

EXERCICES**Exercice 1 :**

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soient $A(1,0,-1)$; $B(2,0,0)$; $C(0,1,-2)$.

1°/a) Donner une représentation paramétrique de la droite (AB) .

b) En déduire une représentation cartésienne de la droite (AB) .

2°/a) Montrer que les points A , B et C forment un plan P .

b) Donner une équation cartésienne de P .

3°/ Donner une équation cartésienne du plan Q parallèle à P et passant par O .

Exercice 2 :

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit les droites $D_1 : \begin{cases} x = \alpha \\ y = 1 + \alpha \\ z = -\alpha \end{cases}$ et $D_2 : \begin{cases} x = \beta + 1 \\ y = \beta \\ z = 0 \end{cases}$ $\alpha \in \mathbf{R}$ et $\beta \in \mathbf{R}$

1°/ Montrer que D_1 et D_2 ne sont pas coplanaires.

2°/ Soit P le plan passant par O et contenant la droite D_1 et Q le plan passant par O et contenant la droite D_2

a) Donner une équation cartésienne de P puis de Q .

b) Prouver que P et Q sont sécants en une droite Δ . Donner alors un système d'équations paramétriques de Δ .

Exercice 3 :

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$. Soient les

$$\text{trois droites : } D_1 : \begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha + 1 \\ z = -\alpha + 2 \end{cases} ; D_2 : \begin{cases} x = \beta - 1 \\ y = \beta \\ z = 1 \end{cases} ; D_3 : \begin{cases} x = 1 \\ y = \gamma - 1 \\ z = \gamma - 2 \end{cases}.$$

α, β, γ trois réels quelconques.

1°/ Démontrer que D_1, D_2, D_3 sont concourantes en un point I que l'on précisera.

2°/ a) Déterminer par son équation cartésienne le plan P contenant les droites D_1 et D_2 .

b) D_3 est-elle incluse dans P ?

Exercice 4 :

L'espace ξ est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $\alpha \in \mathbf{R}$. On note P_α l'ensemble des points $M(x, y, z)$ de ξ vérifiant:

$$\begin{cases} x = k + k' \\ y = k - 1 \\ z = k + k' + \cos \alpha \end{cases} \quad \text{ou } (k, k') \in \mathbf{R}^2$$

1°/ a) Montrer que P_α est un plan.

b) Donner une équation cartésienne de P_α

2°/ Soit Δ l'ensemble des points $M(x, y, z)$ vérifiant : $x = 1$ et $y = z$

a) Montrer que Δ est une droite.

b) Démontrer que P_α rencontre Δ en un point A_α dont on précisera les coordonnées.

3°/ Soit $B(1,1,1)$

a) Montrer que $\overrightarrow{BA_\alpha} = (\cos \alpha) \cdot \overrightarrow{e}$ où $\overrightarrow{e}$ est un vecteur que l'on précisera

b) En déduire que A_α varie sur une droite fixe (δ) que l'on précisera.

Exercice 5 :

L'espace ξ est rapporté à un repère $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Soit $m \in \mathbf{R}$ et on considère les droites D et D' :

$$D : \begin{cases} x = 2\alpha + 1 \\ y = -2\alpha - 1 \\ z = \alpha + 3 \end{cases} \quad (\alpha \in \mathbf{R}) \quad \text{et} \quad D' : \begin{cases} x = 2 + m\beta \\ y = -1 - 2m\beta \\ z = 5 - \beta \end{cases} \quad (\beta \in \mathbf{R})$$

1°/ Montrer que $\forall m \in \mathbf{R}$; D et D' ne sont pas parallèles.

2°/ a) Déterminer m pour que D et D' soient coplanaires.

b) Préciser dans ce cas les coordonnées du point I d'intersection des droites D et D' .

3°/ Soit P_m le plan d'équation cartésienne :

$$mx + y + (2 - 2m)z + 5m - 5 = 0$$

a) Montrer que la droite D est incluse dans le plan P_m .

b) Déterminer $(OI) \cap P_m$.

Exercice 6:

ξ l'espace et $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ repère orthonormé direct. $A(0,2,3)$, $B(1,-1,3)$, $C(3,0,2)$.

1) Montrer que A, B, C ne sont pas alignés

2) a- Déterminer $\vec{u} = \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b- Que représente $\vec{u}$ pour $P = (\dot{A}BC)$

c- En déduire une équation cartésienne du plan P

3) Calculer $\cos \alpha$ et $(\sin \alpha)$ $\alpha = \widehat{BAC}$

Exercice 7 :

Dans l'espace muni d'un repère orthogonal direct $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

On donne A(2,0,1) ; B(3,-2,0) et C(2,8,-4).

1°/ Soit M (x , y , z)

Calculer $\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM}$

2°/ Déterminer les coordonnées u point N tel que : $\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$

3°/ Montrer que le volume du tétraèdre ABCN est $\frac{1}{6}CN^2$.

