

• Si $x < 0 \Rightarrow f^{-1}(x) < f^{-1}(0)$ or $f^{-1}(x) < 0 \Rightarrow y < 0 \Rightarrow y = -x^2 = x \cdot |x|$.

Conclusion : $\forall x \in \mathbf{R}, g(x) = x|x|$.

5°/a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ donc g est dérivable en 0 et $g'(0) = 0$.

b) • $\forall x \in \mathbf{R}_+^*, g(x) = x^2 \Rightarrow g'(x) = 2x$.

• $\forall x \in \mathbf{R}_-^*, g(x) = -x^2 \Rightarrow g'(x) = -2x$.

Donc $\forall x \in \mathbf{R}^*, g'(x) = 2|x|$.

Solution 2 :

1°/ $D = \{x \in \mathbf{R} \text{ tel que } 2x - 4 \geq 0\}$.

$2x - 4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$ donc $D = [2, +\infty[$.

2°/ La fonction $x \mapsto 2x - 4$ est continue sur D et $\forall x \in D, 2x - 4 \geq 0$ donc la fonction $x \mapsto \sqrt{2x - 4}$ est continue sur D comme composée de deux fonctions continues sur D et par suite f est continue sur D comme somme de deux fonctions continues sur D .

3°/ $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{2x - 4}}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x - 2}} = +\infty$

car : $\lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{x - 2} = 0^+$.

Donc f n'est pas dérivable à droite en 2 et par suite la courbe de f admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 2.

4°/• f est dérivable sur $]2, +\infty[$ et $\forall x \in]2, +\infty[, f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-4}}$;
 $\forall x \in \mathbf{R}_+, f'(x) > 0$ donc f est strictement croissante sur $[2, +\infty[$ et
 comme f est continue sur $[2, +\infty[$ donc f réalise une bijection de
 $[2, +\infty[$ sur $[f(2); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= [1, +\infty[$.

• $f^{-1} : [1, +\infty[\rightarrow [2, +\infty[$

$$x \mapsto f^{-1}(x) = y$$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \sqrt{2y-4} + 1 = x \Leftrightarrow \sqrt{2y-4} = x-1 \Leftrightarrow$$

$$(2y-4) = (x-1)^2 \Leftrightarrow y = \frac{(x-1)^2 + 4}{2} = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 2.$$

Conclusion : $\forall x \in [1, +\infty[, f^{-1}(x) = \frac{1}{2}(x-1)^2 + 2.$

Solution 3 :

1°/• f est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R},$

$$f'(x) = 3x^2 + 1 > 0.$$

• f est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$ donc f réalise une
 bijection de $\mathbf{R}$ sur $] \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[= \mathbf{R}.$

2°/a) $g(1) = x \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow x^3 + x + 1 = 1 \Leftrightarrow x(x^2 + 1) = 0 \Leftrightarrow$
 $x = 0$ donc $g(1) = 0.$

b) • f est continue sur $\mathbf{R}$ donc g est continue sur $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}.$

• f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) \neq 0$ donc g est
 dérivable sur $f(\mathbf{R}) = \mathbf{R}.$

$$c) g'(1) = \frac{1}{f'[g(1)]} = \frac{1}{f'(0)} \text{ or } f'(0) = 1 \text{ d'où } g'(1) = 1.$$

d) T : $y = g'(1)(x-1) + g(1)$ or $g'(1) = 1$ et $g(1) = 0$ d'où T :
 $y = x - 1.$

Solution 4 :

1°/ f est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R},$

$$f'(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{2-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$$

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	$-$
$f(x)$	0	-1	1	0

2°/a) $T: y = f'(0)(x-0) + f(0)$ or $f'(0) = 2$ et $f(0) = 0$ d'où
 $T: y = 2x$.

b) • Etudions le signe de $f(x) - 2x$.

$$f(x) - 2x = \frac{2x}{x^2 + 1} - 2x = 2x \left(\frac{1}{x^2 + 1} - 1 \right) = -2x \left(\frac{x^2}{x^2 + 1} \right).$$

Le signe de $f(x) - 2x$ est celui de $-x$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f(x) - 2x$	$+$	0	$-$

- Sur $]-\infty, 0[$, C_f est au dessus de T .
- Sur $]0, +\infty[$, C_f est au dessous de T .
- C_f et T se coupent en $O(0,0)$.

3°/a) g est continue et strictement croissante sur $[0,1]$ donc g réalise une bijection de $[0,1]$ sur $[f(0), f(1)] = [0,1]$.

b) $g^{-1}: [0,1] \rightarrow [0,1]$

$$x \mapsto g^{-1}(x) = y$$

$$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x \Leftrightarrow \frac{2y}{y^2 + 1} = x \Leftrightarrow 2y = xy^2 + x \Leftrightarrow$$

$$xy^2 - 2y + x = 0.$$

• Pour $x = 0$ on a : $y = 0$.

• Pour $x \in]0,1]$, $\Delta' = 1 - x^2 \geq 0$ d'où $y' = \frac{1 - \sqrt{1 - x^2}}{x}$ et

$$y'' = \frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \text{ or } x \in]0,1] \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{x} \geq 1 \text{ et } 1 + \sqrt{1-x^2} \geq 1$$

donc $\frac{1 + \sqrt{1-x^2}}{x} \geq 1$ et par suite la solution y'' est à rejeter car $y \in [0,1]$.

$$\text{Conclusion : } g^{-1}(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x} & \text{si } x \in]0,1] \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

c) • g est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1], g'(x) \neq 0$ donc g^{-1} est dérivable sur $g([0,1]) = [0,1]$.

• Pour $x \in]0,1]$, on a $g^{-1}(x) = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x}$ donc :

$$(g^{-1})'(x) = \frac{-\frac{2x}{2\sqrt{1-x^2}} \cdot x - 1 + \sqrt{1-x^2}}{x^2} = \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2 \sqrt{1-x^2}}.$$

• Pour $x = 0$ on a : $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{g'[g^{-1}(0)]} = \frac{1}{g'(0)}$ or $g'(0) = 2$

d'où $(g^{-1})'(0) = \frac{1}{2}$.

$$\text{Conclusion : } (g^{-1})'(x) = \begin{cases} \frac{1 - \sqrt{1-x^2}}{x^2 \sqrt{1-x^2}} & \text{si } x \in]0,1] \\ \frac{1}{2} & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Solution 5 :

1° • La fonction $x \mapsto x^2 + 8$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}, x^2 + 8 > 0$ donc la fonction $x \mapsto \sqrt{x^2 + 8}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$.

• La fonction $x \mapsto -x$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme somme de ces deux fonctions dérivables.

$$\bullet \forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 8}} - 1 = \frac{x - \sqrt{x^2 + 8}}{\sqrt{x^2 + 8}} = -\frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 8}}.$$

2°/a) $\forall x \in \mathbf{R}$, on a : $x^2 + 8 > x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2 + 8} > |x|$ or $|x| \geq x$ donc $\sqrt{x^2 + 8} > x$ d'où $\sqrt{x^2 + 8} - x > 0$ et par suite $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) > 0$.

b) on a $\forall x \in \mathbf{R}$, $f'(x) = -\frac{f(x)}{\sqrt{x^2 + 8}}$ et $f(x) > 0$ donc $\forall x \in \mathbf{R}$,

$f'(x) < 0$ et par suite f est strictement décroissante sur $\mathbf{R}$.

3°/a) f est continue et strictement décroissante sur $\mathbf{R}$ donc f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur l'intervalle $J =]\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x), \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)[$.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \sqrt{x^2 + 8} - x = +\infty.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x^2 + 8} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 8 - x^2}{\sqrt{x^2 + 8} + x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-8}{\sqrt{x^2 + 8} + x} = 0$$

donc $J =]0, +\infty[$.

b) $f^{-1} :]0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto f^{-1}(x) = y$$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 8} - y = x \Leftrightarrow \sqrt{y^2 + 8} = x + y \Rightarrow$$

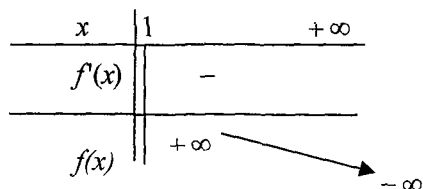
$$y^2 + 8 = (x + y)^2 \Rightarrow y^2 + 8 = x^2 + y^2 + 2xy \Rightarrow y = \frac{8 - x^2}{2x}$$

$$\text{donc } \forall x \in]0, +\infty[, f^{-1}(x) = \frac{8 - x^2}{2x}.$$

Solution 6 :

1°/ f est définie, continue et dérivable sur $]1, +\infty[$ et $\forall x \in]1, +\infty[$,

$$f'(x) = \frac{-1}{(x-1)^2} - \frac{1}{2\sqrt{x}} < 0.$$



2°/a) f est continue et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$ donc f réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $\mathbf{R}$ et comme $0 \in \mathbf{R}$ donc 0 admet

un seul antécédent $\alpha \in]1, +\infty[$ par f et par suite l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution $\alpha \in]1, +\infty[$.