Exercice 8 :

Soit $(O, \overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC})$ un repère orthonormé direct de l'espace ξ

1°/ Soit G le centre de gravité de ABC

a) Déterminer les coordonnées du point G

b) Montrer que : $(OG) \perp (ABC)$.

2°/ Soit A'(2,0,0) ; B' (0,2,0) et C'(0,0,3)

a) Calculer $\overrightarrow{A'B'} \wedge \overrightarrow{A'C'}$

b) En déduire une équation du plan P' = (A'B'C') est :

$$3x + 3y + 2z - 6 = 0$$

3°/ Déterminer les coordonnées du point K intersection de (AC) et du plan P'.

Exercice 9 :

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ un repère orthonormé de l'espace ξ .

On considère les points A(2,7,9) ; B(1,1,2) ; C(-1,2,7)

1°/ a) Calculer les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}$

b) En déduire l'aire du triangle ABC

2°/

a) Déterminer l'ensemble E des points M tels que :

$$\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MC} = \vec{0}$$

b) Déterminer l'ensemble (F) des points M tels que :

$$\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MC}$$

Exercice 10 :

ABCDEFGH un cube de côté 1 .

L'espace ξ est orienté par le repère orthonormé direct $(A, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

$$I = E * F$$

K : centre du carré ADHE

$$1^\circ / \text{Vérifier que : } \overrightarrow{BK} = \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$$

$$2^\circ / \text{En déduire l'aire du triangle IGA .}$$

$$3^\circ /$$

$$a) \text{ Calculer le volume du tétraèdre ABIG}$$

$$b) \text{ En déduire la distance du point B au plan AIG .}$$

Exercice 11 :

A et B deux points distincts de l'espace , $I = A * B$

$$1^\circ / \text{ Démontrer que pour tout M de l'espace on a :}$$

$$\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{AB}$$

$$2^\circ / \text{ Déterminer l'ensemble } (\Gamma) \text{ des points de l'espace tels que :}$$

$$\|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\| = MI \cdot AB$$

Exercice 12 :

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overset{i}{i}, \overset{j}{j}, \overset{k}{k})$.

$$1^\circ / \text{ On considère les points } A(0, 1, 1), B(1, 0, 1) \text{ et } C(1, 1, 0) .$$

$$a) \text{ Vérifier que A, B et C ne sont pas alignés .}$$

$$b) \text{ Montrer qu'une équation cartésienne du plan P passant par A, B et C est } x + y + z - 2 = 0 .$$

$$c) \text{ Déterminer une équation cartésienne de la sphère S de centre O et tangente à P . On notera I le point de contact de S et P .}$$

$$2^\circ / \alpha \text{ étant un réel, on considère les points } E(-\alpha, \frac{2}{\sqrt{3}}, \alpha)$$

$$\text{et } F(-\alpha, -\frac{2}{\sqrt{3}}, \alpha)$$

Soit S_α l'ensemble des points M de ξ tels que $\overrightarrow{ME}^2 + \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$

- Montrer que S_α est la sphère de diamètre $[EF]$.
- Montrer que pour tout réel α , S_α est tangente à P.
- On notera J le point de contact de S_α et P.

Déterminer α pour que $IJ = \sqrt{2}$.

Exercice 13 :

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ on considère les points $A(1,1,0)$; $B(0,1,1)$; $C(1,0,1)$ et $H(2/3, 2/3, 2/3)$.

1°/ Vérifier que les trois points A,B et C déterminent un plan P.

2°/a) Vérifier que le vecteur $\vec{N}(1,1,1)$ est orthogonal à chacun des vecteurs $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$.

b) En déduire qu'une équation cartésienne du plan P est : $x+y+z-2=0$.

3°/ Vérifier que l'on a les deux résultats suivants :

- Le point H est le projeté orthogonal du point O sur le plan P.
- Le point H est l'orthocentre du triangle ABC.

4°/ Déterminer une équation cartésienne de la sphère S de centre O et qui est tangente au plan P.

5°/ Soit m un paramètre réel tel que $0 < m < 2$ et soit P_m le plan d'équation : $x + y + z - m = 0$

- Vérifier que P_m et P sont strictement parallèles.
- Montrer que l'intersection de S et de P_m est un cercle que l'on notera C_m .
- Déterminer les coordonnées du centre du cercle C_m et préciser son rayon.

Exercice 14 :

L'espace ξ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

(S) l'ensemble des points M (x,y,z) vérifiant :

$$x^2 + y^2 + z^2 = 2x + 2y - 2z$$

1°/

a) Montrer que (S) est une sphère que l'on caractérisera .

b) Soit B (2, 2 , -2)

Montrer que [OB] est une corde de (S)

2°/ Soit M un point variable de (S) et C le point de ξ tels que :

OMCB soit un parallélogramme

a) Montrer que C est l'image de M par une translation

b) En déduire l'ensemble des points C

3°/ Soit G le centre de gravité du triangle MBC et A' le symétrique de O para rapport à B

a) Démontrer que G est l'image de M par une homothétie h de centre A' et dont on précisera le rapport .

b) En déduire l'ensemble décrit par G

Exercice 15 :

A et B deux points fixes de l'espace

On considère (S) l'ensemble des points M de l'espace tel que :

$$\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0$$

1°/ Déterminer (S)

2°/ Soit G le centre de gravité du triangle AMB et O le milieu de [AB]

a) Montrer que : $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{OM}$

- b) Soit h l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{1}{3}$., Quelle est l'image de M par h .