b) On a $\begin{cases} f(1,44) \cdot f(2) < 0 \text{ et} \\ f \text{ est continue sur } [1,44; 2] \end{cases}$ donc $1,44 < \alpha < 2$.

$$3^\circ/ f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{x-1} = \sqrt{x} \Leftrightarrow x-1 = \frac{1}{\sqrt{x}} \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{x}} = x.$$

$$4^\circ/a) \text{ On a } f(\alpha) = 0 \Rightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{\alpha}} = \alpha \Rightarrow g(\alpha) = \alpha.$$

b) • g est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$ et

$$\forall x \in]0, +\infty[, g'(x) = -\frac{1}{2x\sqrt{x}} < 0 \text{ donc } g \text{ est strictement}$$

décroissante sur $]0, +\infty[$ et comme g est continue sur $]0, +\infty[$

donc g réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur l'intervalle

$$J =]\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x), \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x)[.$$

$$\text{or } \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 1 \text{ donc } J =]1, +\infty[.$$

$$c) g^{-1} :]1, +\infty[\rightarrow]0, +\infty[$$

$$x \mapsto g^{-1}(x) = y$$

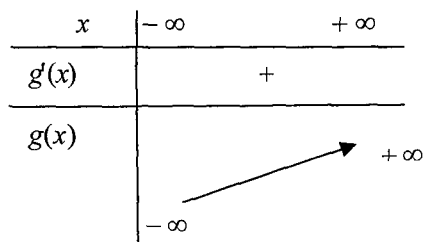
$$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x \Leftrightarrow 1 + \frac{1}{\sqrt{y}} = x \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{y}} = x - 1 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt{y} = \frac{1}{x-1} \Rightarrow y = \frac{1}{(x-1)^2} \quad \text{d'où } \forall x \in]1, +\infty[, g^{-1}(x) = \frac{1}{(x-1)^2}.$$

Solution 7 :

1^o/a) g est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$g'(x) = 3x^2 - 2x + 3 \quad \Delta' = -8 < 0 \text{ donc } \forall x \in \mathbf{R}, g'(x) > 0$$



b) g est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$ donc g réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $g(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ et comme $0 \in \mathbf{R}$ donc 0 admet un seul antécédent $\alpha \in \mathbf{R}$ par g et par conséquent il existe un seul réel α solution de l'équation $g(x) = 0$.

c) On a :
$$\begin{cases} g(-\frac{1}{3}) \cdot g(0) < 0 \text{ et} \\ g \text{ est continue sur } [-\frac{1}{3}, 0] \end{cases} \quad \text{donc } -\frac{1}{3} < \alpha < 0.$$

2°/ D'après le tableau de variations de g on a :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$		0	
		$\nearrow$	
	$-\infty$		$+\infty$

d'où :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$		0	
	$-$		$+$

3°/ a) on a $g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^3 - \alpha^2 + 3\alpha + 1 = 0 \Rightarrow \alpha(\alpha^2 + 3) = \alpha^2 - 1$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{\alpha^2 - 1}{\alpha^2 + 3} \text{ d'où } h(\alpha) = \alpha.$$

b) h est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$h'(x) = \frac{2x(x^2 + 3) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 3)^2} = \frac{8x}{(x^2 + 3)^2}$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$		0	
	$-$		$+$
$h(x)$	1	$-\frac{1}{3}$	1

Solution 8 :

1°/ φ est définie, continue et dérivable sur $[0, \pi]$ et $\forall x \in [0, \pi]$,
 $\varphi'(x) = -4 \sin x \leq 0$

x	0		π
$\varphi'(x)$	0	-	0
$\varphi(x)$	5		-3

2°/a) φ est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$ donc φ réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $[-3, 5]$ et comme $0 \in [-3, 5]$ donc 0 admet un seul antécédent $\alpha \in [0, \pi]$ par φ et par suite l'équation $\varphi(x) = 0$, admet une seule solution $\alpha \in [0, \pi]$.

b) on a :
$$\begin{cases} \varphi(\frac{\pi}{2}) \cdot \varphi(\frac{2\pi}{3}) < 0 \text{ et} \\ \varphi \text{ est continue sur } [\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}] \end{cases} \text{ donc } \frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{2\pi}{3}.$$

c) D'après le tableau des variations de φ on a :

x	0	α	π
$\varphi(x)$	5	0	-3
x	0	α	π
$\varphi(x)$	+	0	-

3°/a) La fonction $x \mapsto \cos x$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et en particulier sur $[0, \pi]$; et la fonction $x \mapsto 2x^2 + x - 1$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ donc f est dérivable sur $[0, \pi]$ comme composée de ces deux fonctions ; et $\forall x \in [0, \pi]$,

$$f'(x) = -4 \cos x \cdot \sin x - \sin x = -\sin x \cdot (4 \cos x + 1) = -\sin x \cdot \varphi(x).$$

b) $f(\alpha) = 2\cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1$ or $\varphi(\alpha) = 0 \Rightarrow 1 + 4\cos \alpha = 0 \Rightarrow \cos \alpha = -\frac{1}{4}$ d'où $f(\alpha) = 2(-\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{4} - 1 = -\frac{9}{8}$.

c) f est définie, continue et dérivable sur $[0, \pi]$ et $\forall x \in [0, \pi]$, $f'(x) = -\sin x \cdot \varphi(x)$ or sur $[0, \pi]$, $\sin x \geq 0$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de $-\varphi(x)$ d'où le tableau des variations de f :

x	0		α		π
$f'(x)$	0	-	0	+	0
$f(x)$	2		$-\frac{9}{8}$		0

Solution 9 :

1°/

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x} + 2x}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x}(1 + 2\sqrt{x})}{\sqrt{x}^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1 + 2\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = +\infty$$

donc f n'est pas dérivable à droite en 0, et par conséquent la courbe de f admet une demi tangente verticale au point d'abscisse 0.

2°/ f est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et $\forall x \in \mathbf{R}_+$,

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} + 2 > 0$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$+\infty$

3°/ f est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$ donc f réalise une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur $f(\mathbf{R}_+) = [1, +\infty[$.

4°/ $f^{-1} : [1, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}_+$

$$x \mapsto f^{-1}(x) = y$$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \sqrt{y} + 2y + 1 = x.$$

Posons $t = \sqrt{y} \Rightarrow$ l'équation devient : $2t^2 + t + 1 - x = 0$

$$\Delta = 8x - 7 \Rightarrow t' = \frac{-1 - \sqrt{8x-7}}{4} \text{ et } t'' = \frac{-1 + \sqrt{8x-7}}{4}$$

On a $t' < 0$ donc cette solution est à rejeter d'où $\sqrt{y} = \frac{-1 + \sqrt{8x-7}}{4}$

$$\text{et par suite } y = \left(\frac{\sqrt{8x-7}-1}{4} \right)^2 = \frac{4x-3-\sqrt{8x-7}}{8}.$$

Conclusion : $\forall x \in [1, +\infty[$, $f^{-1}(x) = \frac{4x-3-\sqrt{8x-7}}{8}$.

Solution 10 :

1°/ f est définie, continue et dérivable sur $[0, \pi]$ et $\forall x \in [0, \pi]$, $f'(x) = -2\sin x$. Or $\forall x \in [0, \pi]$, $\sin x \geq 0$ d'où $\forall x \in [0, \pi]$, $f'(x) \leq 0$.

x	0		π
$f'(x)$	0	-	0
$f(x)$	5		1

2°/ f est continue et strictement décroissante sur $[0, \pi]$ donc f réalise une bijection de $[0, \pi]$ sur $f([0, \pi]) = [1, 5]$.

3°/ a) • $g(5) = x \Leftrightarrow f(x) = 5 \Leftrightarrow 2\cos x + 3 = 5 \Leftrightarrow \cos x = 1 \Leftrightarrow x = 0$ (car $x \in [0, \pi]$) donc $g(5) = 0$.

$$\bullet g(3) = x \Leftrightarrow f(x) = 3 \Leftrightarrow \cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} \text{ donc } g(3) = \frac{\pi}{2}$$

(car $x \in [0, \pi]$).

b) f est dérivable sur $]0, \pi[$ et $\forall x \in]0, \pi[$, $f'(x) \neq 0$ donc g est dérivable sur $f(]0, \pi[) =]1, 5[$.

$$4^\circ/ \text{ Soit } x \in]1, 5[, g'(x) = \frac{1}{f'[f^{-1}(x)]} = \frac{1}{f'[g(x)]} = \frac{-1}{2\sin[g(x)]} = \frac{-1}{2\sin y}$$

avec $y = g(x)$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } y = g(x) &\Rightarrow x = f(y) \Rightarrow 2\cos y + 3 = x \Rightarrow \cos y = \frac{x-3}{2} \Rightarrow \\ \cos^2 y &= \frac{(x-3)^2}{4} \Rightarrow 1 - \sin^2 y = \frac{x^2 - 6x + 9}{4} \Rightarrow \sin^2 y = \frac{-x^2 + 6x - 5}{4} \\ &\Rightarrow \sin y = \frac{\sqrt{-x^2 + 6x - 5}}{2} \text{ car } y \in]0, \pi[. \end{aligned}$$

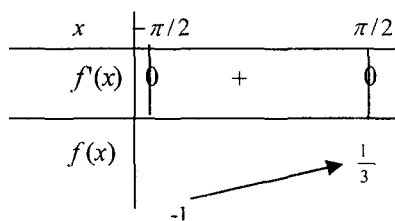
$$\text{D'où : } g'(x) = \frac{-1}{\sqrt{-x^2 + 6x - 5}}.$$

Solution 11 :

1°/ f est définie, continue et dérivable sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ et $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$,

$$f'(x) = \frac{\cos x(2 + \sin x) - \cos x \sin x}{(2 + \sin x)^2} = \frac{2 \cos x}{(2 + \sin x)^2}. \text{ Le signe de } f'(x)$$

est celui de $\cos x$. Or $\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $\cos x \geq 0$



2°/ f est continue et strictement croissante sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ donc f réalise

une bijection de $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ sur $f([-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]) = [-1, \frac{1}{3}]$.

3°/a) • $g(0) = x \Leftrightarrow f(x) = 0 \Leftrightarrow \sin x = 0 \Leftrightarrow x = 0$ (car

$\forall x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$) donc $g(0) = 0$.

$$\bullet g\left(\frac{1}{5}\right) = x \Leftrightarrow f(x) = \frac{1}{5} \Leftrightarrow \frac{\sin x}{2 + \sin x} = \frac{1}{5} \Leftrightarrow 5 \sin x = 2 + \sin x$$

$$\Leftrightarrow \sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} \text{ d'où } g\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{\pi}{6}.$$

b) f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) \neq 0$ donc

g est dérivable sur $f(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) =]-1, \frac{1}{3}[$.

4°/ Soit $x \in]-1, \frac{1}{3}[$, $g'(x) = \frac{1}{f'[g(x)]}$.

Posons $g(x) = y \Rightarrow g'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{(2 + \sin y)^2}{2 \cos y}$.

Or $g(x) = y \Rightarrow f(y) = x \Rightarrow \frac{\sin y}{2 + \sin y} = x \Rightarrow \sin y = 2x + x \sin y$

$$\Rightarrow \sin y = \frac{2x}{1-x} \Rightarrow (2 + \sin y)^2 = \frac{4}{(1-x)^2} \text{ et } \cos y = \sqrt{1 - \sin^2 y}$$

$$\Rightarrow \cos y = \sqrt{1 - \frac{4x^2}{(1-x)^2}} = \frac{\sqrt{1-2x-3x^2}}{|1-x|} = \frac{\sqrt{1-2x-3x^2}}{1-x} \text{ (car}$$

$$x \in]-1, \frac{1}{3}[)$$

$$g'(x) = \frac{\frac{4}{(1-x)^2}}{\frac{\sqrt{1-2x-3x^2}}{1-x}} = \frac{2}{(1-x)\sqrt{-3x^2-2x+1}}.$$

Conclusion : $\forall x \in]-1, \frac{1}{3}[$, $g'(x) = \frac{2}{(1-x)\sqrt{-3x^2-2x+1}}$.

Solution 12 :

1°/ • On a $\forall x \in \mathbf{R}$, $x^2 + 2x + 2 > 0$ (car $\Delta < 0$) donc la fonction

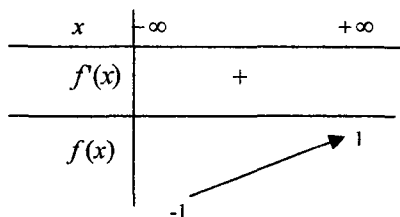
$x \mapsto \sqrt{x^2 + 2x + 2}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et comme la fonction

$x \mapsto x + 1$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ donc f est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme quotient de ces 2 fonctions.

$$\begin{aligned} \bullet \forall x \in \mathbf{R}, f'(x) &= \frac{\sqrt{x^2 + 2x + 2} - \frac{2(x+1)}{2\sqrt{x^2 + 2x + 2}} \cdot (x+1)}{x^2 + 2x + 2} \\ &= \frac{x^2 + 2x + 2 - (x+1)^2}{\sqrt{(x^2 + 2x + 2)^2} \cdot \sqrt{x^2 + 2x + 2}} = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 2x + 2)^3}}. \end{aligned}$$

2°/a) f est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{(x^2 + 2x + 2)^3}} > 0.$$



$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x+1}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{-x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}} = -1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x(1+\frac{1}{x})}{x\sqrt{1+\frac{2}{x}+\frac{2}{x^2}}} = 1.$$

b) f est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$ donc f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $f(\mathbf{R}) =]-1, 1[$.

$$\begin{aligned} 3^\circ/a) \quad f\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right) &= \frac{\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - 1 + 1}{\sqrt{\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right)^2 + 2\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right) + 2}} \\ &= \frac{x}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{\frac{x^2}{1-x^2} - \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}} + 1 + \frac{2x}{\sqrt{1-x^2}}}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^2} \sqrt{\frac{1}{1-x^2}}} = x. \end{aligned}$$

$$b) \text{ on a } \forall x \in]-1, 1[, \quad f\left(\frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - 1\right) = x \Rightarrow$$

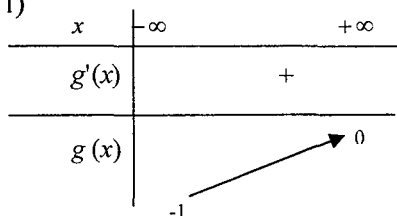
$$f^{-1}(x) = \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} - 1.$$

Solution 13 :

1°/ g est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$g'(x) = \frac{1}{2} \left[\frac{\sqrt{x^2+1} - \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \cdot x}{x^2+1} \right] = \frac{1}{2} \frac{x^2+1-x^2}{(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{(x^2+1)^3}} > 0$$



$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{-2x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - \frac{1}{2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - \frac{1}{2} = -1.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2x\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}} - \frac{1}{2} = 0.$$

2°/ g est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$ donc g réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $g(\mathbf{R}) =]-1, 0[$.

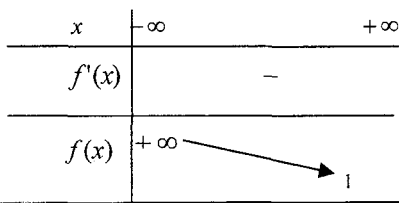
3°/a) On a : $\forall x \in \mathbf{R}$, $x^2+1 > 0$ donc la fonction $x \mapsto \frac{1}{2}\sqrt{x^2+1}$ est

dérivable sur $\mathbf{R}$ et comme la fonction $x \mapsto \frac{-x}{2} + 1$ est dérivable sur $\mathbf{R}$

donc f est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme somme de ces 2 fonction dérivables.

$$\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} = g(x).$$

b) On a $g(\mathbf{R}) =]-1, 0[$ donc $\forall x \in \mathbf{R}$, $g(x) < 0$ et par suite $\forall x \in \mathbf{R}$, $f'(x) < 0$.



$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2}(\sqrt{x^2+1} - x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2} \frac{x^2+1-x^2}{\sqrt{x^2+1}+x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x} = 1. \end{aligned}$$

c) f est continue et strictement décroissante sur $\mathbf{R}$ donc f réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $f(\mathbf{R}) =]1, +\infty[$.

$$4^\circ / f^{-1} :]1, +\infty[\rightarrow \mathbf{R}$$

$$x \mapsto f^{-1}(x) = y.$$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow -\frac{y}{2} + 1 + \frac{1}{2}\sqrt{y^2+1} = x \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2}\sqrt{y^2+1} = x - 1 + \frac{y}{2} \Rightarrow \frac{y^2+1}{4} = (x-1)^2 + (x-1) \cdot y + \frac{y^2}{4} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{4(x-1)} + 1 - x.$$

$$\text{Conclusion : } \forall x \in]1, +\infty[, f^{-1}(x) = \frac{1}{4(x-1)} + 1 - x.$$

Solution 14 :

1^o/a) • La fonction $x \mapsto 2x - x^2$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ et

$\forall x \in]0, 2[, 2x - x^2 > 0$ donc f est dérivable sur $]0, 2[$.

• Dérivabilité de f à droite en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2x - x^2}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2x - x^2}}{\sqrt{x^2}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{2x - x^2}{x^2}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{2}{x} - 1} = +\infty \text{ donc } f \text{ n'est pas dérivable à droite en } 0.$$

• Dérivabilité de f à gauche en 2 :

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{f(x) - f(2)}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{\sqrt{2x - x^2}}{x - 2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x - x^2}{(x-2)\sqrt{2x-x^2}} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-x}{\sqrt{2x-x^2}} = -\infty$$

Donc f n'est pas dérivable à gauche en 2.