3°/ Déterminer l'ensemble décrit par G lorsque M varie.

Exercice 16 :

Soit $ABCD$ un tétraèdre

A' , B' , C' les milieux respectifs de $[DA]$, $[DB]$, $[DC]$

A'' , B'' , C'' les milieux respectifs de $[B'C']$, $[C'A']$ et $[A'B']$

1°/ Démontrer que : $\overrightarrow{A''B''} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

2°/ a) Déterminer le centre O de l'homothétie h de rapport $-\frac{1}{4}$ qui transforme A en A'' .

b) Déterminer $h(B)$, $h(C)$

c) Soit G le centre de gravité du triangle ABC

Déterminer $h(G)$

3°/ Démontrer que O , D , G sont alignés

Exercice 17 :

On considère dans l'espace ξ , la sphère S fixe de centre O et de rayon $r > 0$. $[AB]$ une corde de (S)

M un point variable de (S) et N l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

1°/ $I = B * M$

Montrer que I est l'image de N par une homothétie h que l'on précisera.

2°/ G centre de gravité de BMN

a) Montrer que : $\overrightarrow{IG} = \frac{1}{3} \overrightarrow{IN}$

b) Exprimer $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AI}$

3°/

a) Déterminer l'ensemble décrit par I lorsque M varie sur (S)

b) Déterminer alors l'ensemble décrit par G .

Exercice 18 :

A et B deux points de l'espace ξ .

$$f : \begin{cases} \xi \rightarrow \xi \\ M \mapsto M' \text{ tels que : } \overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} \end{cases}$$

1°/ Soit A le point de l'espace tels que $2\overrightarrow{AG} + 3\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{0}$

Montrer que G est un point invariant par f

2°/ Montrer que pour tout point M de ξ

On a : $\overrightarrow{GM'} = -4\overrightarrow{GM}$ en déduire f

3°/ Soit φ l'homothétie de centre G et de rapport $k \neq 0$

a) Déterminer $\varphi \circ f$

b) Déterminer k tel que : $\varphi = f^{-1}$

4°/ Déterminer l'ensemble (E) des points M de l'espace ξ tels que :

$MM' = 2$ où $M' = f(M)$

SOLUTIONS

Solution 1 :

1°/ a) $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB) .

$M(x, y, z) \in (AB)$ si et seulement s'il existe $\alpha \in \mathbf{R}$ tel que $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB}$
donc une représentation paramétrique de la droite (AB) est :

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha \\ y = 0 \\ z = -1 + \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbf{R}$$

b) Du système paramétrique de la droite (AB)

on a : $y = 0$ et $\alpha = x - 1 = z + 1$

Donc une représentation cartésienne de (AB) est : $\begin{cases} x - 1 = z + 1. \\ y = 0 \end{cases}$

2°/ a) Il suffit de prouver que les points A , B , et C ne sont pas alignés

ou que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires ;

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{on a : } 1.1 - 0.(-1) = 1 \neq 0$$

donc $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite A , B , et C forment un plan P .

b) $M(x, y, z) \in P$ si et seulement s'il existe deux réels α et β .

tels que : $\overrightarrow{AM} = \alpha \overrightarrow{AB} + \beta \overrightarrow{AC}$.

$$\text{d'où } \begin{cases} x = 1 + \alpha - \beta & (1) \\ y = \beta & (2) \\ z = -1 + \alpha - \beta & (3) \end{cases}$$

En faisant la différence des équations (1) et (3) on obtient :

$x - z - 2 = 0$ c'est une équation cartésienne de P .

$3^\circ/ \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à P et comme Q est parallèle à P

donc $\vec{n}$ est un vecteur normal à Q d'où $Q : x - z + d = 0$

or $O \in Q$ donc $d = 0$ et par suite $Q : x - z = 0$

Solution 2 :

$1^\circ/ \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur directeur de D_1 .

$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur directeur de D_2 .

on a $1 \cdot 0 - (-1) \cdot 1 \neq 0$ donc $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires ce qui prouve que D_1 et D_2 ne sont pas parallèles.

* Montrons maintenant que D_1 et D_2 ne sont pas sécantes.

Si D_1 et D_2 sont sécantes en un point $I(x, y, z)$ alors :

$$\begin{cases} x = \alpha = \beta + 1 \\ y = 1 + \alpha = \beta \\ z = -\alpha = 0 \end{cases} \quad \text{on obtient : } \alpha = 0 \text{ et } \beta = 1$$

Or ces valeurs ne vérifient pas l'équation : $\alpha = \beta + 1$

ce qui prouve que les deux droites D_1 et D_2 ne sont pas sécantes.