Conclusion : Le domaine de dérivabilité de f est $]0, 2[$.

2°/ f est définie et continue sur $[0, 2]$ et dérivable sur $]0, 2[$ et :

$$\forall x \in]0, 2[, f'(x) = \frac{2-2x}{2\sqrt{2x-x^2}} = \frac{1-x}{\sqrt{2x-x^2}}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $1-x$.

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$1-x$	$+$	0	$-$

D'où le tableau des variations de f :

x	0	1	2
$f'(x)$		0	
$f(x)$	0	1	0

$$3^\circ/ f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{2x-x^2} = x \Leftrightarrow 2x-x^2 = x^2 \Leftrightarrow 2x^2-2x = 0 \Leftrightarrow x(x-1) = 0 \Leftrightarrow x=0 \text{ ou } x=1 \Rightarrow S_R = \{0, 1\}.$$

4°/a) φ est continue et strictement croissante sur $[0, 1]$ donc φ réalise une bijection de $[0, 1]$ sur $\varphi([0, 1]) = [0, 1]$.

$$b) \varphi^{-1} : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$$

$$x \mapsto \varphi^{-1}(x) = y$$

$$\varphi^{-1}(x) = y \Leftrightarrow \varphi(y) = x \Leftrightarrow \sqrt{2y-y^2} = x \Leftrightarrow 2y-y^2 = x^2 \Leftrightarrow y^2-2y+x^2 = 0. \text{ On a : } \Delta' = 1-x^2 \text{ d'où } y' = 1-\sqrt{1-x^2} \text{ et}$$

$y'' = 1 + \sqrt{1-x^2}$, or $y \in [0,1]$ donc la solution valable est

$y' = 1 - \sqrt{1-x^2}$ car $y'' \geq 1$ donc $\forall x \in [0,1]$, $\varphi^{-1}(x) = 1 - \sqrt{1-x^2}$.

Solution 15 :

1°/ g est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$,

$g'(x) = 3x^2 + 12$. On a $\forall x \in \mathbf{R}$, $g'(x) > 0$ d'où :

x	$-\infty$	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

2°/a) g est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$ donc g réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$ et comme $0 \in \mathbf{R}$ donc 0 admet un seul antécédent α par g ce qui prouve qu'il existe un seul réel α tel que $g(\alpha) = 0$. D'autre part on a $g(0) \cdot g(1) < 0$ et g est continue sur $[0,1]$ donc $0 < \alpha < 1$.

b) D'après le tableau des variations de g on a :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

d'où le tableau de signe de $g(x)$:

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

3°/a) f est définie sur $\mathbf{R}$ et f est une fonction rationnelle donc f est dérivable sur $\mathbf{R}$.

$\forall x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = \frac{3x^2(x^2+4) - 2x(x^3+1)}{(x^2+4)^2} = \frac{x(x^3+12x-2)}{(x^2+4)^2} = \frac{x \cdot g(x)}{(x^2+4)^2}$$

b) On a $g(\alpha) = 0 \Rightarrow \alpha^3 + 12\alpha - 2 = 0 \Rightarrow \alpha^3 = 2 - 12\alpha$ donc

$$f(\alpha) = \frac{\alpha^3 + 1}{\alpha^2 + 4} = \frac{2 - 12\alpha + 1}{\alpha^2 + 4} = \frac{3 - 12\alpha}{\alpha^2 + 4}.$$

4°/ f est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = \frac{x \cdot g(x)}{(x^2 + 4)^2}.$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $x \cdot g(x)$.

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$
x	-	0	+	+
$g(x)$	-	-	0	+
$x \cdot g(x)$	+	0	-	+

D'où le tableau de variations de f :

x	$-\infty$	0	α	$+\infty$	
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow \frac{1}{4}$	$\searrow \frac{3-12\alpha}{\alpha^2+4}$	$\nearrow +\infty$	

Solution 16 :

1°/ f est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ comme étant fonction rationnelle.

$$\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = \frac{2x(x^2 + 1) - 2x(x^2 - 1)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de x d'où le tableau des variations de f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$		0	
		$-$	$+$
$f(x)$	1		1

• f est continue sur $\mathbf{R}$ donc $f(\mathbf{R})$ est l'intervalle $[-1, 1]$.

$$2^\circ / f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = x \Leftrightarrow x^2 - 1 = x^3 + x \Leftrightarrow x^3 - x^2 + x + 1 = 0$$

Conclusion : (E) est équivalente à $g(x) = 0$ où $g(x) = x^3 - x^2 + x + 1$.

3°/ g est continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ comme étant fonction polynôme,
 $g'(x) = 3x^2 - 2x + 1$.

$$3x^2 - 2x + 1 = 0, \Delta = 4 - 12 = -8 < 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbf{R}, g'(x) > 0.$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$g(x)$		
	$-\infty$	$+\infty$

g est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$ donc g est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $g(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ et par suite 0 admet un seul antécédent $\alpha \in \mathbf{R}$ par g .

Conclusion : (E) admet une solution α . α est l'abscisse du point d'intersection de la courbe de f et de la droite Δ d'équation $y = x$.

4°/a) φ est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$ donc φ est une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur $\varphi(\mathbf{R}_+) = [-1, 1]$.

b) $\varphi^{-1} : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}_+$

$$x \mapsto \varphi^{-1}(x) = y$$

$$\varphi^{-1}(x) = y \Leftrightarrow \varphi(y) = x \Leftrightarrow \frac{y^2 - 1}{y^2 + 1} = x \Leftrightarrow y^2 - 1 = xy^2 + x$$

$$\Rightarrow y^2(1 - x) = x + 1$$

$$\text{or } x \neq 1 \text{ donc } y^2 = \frac{x + 1}{1 - x}$$

$$\text{or } x \in [-1, 1[\text{ donc } \frac{x + 1}{1 - x} > 0$$

$$|y| = \sqrt{\frac{x+1}{1-x}} \text{ or } y \in \mathbf{R}_+ \text{ d'où } y = \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}.$$

Conclusion : Pour tout $x \in [-1, 1[$, $\varphi^{-1}(x) = \sqrt{\frac{x+1}{1-x}}$.

Solution 17 :

1°/a) φ_α est dérivable sur $[0, \pi]$ comme composée et somme des fonctions dérivables sur $]0, \pi[$.

$$\forall x \in [0, \pi],$$

$$\begin{aligned} \varphi'_\alpha(x) &= \alpha[-\alpha \sin(\alpha x) \sin x + \cos(\alpha x) \cos x] - \alpha \cos(\alpha x) \cos x + \sin(\alpha x) \sin x \\ &= -\alpha^2 \sin(\alpha x) \sin x + \sin(\alpha x) \sin x = (1 - \alpha^2) \sin(\alpha x) \sin x \end{aligned}$$

$$\text{Or } 0 < \alpha < 1 \Rightarrow 1 - \alpha^2 > 0 \text{ et } 0 \leq x \leq \pi \Rightarrow 0 \leq \alpha x \leq \pi$$

$$\Rightarrow \sin(\alpha x) \geq 0 \text{ et } \sin x \geq 0.$$

$$\text{D'où } \forall x \in [0, \pi], \varphi'_\alpha(x) \geq 0.$$

x	0		π
$\varphi'_\alpha(x)$	0	+	0
$\varphi_\alpha(x)$	0		$\sin(\alpha\pi)$

b) D'après le tableau des variations de φ_α , 0 est un minimum absolu sur $[0, \pi]$ donc $\forall x \in [0, \pi]$, $\varphi_\alpha(x) \geq 0$ et comme $\varphi_\alpha(0) = 0$ et φ_α est strictement croissante sur $[0, \pi]$ donc $\forall x \in [0, \pi]$, $\varphi_\alpha(x) > 0$.

$$2^\circ/a) \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f_\alpha(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{\sin(\alpha x)}{x}}{\frac{\sin x}{x}} = \alpha$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin(\alpha x)}{x} = \alpha \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \pi^-} f_\alpha(x) = \lim_{x \rightarrow \pi^-} \frac{\sin(\alpha x)}{\sin x} = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow \pi^-} \sin(\alpha x) = \sin(\alpha\pi) > 0 \text{ car } 0 < \alpha\pi < \pi \text{ et } \lim_{x \rightarrow \pi^-} \sin x = 0^+.$$

b) f_α est définie, continue et dérivable sur $]0, \pi[$ et $\forall x \in]0, \pi[$,

$$f'_\alpha(x) = \frac{\alpha \cos(\alpha x) \sin x - \cos x \sin(\alpha x)}{(\sin x)^2} = \frac{\varphi'_\alpha(x)}{(\sin x)^2} > 0$$

x	0	π
$f_\alpha(x)$		+
$f_\alpha(x)$		$+\infty$
	α	

$$\begin{aligned}
 \text{c) } f_\alpha\left(\frac{\pi}{\alpha+1}\right) &= \frac{\sin\left(\alpha \frac{\pi}{\alpha+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha+1}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\alpha\pi + \pi - \pi}{\alpha+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha+1}\right)} \\
 &= \frac{\sin\left(\pi - \frac{\pi}{\alpha+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha+1}\right)} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha+1}\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{\alpha+1}\right)} = 1.
 \end{aligned}$$

3°/ f_α est continue et strictement croissante sur $]0, \pi[$ donc f_α est une bijection de $]0, \pi[$ sur $]\alpha, +\infty[$ et comme $\alpha + \frac{1-\alpha^2}{2} \in]\alpha, +\infty[$ donc il admet un seul antécédent de $]0, \pi[$ par f_α ce qui prouve que (E) admet une solution dans $]0, \pi[$.