Conclusion : D_1 et D_2 ne sont ni parallèles ni sécantes donc D_1 et D_2 ne sont pas coplanaires.

2°/ a) * on a $O \notin D_1$ donc P est un plan passant par O et dont un

couple de vecteurs directeurs est $(\vec{OA}, \vec{u}_1)$ où $A(0, 1, 0)$ est un point de D_1 .

$M(x, y, z) \in P$ si et seulement s'il existe deux réels α et β tels que :

$$\vec{OM} = \alpha \vec{OA} + \beta \vec{u}_1 \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x = \beta \\ y = \alpha + \beta \\ z = -\beta \end{cases}$$

Une équation cartésienne de P est alors : $x + z = 0$

De même soit $B(1, 0, 0)$ un point de D_2 . $M(x, y, z) \in Q$ si et

seulement s'il existe deux réels α et β tels que $\vec{OM} = \alpha \vec{OB} + \beta \vec{u}_2$

$$\text{d'où} \quad \begin{cases} x = \alpha + \beta \\ y = \beta \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{une équation cartésienne de } Q \text{ est alors } z = 0.$$

$$\text{b) Soit } \vec{n}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ un vecteur normal à } P \text{ et } \vec{n}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ un vecteur normal à } Q$$

$\vec{n}_1$ et $\vec{n}_2$ ne sont pas colinéaires donc P n'est pas parallèle à Q et par

suite P et Q sont sécants soit $\Delta = P \cap Q$

* $M(x, y, z) \in \Delta$ si et seulement si :

$$\begin{cases} x + z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ z = 0 \end{cases} \Rightarrow \Delta : \begin{cases} x = 0 \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad \text{avec } t \in \mathbf{R}$$

Solution 3 :

1°/ * Etudions $D_1 \cap D_2$

$$M(x,y,z) \in D_1 \cap D_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha = \beta - 1 \\ y = \alpha + 1 = \beta \\ z = -\alpha + 2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

donc D_1 et D_2 sont sécantes en un point $I(1,2,1)$

* Etudions $D_1 \cap D_3$

$$M(x,y,z) \in D_1 \cap D_3 \Leftrightarrow \begin{cases} x = \alpha = 1 \\ y = \alpha + 1 = \gamma - 1 \\ z = -\alpha + 2 = \gamma - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \\ z = 1 \end{cases}$$

donc D_1 et D_3 sont sécantes au même point $I(1,2,1)$ ce qui prouve que

D_1, D_2 et D_3 sont sécantes en $I(1,2,1)$.

2°/ a) P est le plan passant par $I(1,2,1)$ et dont un couple de vecteurs

directeurs $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ où $\vec{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est vecteur directeur de D_1 .

$\vec{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est vecteur directeur de D_2 .

$M(x,y,z) \in P$ si et seulement si il existe deux réels α et β tels que

$$\begin{cases} x = 1 + \alpha + \beta \\ y = 2 + \alpha + \beta \\ z = 1 - \alpha \end{cases} \quad \text{en faisons la différence des deux premières}$$

équations. On obtient une équation cartésienne de P : $x - y + 1 = 0$

b) Soit $A(1, -1, -2)$ un point de D_3 .

Les coordonnées de A ne vérifient pas l'équation de P donc la droite D_3 n'est pas incluse dans P .

Solution 4 :

$$1^\circ/ \text{ a) Soit } A(0, -1, \cos \alpha), \quad \vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non colinéaires. P_α est le plan passant par A et dont un couple de vecteurs directeurs est $(\vec{u}, \vec{v})$

b) On a : $x = k + k'$ et $z = k + k' + \cos \alpha$ d'où $P_\alpha : x - z + \cos \alpha = 0$

$$2^\circ/ \text{ a) Soit } z = t. \text{ On a : } \Delta : \begin{cases} x = 1 \\ y = t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbf{R}. \quad \Delta \text{ est la droite passant par}$$

$$I(1, 0, 0) \text{ dont un vecteur directeur } \vec{W} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } \vec{W} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ n'est pas un vecteur de } P_\alpha \text{ car les coordonnées de } \vec{W} \text{ ne}$$

vérifient pas l'équation : $x - z = 0$ donc Δ n'est pas parallèle à P_α et par suite P_α rencontre Δ en un seul point A_α

$$A_\alpha(x, y, z) \in P_\alpha \cap \Delta \text{ donc : } \begin{cases} x = 1 \\ y = z \\ x - z + \cos \alpha = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = z = 1 + \cos \alpha \end{cases}$$

d'où $A_\alpha(1, 1 + \cos \alpha, 1 + \cos \alpha)$

$$3^\circ / \text{a) } \vec{BA}_\alpha = \begin{pmatrix} 0 \\ \cos \alpha \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad \vec{BA}_\alpha = (\cos \alpha) \vec{j} + (\cos \alpha) \vec{k}$$

$$\text{et par suite } \vec{BA}_\alpha = \cos \alpha (\vec{j} + \vec{k}) = (\cos \alpha) \vec{e} \quad \text{où} \quad \vec{e} = \vec{j} + \vec{k}$$

$$\text{b) } \vec{BA}_\alpha = (\cos \alpha) \vec{e} \quad \text{donc } \vec{BA}_\alpha \text{ et } \vec{e} \text{ sont colinéaires et par suite}$$

A_α varie sur la droite δ passant par B et de vecteur directeur $\vec{e}$.

Solution 5 :

$$1^\circ / \text{Soit } \vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ un vecteur directeur de } D. \text{ Soit } \vec{v} = \begin{pmatrix} m \\ -2m \\ -1 \end{pmatrix} \text{ un}$$

vecteur

directeur de D' . D et D' sont parallèles si et seulement si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires et par suite on a :

$$\begin{cases} -4m + 2m = 0 \\ -2 - m = 0 \\ 2 + 2m = 0 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} m = 0 \\ m = -2 \\ m = -1 \end{cases} \quad \text{ce qui est impossible}$$

Conclusion : D et D' ne sont pas parallèles.

2°/ On a : D et D' ne sont pas parallèles. Pour que D et D' soient coplanaires il suffit que D et D' soient sécantes en un point I_m

$$\text{donc } \begin{cases} 2\alpha + 1 = 2 + m\beta \\ -2\alpha - 1 = -1 - 2m\beta \\ \alpha + 3 = 5 - \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2\alpha = 1 + m\beta \\ \alpha = m\beta \\ \alpha = 2 - \beta \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \\ (3) \end{matrix}$$

$$(1) \text{ et } (2) \Rightarrow 2\alpha = 1 + \alpha \Rightarrow \alpha = 1$$

$$(3) \Rightarrow \beta = 2 - \alpha = 1 \text{ et } (2) \Rightarrow \alpha = m\beta \Rightarrow 1 = m$$

D et D' sont coplanaires si et seulement si $m = 1$.

Soit $I(x,y,z)$ le point d'intersection des droites D et D'

On a : $x = 2\alpha + 1 = 3$ car $\alpha = 1$; $y = -2\alpha - 1 = -3$ et $z = \alpha + 3 = 4$

d'où : $I(3,-3,4)$

3°/ a) D étant la droite passant par $E(1,-1,3)$ et de vecteur directeur

$$\vec{u} = 2\vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}.$$

On a : $E(1,-1,3)$ vérifie l'équation du plan P_m car :

$$m(1) + (-1) + (2-2m).(3) + 5m - 5 = m - 1 + 6 - 6m + 5m - 5 = 0$$

$\vec{u}$ est un vecteur du plan P_m car : $m(2) - 2 + (2-2m)1 = 0$ d'où $D \subset P_m$.

$$\text{b) } \vec{OI} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}, \text{ voyons si } \vec{OI} \text{ est un vecteur de } P_m.$$

$$\text{on a : } m(3) + (-3) + (2-2m).4 = 3m - 3 + 8 - 8m = 5 - 5m$$

$\vec{OI}$ est un vecteur du plan P_m si et seulement si $5 - 5m = 0$ donc $m = 1$

Si $m = 1$: $(\vec{OI}) // P_m$ et $O \in P_m$ donc (OI) est incluse dans le plan P_m

et par suite $(OI) \cap P_m = (OI)$.

Si $m \neq 1$: (OI) n'est pas parallèle à P_m donc $(OI) \cap P_m = \{J_m\}$

Soit (x,y,z) les coordonnées du point J_m .

$$J_m \in (OI) \Leftrightarrow \vec{OJ_m} = \alpha \vec{OI} \text{ d'où } \begin{cases} x = 3\alpha \\ y = -3\alpha \\ z = 4\alpha \end{cases}$$

$$J_m \in P_m \text{ donc : } mx + y + (2-2m)z + 5m - 5 = 0$$

$$\text{On a ainsi : } m(3\alpha) + (-3\alpha) + (2-2m)(4\alpha) + 5m - 5 = 0$$

$$\alpha(3m - 3 + 8 - 8m) = 5 - 5m \text{ d'où } \alpha = 1$$

et par suite $J_m(3, -3, 4)$ d'où $(OI) \cap P_m = \{J_m(3, -3, 4)\} = \{I\}$.

Conclusion : Si $m = 1$ on a : $(OI) \cap P_m = (OI)$.

Si $m \neq 1$ on a : $(OI) \cap P_m = \{I\}$.