Solution 18 :

1°/ a) f est définie, continue et dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, f'(x) = 1 + \tan^2 x > 0$$

x	$-\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		+
$f(x)$		$+\infty$
	$-\infty$	

$$\text{b) } \Delta: y = f'(0)x + f(0) \Rightarrow \Delta: y = x.$$

c) Etudions le signe de $f(x) - x$.

Soit $g(x) = f(x) - x$; g est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[, g'(x) = f'(x) - 1 = \tan^2 x \geq 0.$$

x	$-\frac{\pi}{2}$	0	$\frac{\pi}{2}$	
$g'(x)$		$+$	0	$+$
$g(x)$		$-\infty$	0	$+\infty$

D'après le tableau des variations de g on a :

- $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[: g(x) < 0 \Rightarrow C_f$ est au dessous de Δ .
- $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[: g(x) > 0 \Rightarrow C_f$ est au dessus de Δ .
- C_f rencontre Δ au point $O(0, 0)$.

2°/a) f est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc f est bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $f(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) = \mathbf{R}$.

Soit $x \in \mathbf{R}$, $g'(x) = \frac{1}{f'(y)}$ où $y = g(x)$

$$g'(x) = \frac{1}{1 + \tan^2 y} \text{ or } y = g(x) \Leftrightarrow x = f(y) \Leftrightarrow x = \tan y$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \tan^2 y \text{ et par suite } \forall x \in \mathbf{R}, g'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$c) \begin{cases} g(1) = x \\ x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ donc } g(1) = \frac{\pi}{4}.$$

$$\begin{cases} g(\sqrt{3}) = x \\ x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan x = 1 \\ x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3}.$$

3°/a) Montrons que $\forall x \in \mathbf{R}, g(-x) = g(x)$.

Soit $h(x) = g(-x)$; h est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$

$$, h'(x) = -g'(-x) = -g'(x).$$

Soit $k(x) = -g(x)$; k est dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}, k'(x) = -g'(x)$ donc

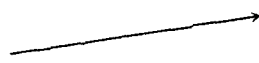
$$\forall x \in \mathbf{R}, h(x) = k(x).$$

Conclusion : $\forall x \in \mathbf{R}, g(-x) = -g(x)$ ce qui prouve que g est impaire.

$$b) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - g(0)}{x - 0} = g'(0) = 1 \text{ car } g'(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

4°/ a) Soit $h(x) = x - g(x)$ et $x \geq 0$. h est continue, dérivable sur $[0, +\infty[$,

$$h'(x) = 1 - g'(x) = 1 - \frac{1}{1+x^2} = \frac{x^2}{1+x^2} \geq 0.$$

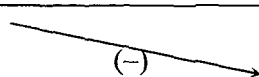
x	0	$+\infty$
$h'(x)$	0	+
$h(x)$	0	

$\forall x > 0$ on a : $h(x) > 0$ d'où $0 < x - g(x)$.

• Soit $k(x) = x - g(x) - \frac{x^3}{3}$ ($x \geq 0$)

k est continue, dérivable sur $\mathbf{R}_+$

$$k'(x) = 1 - g'(x) - x^2 = \frac{x^2}{1+x^2} - x^2 = \frac{-x^4}{1+x^2} \leq 0$$

x	0	$+\infty$
$k'(x)$	0	-
$k(x)$	0	

d'où $\forall x > 0$ on a : $k(x) < 0$ d'où $x - g(x) < \frac{x^3}{3}$.

b) $\forall x > 0$ on a : $0 < x - g(x) < \frac{x^3}{3}$ d'où $-\frac{x}{3} < \frac{g(x) - x}{x^2} < 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} -\frac{x}{3} = 0 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - x}{x^2} = 0$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - x}{x^2} &= \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(-t) + t}{t^2} \quad (t = -x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^-} -\left(\frac{g(t) - t}{t^2}\right) = 0 \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{g(x) - x}{x^2} = 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - x}{x^2} = 0.$$

5°/ Soit $\phi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$

$$x \mapsto \begin{cases} \frac{g(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$D_\phi = \mathbf{R}; \forall x \in \mathbf{R}, -x \in \mathbf{R}.$$

$$\bullet \phi(-0) = \phi(0)$$

$$\bullet \forall x \neq 0, \phi(-x) = \frac{g(-x)}{-x} = \frac{-g(x)}{-x} = \frac{g(x)}{x} = \phi(x)$$

donc ϕ est une fonction paire.

b) $\bullet \phi$ est continue sur $\mathbf{R}^*$ comme étant le quotient de deux fonctions continues. ($g = f^{-1}$ est continue sur $\mathbf{R}$ comme étant la réciproque d'une fonction continue).

• Continuité de ϕ en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \phi(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x)}{x} = 1 = \phi(0) \Rightarrow \phi \text{ est continue en } 0.$$

Conclusion : ϕ est continue sur $\mathbf{R}$.

c) $\bullet \phi$ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ comme étant le quotient de fonctions dérivables.

• Dérivabilité de ϕ en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\phi(x) - \phi(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{g(x)}{x} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{g(x) - x}{x^2} = 0.$$

Conclusion : ϕ est dérivable sur $\mathbf{R}$.

$$\text{d) On a : } \forall x \in \mathbf{R} : -\frac{\pi}{2} < g(x) < \frac{\pi}{2} \text{ d'où } |\phi(x)| = \left| \frac{g(x)}{x} \right| \leq \frac{\pi}{2|x|}.$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2|x|} = 0 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow -\infty} \phi = \lim_{x \rightarrow +\infty} \phi = 0$$

Solution 19 :

1°/

a) Les fonctions $x \mapsto \sqrt{\sin 2x}$ et $x \mapsto \frac{1}{\sin x}$ sont dérivables sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

donc f est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ comme produit de ces deux fonctions.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{f(x) - f\left(\frac{\pi}{2}\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{\sqrt{\sin(2x)}}{(x - \frac{\pi}{2}) \sin x}$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \sqrt{\frac{\sin(\pi-2x)}{\pi-2x}} \cdot \frac{-2\sqrt{\pi-2x}}{(\pi-2x)\sin x} \\
 &= \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \sqrt{\frac{\sin(\pi-2x)}{\pi-2x}} \cdot \frac{-1}{\sqrt{\pi-2x}} \cdot \frac{2}{\sin x} = -\infty
 \end{aligned}$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \sqrt{\frac{\sin(\pi-2x)}{\pi-2x}} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{\frac{\sin X}{X}} = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow \left(\frac{\pi}{2}\right)^-} \frac{-1}{\sqrt{\pi-2x}} \cdot \frac{2}{\sin x} = -\infty$$

Donc f n'est pas dérivable en $\frac{\pi}{2}$.

$$\begin{aligned}
 \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, f'(x) &= \frac{\frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin x}} \cdot \sin x - \cos x \sqrt{\sin 2x}}{(\sin x)^2} \\
 &= \frac{\cos(2x) \cdot \sin x - \cos x \sin(2x)}{\sqrt{\sin(2x)} \cdot (\sin x)^2} = \frac{\sin(x-2x)}{\sqrt{\sin(2x)} \cdot (\sin x)^2} = \frac{-1}{\sqrt{\sin(2x)} \cdot (\sin x)}
 \end{aligned}$$

(on rappelle que $\sin a \cos b - \cos b \sin a = \sin(a-b)$)

Or sur $]0, \frac{\pi}{2}[$, $\sin x > 0 \Rightarrow \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, f'(x) < 0$

x	0	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		-
$f(x)$	$+\infty$	0

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\sin 2x}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{\frac{\sin 2x}{2x}}}{\frac{\sin x}{x}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x}} = +\infty$$

2°/ f est continue et strictement décroissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ donc f est

une bijection de $]0, \frac{\pi}{2}]$ sur $(]0, \frac{\pi}{2}]) = [0, +\infty[= \mathbb{J}$

3°/

a) • g est continue sur $[0, +\infty[$ comme réciproque d'une fonction continue sur $]0, \frac{\pi}{2}]$.

• f est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) \neq 0$ donc

g est dérivable sur $f(]0, \frac{\pi}{2}[) =]0, +\infty[$.

• Etudions la dérivabilité de g à droite en 0.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g(x) - g(0)}{x} = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{y - \frac{\pi}{2}}{f(y)} = \lim_{y \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{1}{\frac{f(y) - f(\frac{\pi}{2})}{y - \frac{\pi}{2}}} = 0$$

car on a : montré précédemment que $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \frac{f(x) - f(\frac{\pi}{2})}{x - \frac{\pi}{2}} = -\infty$

donc g est dérivable en 0 et $g'_d(0) = 0$

Conclusion : g est dérivable sur $[0, +\infty[$.

b) Soit $x \in]0, +\infty[$, $g'(x) = \frac{1}{f'(y)}$ où $y = g(x)$

$$g'(x) = -\sin y \sqrt{\sin(2y)}$$

Or $y = g(x)$

$$\Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow x = \frac{\sqrt{\sin 2y}}{\sin y} \Leftrightarrow \sqrt{\sin 2y} = x \sin y \text{ donc}$$

$$g'(x) = -x \sin^2 y$$

$$\text{On a : } x^2 = \frac{\sin 2y}{\sin^2 y} \Rightarrow x^2 = \frac{2 \cos y}{\sin y}$$

$$\frac{\sin^2 y}{\cos^2 y} = \frac{\sin^2 y}{1 - \sin^2 y} = \frac{4}{x^4} \Rightarrow 4 - 4 \sin^2 y \Rightarrow \sin^2 y = \frac{4}{4 + x^4}$$

$$d'où g'(x) = \frac{-4x}{4 + x^4}$$

4°/

a) On a : g est dérivable sur $]0, +\infty[$,

$$x \mapsto \sqrt{2x} \text{ et } x \mapsto \sqrt{\frac{2}{x}} \text{ sont}$$

dérivables sur $\mathbb{R}_+^*$, donc φ est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme composée et somme des fonctions dérivables

b) $\forall x \in]0, +\infty[$,

$$\varphi'(x) = (\sqrt{2x})' \cdot g'(\sqrt{2x}) + \left(\sqrt{\frac{2}{x}}\right)' \cdot g'\left(\sqrt{\frac{2}{x}}\right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2x}} \cdot \frac{-4\sqrt{2x}}{4 + 4x^2} - \frac{1}{x^2 \sqrt{\frac{2}{x}}} \cdot \frac{-4\sqrt{\frac{2}{x}}}{\frac{4}{x^2} + 4} = \frac{-1}{x^2 + 1} + \frac{1}{x^2 + 1} = 0$$

D'où $\forall x \in]0, +\infty[$, $\varphi'(x) = 0$; $\varphi(1) = 2g(\sqrt{2})$

Cherchons le réel $x \in]0, \frac{\pi}{2}]$ tel que $g(\sqrt{2}) = x$:

$$g(\sqrt{2}) =$$

$$x \Leftrightarrow \sqrt{2} = f(x) \Leftrightarrow \sqrt{2} = \frac{\sqrt{\sin 2x}}{\sin x} \Leftrightarrow \frac{\sin^2 x}{\sin 2x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow$$

$$\frac{\sin^2 x}{2 \sin x \cos x} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} \text{ d'où } \varphi(1) = \frac{\pi}{2}$$

c) On a : $\forall x \in]0, +\infty[$, $\varphi'(x) = 0$ donc φ est une constante

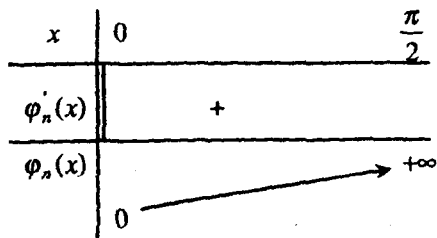
$$\Rightarrow \forall x \in]0, +\infty[, \varphi(x) = \varphi(1) = \frac{\pi}{2}.$$

Solution 20 :

1°/

a) φ_n est définie et continue sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et

$$\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \varphi'_n(x) = \frac{1}{n} (\tan x)^{\frac{1}{n}-1} \cdot (1 + \tan^2 x) = \frac{1 + \tan^2 x}{n} \cdot (\tan x)^{\frac{1-n}{n}}$$



b) φ_n est continue et strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ donc φ_n est une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $\varphi_n([0, \frac{\pi}{2}[) = [0, +\infty[= J$. Soit $\psi_n = \varphi_n^{-1}$

c)

• φ_n est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, \varphi'_n(x) \neq 0$ donc

ψ_n est dérivable sur $\varphi_n(]0, \frac{\pi}{2}[) =]0, +\infty[$.

• Etudions la dérivabilité de ψ_n à droite en 0 :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\psi_n(x) - \psi_n(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\psi_n(x)}{x} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{\varphi_n(y)} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{\sqrt[n]{\tan y}}$$

$$= \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{\tan y} \cdot \frac{\tan y}{\sqrt[n]{\tan y}} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{y}{\tan y} \cdot (\tan y)^{\frac{1}{n}-1} = 0$$

Car $\lim_{y \rightarrow 0} \frac{\tan y}{y} = 1$ et $\lim_{y \rightarrow 0} (\tan y)^{\frac{1}{n}-1} = 0$

Donc ψ_n est dérivable à droite en 0 et par suite ψ_n est dérivable sur $]0, +\infty[= E'$.

d) Soit $x \in E' =]0, +\infty[$; $\psi'_n(x) = \frac{1}{\varphi'_n(y)}$ où $y = \psi_n(x)$

$$\psi'_n(x) = \frac{n}{(1 + \tan^2 y)(\tan y)^{\frac{1}{n-1}}}. \text{ Or } y = \psi_n(x) \Leftrightarrow x = \varphi_n(y)$$

$$\Leftrightarrow x = \sqrt[n]{\tan y} \Leftrightarrow x^n = \tan y \text{ d'où } \psi'_n(x) = \frac{n}{(1+x^{2n})(x^n)^{\frac{1-n}{n}}} = \frac{nx^{n-1}}{1+x^{2n}}$$

$$\text{Conclusion : } \forall x \in]0, +\infty[, y = \psi_n(x) \quad \frac{nx^{n-1}}{1+x^{2n}}.$$

2°/ a) • $x \mapsto 1 + \tan^2 x$ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

et en particulier sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

• $x \mapsto -2\sqrt{\tan x}$ est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

donc N est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$

$$\begin{aligned} \bullet \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[, N'(x) &= 2 \tan x (1 + \tan^2 x) - \frac{1 + \tan^2 x}{\sqrt{\tan x}} \\ &= (1 + \tan^2 x) \left(2 \tan x - \frac{1}{\sqrt{\tan x}} \right) \end{aligned}$$

$$N'(x) = 0 \Leftrightarrow 2 \tan x = \frac{1}{\sqrt{\tan x}} \Leftrightarrow (\tan x)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\tan x)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{2}$$

Or la fonction $g :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow]0, +\infty[, x \mapsto \tan x$ est une bijection.

En effet, $g'(x) = 1 + \tan^2 x > 0 \Rightarrow g$ est continue et strictement

croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et par suite le réel $(\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}}$ admet un seul

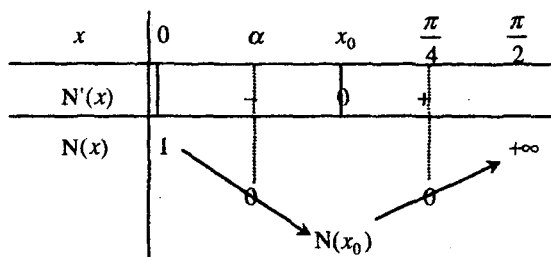
antécédent $x_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$ par g .

Il en résulte alors que l'équation $N'(x) = 0$, ($x_0 \in]0, \frac{\pi}{2}[$) admet une unique solution x_0 .

$$\bullet \text{ On a : } N'(x_0) = 0 \Leftrightarrow \tan x_0 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow N(x_0) &= 1 + \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}\right]^2 - 2\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{2}{3}}} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{4}{3}} - 2\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{1}{2} - 2\right) = 1 - \frac{3}{2^{\frac{3}{2}}} \end{aligned}$$

b) D'après la question précédente, $N'(x) = 0$ admet une seule solution x_0 dans $]0, \frac{\pi}{2}[$ et comme N' est continue sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ donc $N'(x)$ garde un signe constant sur chacun des intervalles $]0, x_0[$ et $]x_0, \frac{\pi}{2}[$ d'où :



Soit N_1 la restriction de N sur $[0, x_0]$ et N_2 la restriction de N sur $[x_0, \frac{\pi}{2}]$.

N_1 est une bijection de $]0, x_0[$ sur $[N(x_0), 1]$

Or $N(x_0) = 1 - \frac{3}{2^{\frac{3}{2}}} < 0$. Donc 0 admet un seul antécédent

$\alpha \in]0, x_0[$ par N_1 . N_2 est une bijection de $[x_0, \frac{\pi}{2}[$ sur

$[N(x_0), +\infty[$ donc 0 admet un seul antécédent $\beta \in]x_0, \frac{\pi}{2}[$ par N_2 .