Solution 6 :

$$1) \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}, \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} = 7 \neq 0 \text{ donc A, B, C ne sont pas}$$

alignés.

$$2) a) \vec{u}$$

$$\begin{vmatrix} -3 & -2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 3, \quad -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -3 & -2 \end{vmatrix} \text{ d'où } \vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 7 \end{pmatrix}$$

b) $\vec{u}$ représente un vecteur normal à P

c) $P : -3x + y + 7z + d = 0$ or $A(0, 2, 3) \in P$

d) d'où $0 + 2 + 21 + d = 0 \Rightarrow d = -23$

$$P : -3x + y + 7z - 23 = 0$$

3) On a :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| \cos \alpha \Rightarrow \cos \alpha = \frac{3+6}{\sqrt{10} \times \sqrt{14}} = \frac{9}{2\sqrt{35}}$$

$$\|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| = \|\overrightarrow{AB}\| \cdot \|\overrightarrow{AC}\| \cdot |\sin \alpha|$$

$$\sqrt{9+1+49} = \sqrt{1+9} \cdot \sqrt{9+4+1} \cdot |\sin \alpha| \text{ d'où } (\sin \alpha) = \frac{\sqrt{59}}{4\sqrt{35}}$$

Solution 7 :

$$1^\circ \overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-2 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}; \quad \overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y+2 \\ z \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = \begin{vmatrix} y & y+2 \\ z-1 & z \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} x-2 & x-3 \\ z-1 & z \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} x-2 & x-3 \\ y & y+2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

$$\text{D'où : } \overrightarrow{AM} \wedge \overrightarrow{BM} = (y - 2z + 2)\vec{i} - (x + z - 3)\vec{j} + (2x + y - 4)\vec{k}$$

2°/

$$\overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} = \overrightarrow{CN}$$

$$\overrightarrow{CN} \begin{pmatrix} x - 2 \\ y - 8 \\ z + 4 \end{pmatrix} ; \quad \overrightarrow{AN} \wedge \overrightarrow{BN} \begin{pmatrix} y - 2z + 2 \\ -x - z + 3 \\ 2x + y - 4 \end{pmatrix}$$

On a donc :

$$\begin{cases} y - 2z + 2 = x - 2 \\ -x - z + 3 = y - 8 \\ 2x + y - 4 = z + 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - y + 2z = 4 \quad (1) \\ x + y + z = 11 \quad (2) \\ 2x + y - z = 8 \quad (3) \end{cases}$$

$$(1) : x = 4 + y - 2z$$

$$(2) \text{ s'écrit : } 4 + y - 2z + y + z = 11$$

$$2y - z = 7$$

$$z = 2y - 7$$

$$(3) : 2(4 + y - 2z) + y - z = 8$$

$$3y - 5z = 0$$

$$3y - 5(2y - 7) = 0$$

$$-7y + 35 = 0 \quad \text{d'où } y = 5$$

$$\text{D'où : } z = 3 \quad \text{et par suite } x = 4 + 5 - 6 = 3 \quad \text{d'où } N(3, 5, 3)$$

$$3^\circ/\text{Soit } V \text{ le volume du tétraèdre } ABCN \text{ est : } V = \frac{|(\overrightarrow{NA} \wedge \overrightarrow{NB}) \cdot \overrightarrow{NC}|}{6}$$

$$\text{On a : } S = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{NA} \wedge \overrightarrow{NB}\| : \text{ l'aire du triangle } ABN$$

$$S = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{CN}\| = \frac{1}{2} CN$$

$$V = \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} CN \right) \cdot CN = \frac{1}{6} CN^2$$

($\overrightarrow{CN}$ est $\perp$ au plan ABN au point N).

Solution 8 :

G centre de gravité de ABC

$$\text{On a : } \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

$$\text{D'où } G\left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right) ; \overrightarrow{OG} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a : } \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AB} = \frac{-1}{3} + \frac{1}{3} = 0 \text{ d'où } \overrightarrow{OG} \perp \overrightarrow{AB}$$

$$\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{OG} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\text{On a : } \overrightarrow{OG} \cdot \overrightarrow{AC} = \frac{-1}{3} + \frac{1}{3} = 0 \text{ d'où } \overrightarrow{OG} \perp \overrightarrow{AC}$$

(OG) est perpendiculaire au plan ABC

$$2^\circ / \overrightarrow{A'B'} \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{A'C'} \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{A'B'} \wedge \overrightarrow{A'C'}$ a pour coordonnées (X, Y, Z)

$$X = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

$$Y = - \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6$$

$$Z = \begin{vmatrix} -2 & -2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4$$

$$\text{D'où } \overrightarrow{A'B'} \wedge \overrightarrow{A'C'} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

b) $\overrightarrow{N} = \overrightarrow{A'B'} \wedge \overrightarrow{A'C'}$ est un vecteur normal au plan $P = (A'B'C')$

$$\text{D'où } \overrightarrow{N} (6,6,4)$$

$$\text{D'où } P : 6x + 6y + 4z + d = 0$$

$$\text{Or } A' (2,0,0) \in P$$

$$\text{alors } 12 + 0 + 0 + d = 0$$

$$d = -12$$

$$\text{ainsi } P' : 3x + 3y + 2z - 6 = 0.$$

$$3^\circ / (AC) \cap P' ?$$

$$\text{On a : (I) } \begin{cases} 3x + 3y + 2z - 6 = 0 \\ x = 1 - \alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases} \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