Il en résulte que l'équation

$$\begin{cases} N(x) = 0 \\ x \in [0, \frac{\pi}{2}[\end{cases} \text{ admet deux solutions dont l'une est } \frac{\pi}{4} \text{ car } N(\frac{\pi}{4}) = 0$$

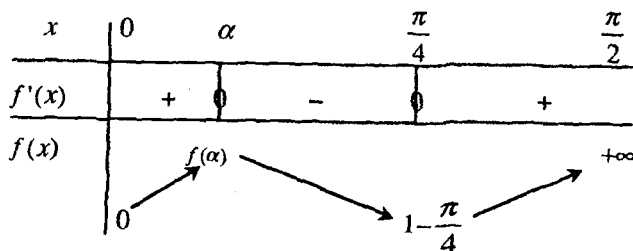
c) • f est définie, continue sur $[0, \frac{\pi}{2}[$.

• f est dérivable sur $]0, \frac{\pi}{2}[$ et non dérivable en 0, la courbe de f présente donc une demi tangente verticale au point $O(0,0)$ et $\forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$.

$$f'(x) = \frac{1 + \tan^2 x}{2\sqrt{\tan x}} - 1 = \frac{1 + \tan^2 x - 2\sqrt{\tan x}}{2\sqrt{\tan x}} = \frac{N(x)}{2\sqrt{\tan x}}$$

D'après l'étude faite en b), il en résulte que :

$$\forall x \in [0, \alpha] \cup [\frac{\pi}{4}, +\infty[, N(x) \geq 0 \text{ et } \forall x \in]\alpha, \frac{\pi}{4}[, N(x) < 0$$



• $f(\frac{\pi}{4}) = 1 - \frac{\pi}{4} > 0$ d'où, d'après le tableau des variations de f , on

a :

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, f(x) \geq 0.$$

Solution 21 :

$$1^\circ / \lim_{x \rightarrow 0^+} f = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1 - 1}{x(\sqrt{x^2 + 1} + 1)}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} = 0$$

$$\lim_{0^-} f = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{x}{2\sqrt{x^2 + 1}} = 0$$

On a : $\lim_{0^+} f = \lim_{0^-} f = f(0)$

D'où f est continue en 0

$$2^\circ / \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x^2}$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 + 1 - 1}{x^2 (\sqrt{x^2 + 1} + 1)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1} + 1} = \frac{1}{2} = f'_d(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{2\sqrt{x^2 + 1}} = \frac{1}{2}$$

f est dérivable à gauche en 0

Conclusion : f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$

3°/

a) La tangente à Cf au point d'abscisse 0 et pour équation

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

$$y = \frac{1}{2}x \quad \text{d'où } D : y = \frac{1}{2}x \text{ est la tangente à } Cf \text{ au point } 0$$

b) pour $x > 0$

$$\begin{aligned} d(x) = f(x) - y &= \frac{\sqrt{x^2 + 1} - 1}{x} - \frac{x}{2} = \frac{2\sqrt{x^2 + 1} - (2 + x^2)}{2x} \\ &= \frac{4(x^2 + 1) - (2 + x^2)^2}{2x(2\sqrt{x^2 + 1} + 2 + x^2)} \end{aligned}$$

$$d(x) = \frac{-x^3}{2(2\sqrt{x^2 + 1} + 2 + x^2)} < 0$$

Cf est en dessous de D sur $]0, +\infty[$

$$\begin{aligned}
 \text{Pour } x \leq 0 : d(x) = f(x) - y &= \frac{x}{2\sqrt{x^2+1}} - \frac{x}{2} = \frac{-x\sqrt{x^2+1}}{2\sqrt{x^2+1}} \\
 &= \frac{x(1-\sqrt{x^2+1})}{2\sqrt{x^2+1}} = \frac{x(1-\sqrt{x^2+1})(1+\sqrt{x^2+1})}{2\sqrt{x^2+1}(1+\sqrt{x^2+1})} \\
 &= \frac{-x^3}{2\sqrt{x^2+1}(1+\sqrt{x^2+1})} \geq 0
 \end{aligned}$$

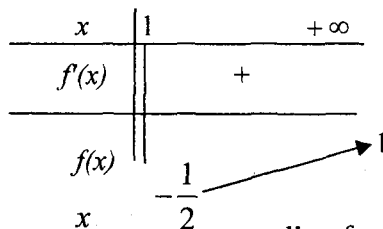
Cf est au dessus de D sur $] -\infty, 0]$.

4°/ pour $x > 0$:

$$\begin{aligned}
 f'(x) &= \frac{\frac{x^2}{\sqrt{x^2+1}} - (\sqrt{x^2+1} - 1)}{x^2} = \frac{x^2 - (x^2 + 1 - \sqrt{x^2+1})}{x^2\sqrt{x^2+1}} \\
 &= \frac{\sqrt{x^2+1} - 1}{x^2\sqrt{x^2+1}} = \frac{(\sqrt{x^2+1} - 1)(\sqrt{x^2+1} + 1)}{x^2\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1} + 1)} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{x^2+1}(\sqrt{x^2+1} + 1)}
 \end{aligned}$$

$$\text{Pour } x < 0 : f'(x) = \frac{2\sqrt{x^2+1} - 2x \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{4(x^2+1)} = \frac{1}{2(x^2+1)\sqrt{x^2+1}}$$

On a pour tout $x \in \mathbb{R} : f'(x) > 0$



$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f = \lim_{x \rightarrow -\infty} f \frac{x}{2\sqrt{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} f = \frac{x}{2|x|\sqrt{1+\frac{1}{x^2}}}$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} f = \frac{1}{-2\sqrt{1 + \frac{1}{x^2}}} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f = \lim_{x \rightarrow +\infty} f \frac{\sqrt{x^2 \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} f = \frac{\cancel{x} \sqrt{1 + \frac{1}{x^2}} - 1}{\cancel{x}} = \frac{1}{x}$$

$$= 1$$

b) On a : $\begin{cases} f \text{ est continue sur } \mathbb{R} \\ f \text{ est strictement croissante sur } \mathbb{R} \end{cases}$

D'où : f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur

$$J = f(\mathbb{R}) =] \lim_{x \rightarrow +\infty} f, \lim_{x \rightarrow -\infty} f [=] -\frac{1}{2}, 1 [$$

Solution 22:

A.

1°/ h est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$h'(x) = 3x^2 - 6x + 3 = 3(x^2 - 2x + 1) = 3(x-1)^2 \geq 0.$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$H(x)$	$+$	0	$+$
$h(x)$	$-\infty$		$+\infty$

2°/a) h est continue et strictement croissante sur $\mathbf{R}$ donc h réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$ et comme $0 \in \mathbf{R}$ donc 0 admet un seul antécédent $\alpha \in \mathbf{R}$ par $h \Rightarrow h(\alpha) = 0$.

b) On a : $\begin{cases} h(0,6) \cdot h(0,5) < 0 \text{ et} \\ h \text{ est continue sur } [-0,6; -0,5] \end{cases} \Rightarrow -0,6 < \alpha < -0,5.$

3°/ D'après le tableau de variations de h on a :

x	α	
$h(x)$	$\ominus$	$\oplus$
	$-\infty$	$+\infty$

Conclusion :

x	$-\infty$	α	$+\infty$
$h(x)$	-	0	+

B.1°/ f étant une fonction rationnelle donc f est dérivable sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$$\forall x \neq 1, f'(x) = \frac{(3x^2 - 3)(x - 1)^2 - 2(x^3 - 3x)(x - 1)}{(x - 1)^4}$$

$$= \frac{3(x^2 - 1)(x - 1) - 2(x^3 - 3x)}{(x - 1)^3}$$

$$= \frac{3x^3 - 3x^2 - 3x + 3 - 2x^3 + 6x}{(x - 1)^3}$$

$$\text{d'où : } \forall x \neq 1, f'(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 3x + 3}{(x - 1)^3} = \frac{h(x)}{(x - 1)^3}$$

2°/

x	$-\infty$	α	1	$+\infty$
$(x-1)^3$	-	-	0	+
$h(x)$	-	0	+	+
$f'(x)$	+	0	-	+

d'où :

x	$-\infty$	α	1	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-	+
$f(x)$	$-\infty$	$f(\alpha)$	$-\infty$	$+\infty$

$$3^\circ/ \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 - 3}{(x - 1)^2} \quad \text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1$$

$$f(x) - x = \frac{2x^2 - 4x}{(x - 1)^2} \quad \text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - x = 2$$

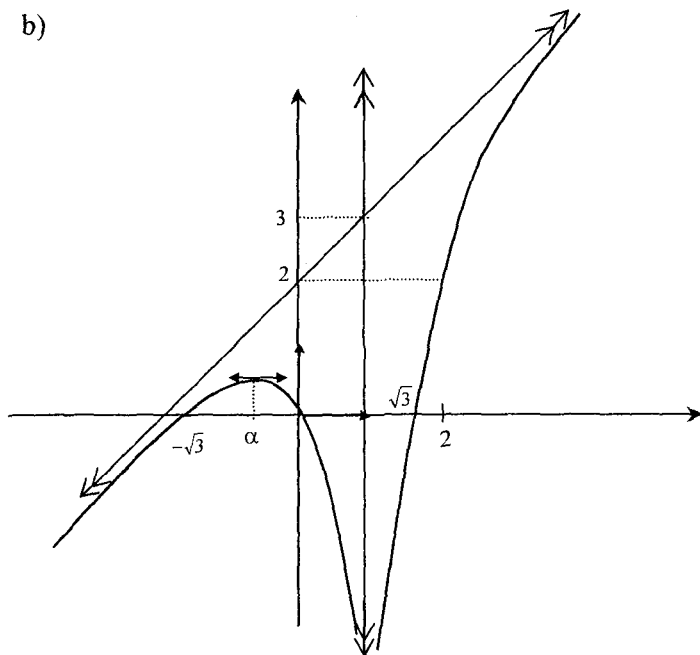
D'où la droite Δ d'équation $y = x + 2$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $\pm \infty$.

4°/a)

$$f(x) - y = \frac{x^3 - 3x}{(x-1)^2} - (x+2) = \frac{x^3 - 3x - (x+2)(x-1)^2}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$$

On a : $\forall x \neq 1, f(x) - y < 0$ d'où C_f est au dessous de Δ .

b)



$$f(\alpha) \approx f(-0,55) = \frac{(-0,55)^3 + 3(0,55)}{(-0,55-1)^2} \approx 0,6$$

$$(f(x) = 0 \Leftrightarrow x^3 - 3x = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\sqrt{3} \text{ ou } x = \sqrt{3})$$

Solution 23 :

A)

1°/ On a : $\forall x \in \mathbb{R}, -1 \leq \sin x \leq 1$ d'où $2x - 1 \leq f(x) \leq 2x + 1$

2°/

• Soit $M(x, y) \in C \cap D_1$. On a :
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 2x - 1 \end{cases}$$

$$f(x) = 2x - 1 \Leftrightarrow \sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z}$$

$$\text{D'où : } y = \pi - 1 + 4k\pi$$

$$C \cap D_1 = \left\{ A_k \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \pi - 1 + 4k\pi \right), k \in \mathbb{Z} \right\}$$

• Soit $M(x, y) \in C \cap D_2$. On a :
$$\begin{cases} y = f(x) \\ y = 2x + 1 \end{cases}$$

$$f(x) = 2x + 1 \Leftrightarrow \sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

$$C \cap D_2 = \left\{ B_k \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi, 3\pi + 1 + 4k\pi \right), k \in \mathbb{Z} \right\}$$

• Equation de la tangente à C au point A_k .

$$y = f' \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) \left(x - \frac{\pi}{2} - 2k\pi \right) + f \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right)$$

$$\text{or } f' \left(\frac{\pi}{2} + 2k\pi \right) = 2 - \cos \left(\frac{\pi}{2} - 2k\pi \right) = 2$$

$$\text{d'où : } y = 2 \left(x - \frac{\pi}{2} - 2k\pi \right) + \pi - 1 + 4k\pi \Rightarrow y = 2x - 1$$

d'où : $D_1 : y = 2x - 1$ est l'équation de la tangente à (C) au point A_k .

• Equation de la tangente à (C) au point B_k :

$$y = f' \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right) \left(x - \frac{3\pi}{2} - 2k\pi \right) + f \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right)$$

$$\text{or } f' \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right) = 2 - \cos \left(\frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right) = 2$$

$$y = 2 \left(x - \frac{3\pi}{2} - 2k\pi \right) + 3\pi - 1 + 4k\pi \Rightarrow y = 2x - 1$$

d'où $D_2 : y = 2x + 1$ est l'équation de la tangente à (C) au point B_k .

3°/a) On a : $\forall x \in \mathbb{R}, -x \in \mathbb{R} : f(-x) = -2x \sin x = -(2x - \sin x)$

$$= -f(x)$$

D'où f est une fonction impaire.

b) Le point O est un centre de symétrie de (C).

4°/

a)
$$f(x + 2\pi) = 2x + 4\pi - \sin(x + 2\pi) = 2x - \sin x + 4\pi$$

$$= f(x) + 4$$

b) Soit $T_{\vec{u}}$ la translation de vecteur $\vec{u} = 2k\pi \vec{i} + 4k\pi \vec{j}$.

Soit C_1 la courbe représentative de f sur $[-\pi, \pi]$.

Soit $C_2 = T_{\vec{u}}(C_1)$

Soit $M(x, y) \in C_2 \Leftrightarrow M = T_{\vec{u}}(N)$ où $N \in C_1 \Leftrightarrow \overrightarrow{NM} = \vec{u}$

$$\text{On a : } \begin{cases} x - x_N = 2k\pi \\ y - f(x_N) = 4k\pi \end{cases} \quad \text{où } -\pi \leq x_N \leq \pi$$

$$\text{On a : } y = f(x_N) + 4k\pi = f(x - 2k\pi) + 4k\pi = f(x)$$

$$-\pi \leq x_N \leq \pi \Leftrightarrow -\pi + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$$

$\Leftrightarrow -\pi + 2k\pi \leq x \leq \pi + 2k\pi$ d'où C_2 est la courbe représentative de f sur l'intervalle

$$[-\pi + 2k\pi, \pi + 2k\pi] \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

5°/Étudions les variations de f sur $[0, \pi]$

$$\forall x \in [0, \pi], f'(x) = 2 - \cos x > 0$$

x	0	π
$f'(x)$		+
$f(x)$	0	2π

L'équation de la tangente à (C) au point $O(0,0)$ est $y = x$

B)

$$1^\circ/ \forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = 2 - \cos x > 0$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} 2x + 1 = -\infty \quad \text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f = -\infty \quad (\text{d'après A}) \quad 1^\circ/)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 2x + 1 = +\infty \quad \text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f = +\infty$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'(x)$		+
$f(x)$	$-\infty$	$+\infty$

f est continue, strictement croissante sur $\mathbb{R}$ donc f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

Conclusion : f admet une application réciproque $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$.

$$2^\circ/\text{On a : } f(0) = 0 \quad \text{d'où} \quad f^{-1}(0) = 0 \Rightarrow g(0) = 0$$

$$f(\pi) = 2\pi \quad \text{d'où} \quad g(2\pi) = \pi, \quad f(2k\pi) = 4k\pi \quad \text{d'où} \quad g(4k\pi) = 2k\pi$$

3°/ On a : f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) \neq 0$ donc g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$g'(0) = \frac{1}{f'(g(0))} = \frac{1}{f'(0)} = 1, \quad g'(2\pi) = \frac{1}{f'(g(2\pi))} = \frac{1}{f'(\pi)} = \frac{1}{3}.$$

4°/ f étant une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ donc le réel m admet un seul antécédent par f , noté x_m .

D'où l'équation $2x - \sin x = m$ admet une seule solution x_m .

C)

1°/

$$a) \quad f(x) = 4 \Leftrightarrow 2x - \sin x = 4 \Leftrightarrow 2x = \sin x + 4$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(4 + \sin x) = x \Leftrightarrow \varnothing(x) = x$$

$$b) \quad |\varnothing'(x)| = \left| \frac{1}{2} \cos x \right| = \frac{1}{2} |\cos x| \leq \frac{1}{2}$$

2°/ $\varnothing$ est continue, dérivable sur $\mathbb{R}$, et $\forall x \in \mathbb{R}, |\varnothing'(x)| \leq \frac{1}{2}$

D'où $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}$ on a : $|\varnothing(x) - \varnothing(y)| \leq \frac{1}{2}|x - y|$

On pose $x = U_n$ et $y = \alpha$

$$\varnothing(x) = \varnothing(U_n) = U_{n+1}, \quad \varnothing(y) = \varnothing(\alpha) = \alpha \text{ car } f(\alpha) = 4$$

$$\text{D'où } |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_n - \alpha|$$

$$b) \quad \text{On a : } |U_1 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_0 - \alpha|$$

$$|U_2 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_1 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 |U_0 - \alpha|$$

$$|U_3 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_2 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 |U_0 - \alpha|$$

$$|U_3 - \alpha| \leq \frac{1}{2}|U_2 - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^3 |U_0 - \alpha|$$

Donc on constate que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha|$

Vérifions ce résultat par récurrence :

• Pour $n = 0$, $|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^0 |U_0 - \alpha|$ est vraie .

• Supposons que pour un entier donné n on a :

$$|U_n - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha| \text{ et montrons que}$$

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |U_0 - \alpha|$$

$$\text{On a : } |U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} |U_n - \alpha| \text{ (d'après 2°/ a)}$$

$$|U_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha| \Rightarrow \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |U_0 - \alpha|$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n |U_0 - \alpha| = 0 \text{ car } -1 < \frac{1}{2} < 1$$

$$\text{D'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} |U_n - \alpha| = 0 \text{ et par suite } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \alpha$$

Conclusion : (U_n) est une suite convergente vers α .