Une représentation paramétrique de (AC) est

$$(AC) : \begin{cases} x = 1 - \alpha \\ y = 0 \\ z = \alpha \end{cases}$$

$$\text{D'où : (I) s'écrit : } 3 - 3\alpha + 2\alpha - 6 = 0$$

$$\alpha = -3$$

Conclusion :

$$(AC) \cap P' = \{ K (4,0,3) \}$$

Solution 9 :

$$1^{\circ} \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -7 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ -5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$X_0 = \begin{vmatrix} -6 & -5 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = 12 - 35 = -23$$

$$Y_0 = - \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -7 & -2 \end{vmatrix} = - (2 - 21) = 19$$

$$Z_0 = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ -6 & -5 \end{vmatrix} = 5 - 18 = -13$$

$$\text{D'où } \overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} -23 \\ 19 \\ -13 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| &= \sqrt{(-23)^2 + 19^2 + (-13)^2} \\ &= \sqrt{1059} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{L'aire du triangle ABC est } A &= \frac{1}{2} \|\overrightarrow{AB} \wedge \overrightarrow{AC}\| \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{1059} . \end{aligned}$$

$$2^{\circ} / a) * M \in (E) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \wedge (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}) = \vec{O}$$

Soit G le barycentre des points (A , 1) ; (B , 2) ; (C , 3)

$$\text{On a : } \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 6\overrightarrow{MG}$$

$$M \in (E) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \wedge (6\overrightarrow{MG}) = \vec{O} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{MG} = \vec{O} \Leftrightarrow$$

$\overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{MG}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow O, M, G$ sont alignés $\Leftrightarrow M \in (OG)$
 $E = (OG)$

$$b) * M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \wedge (\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC}) = \overrightarrow{0}$$

$$\begin{aligned} \text{Or } \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - 3\overrightarrow{MC} &= \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{AC} \\ &= 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{V} \end{aligned}$$

• $M \in (F) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{V} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}$ et $\overrightarrow{V}$ sont colinéaires
 (F) est la droite passant par O et de vecteur directeur $\overrightarrow{V}$.

Solution 10 :

1°/ On a : $B(1, 0, 0)$, $K(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$, $I(\frac{1}{2}, 0, 1)$, $G(1, 1, 1)$

$$\overrightarrow{IG} \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{IA} \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \overrightarrow{BK} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Soit (x_0, y_0, z_0) les coordonnées de $\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}$

$$X_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$Y_0 = - \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$Z_0 = \begin{vmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BK}$$

$$2^\circ/ \text{ L'aire du triangle IGA est } A = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}\|$$

$$A = \frac{1}{2} \|\overrightarrow{BK}\|$$

$$\text{or } BK^2 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{6}{4}$$

$$\text{d'où } A = \frac{\sqrt{6}}{4}$$

3°/ Le volume V du tétraèdre ABIG est

$$V = \frac{1}{6} \|(\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA}) \cdot \overrightarrow{IB}\|$$

$$\overrightarrow{IG} \wedge \overrightarrow{IA} = \overrightarrow{BK}$$

$$V = \frac{1}{6} |\overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{IB}|$$

$$\text{Or } \overrightarrow{BK} \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{IB} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où } \overrightarrow{BK} \cdot \overrightarrow{IB} = \frac{-1}{2} - \frac{1}{2} = -1$$

$$\boxed{V = \frac{1}{6}}$$

4°/ La distance du point B au plan AIG est la hauteur h du tétraèdre ABIG associée à la base IGA

$$V = \frac{1}{3} h \times A \quad \text{d'où } h = \frac{3V}{A} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{4}{\sqrt{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\boxed{h = \frac{\sqrt{6}}{3}}$$

Solution 11 :

$$\begin{aligned} 1^\circ/ \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB} &= \overrightarrow{MA} \wedge (\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{AB} \\ &= \vec{0} + (\overrightarrow{MI} + \overrightarrow{IA}) \wedge \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{AB} \\ &= \overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{AB} \\ &(\text{on a : } \overrightarrow{IA} \wedge \overrightarrow{AB} = \vec{0} \text{ car I, A, B sont alignés}) \end{aligned}$$

$$2^\circ / \|\overrightarrow{MA} \wedge \overrightarrow{MB}\| = MI \cdot AB \Leftrightarrow \|\overrightarrow{MI} \wedge \overrightarrow{AB}\| = MI \cdot AB$$

$$MI \cdot AB \left| \sin(\widehat{MIA}) \right| = MI \cdot AB \Leftrightarrow \left| \sin(\widehat{MIA}) \right| = 1 \text{ ou } M = I$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{MIA}) = 0 \text{ ou } M = I \text{ où } \widehat{MIA} = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow$$

$\overrightarrow{IM} \perp \overrightarrow{IA}$ d'où Γ est le plan passant par I et $\perp (IA)$

D'où Γ est le plan médiateur de $[AB]$

Solution 12 :

$$1^\circ / a) \text{ on a } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \text{ le déterminant } \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0 \text{ donc}$$

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires et par suite A, B, et C ne sont pas alignés.

b) Soit P' le plan dont une équation cartésienne est : $x + y + z - 2 = 0$.

Les coordonnées de A, B et C vérifient l'équation de P' donc ces trois points appartiennent à P' d'où $P' = P$ et par suite une équation cartésienne de P est $x + y + z - 2 = 0$.

$$c) S \text{ est tangente à } P \text{ donc le rayon de } S \text{ est } r = d(O, P) = \frac{|-2|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

$$\text{d'où } S : x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4}{3}.$$

$$2^\circ / a) S_\alpha = \{M \in \mathcal{E} / ME^2 + \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{EF} = 0\}$$

$$M \in S_\alpha \Leftrightarrow ME^2 + \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{EF} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{ME} \cdot (\overrightarrow{ME} + \overrightarrow{EF}) = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{ME} \cdot \overrightarrow{EF} = 0$$

$$\Leftrightarrow M \text{ appartient à la sphère de diamètre } [EF].$$

Conclusion : S_α est la sphère de diamètre $[EF]$.

b) Soit J_α le centre de S_α , on a $J_\alpha = E * F$ donc $J_\alpha(-\alpha, 0, \alpha)$
 on a d'une part $d(J_\alpha, P) = \frac{|-\alpha + 0 + \alpha - 2|}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ et d'autre part le rayon

de S_α et $r_\alpha = \frac{EF}{2} = \frac{\sqrt{(\frac{4}{\sqrt{3}})^2}}{2} = \frac{2}{\sqrt{3}}$ d'où $d(J_\alpha, P) = r$ ce qui prouve
 que S_α est tangente à P .

c) * Déterminons les coordonnées de I .

$I(x, y, z)$ est tel que $\begin{cases} \vec{OI} = \alpha_1 \vec{n} \\ I \in P \end{cases}$ où $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ le vecteur normal de P d'où

$$\begin{cases} x = \alpha_1 \\ y = \alpha_1 \\ z = \alpha_1 \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = y = z = \alpha_1 \\ 3\alpha_1 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_1 = \frac{2}{3} \\ x = y = z = \frac{2}{3} \end{cases}$$

d'où $I(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3})$

* Déterminons les coordonnées de J

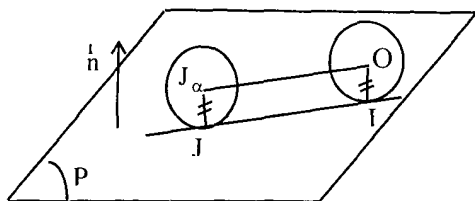
$$J(x, y, z) \text{ est tel que } \begin{cases} \vec{J_\alpha J} = \beta \vec{n} \\ J \in P \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + \alpha = \beta \\ y = \beta \\ z - \alpha = \beta \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \beta - \alpha \\ y = \beta \\ z = \beta + \alpha \\ x + y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

En remplaçant dans la dernière équation x, y et z par leurs valeurs on
 obtient $\beta - \alpha + \beta + \beta + \alpha - 2 = 0$ d'où $3\beta = 2 \Rightarrow \beta = \frac{2}{3}$

$$\text{d'où } \begin{cases} x = \frac{2}{3} - \alpha \\ y = \frac{2}{3} \\ z = \frac{2}{3} + \alpha \end{cases} \quad \text{donc } J(\frac{2}{3} - \alpha, \frac{2}{3}, \frac{2}{3} + \alpha)$$

$$IJ = \sqrt{2} \Leftrightarrow IJ^2 = 2 \Leftrightarrow (\frac{2}{3} - \alpha - \frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3} - \frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3} + \alpha - \frac{2}{3})^2 = 2$$

$$\Leftrightarrow 2\alpha^2 = 2 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ ou } \alpha = -1$$

2^{ème} méthode :

On a : $OI = \frac{2}{\sqrt{3}} = JJ_\alpha$ on a d'une part : $\vec{OI}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires et

d'autre part $\vec{JJ_\alpha}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires et par suite $(OI) // (JJ_\alpha)$

$\vec{OJ_\alpha} \begin{pmatrix} -\alpha \\ 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$ est $\perp \vec{n}$ car : $\vec{OJ_\alpha} \cdot \vec{n} = 0$ donc $(OJ_\alpha) // P$ et par suite

OIJ_α est un rectangle d'où : $OJ_\alpha = IJ$ et comme $OJ_\alpha = \sqrt{2\alpha^2}$ d'où

$$IJ = \sqrt{2}|\alpha|$$

$$IJ = \sqrt{2} \Leftrightarrow \sqrt{2}|\alpha| = \sqrt{2} \Leftrightarrow |\alpha| = 1 \Leftrightarrow \alpha = 1 \text{ ou } \alpha = -1$$

Solution 13 :

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ Erreur ! Signet non défini. et } \vec{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{on a :}$$

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

donc A, B et C ne sont pas alignés.

Conclusion : A, B et C déterminent un plan P.

$$2^\circ/a) \vec{N} \cdot \vec{AB} = 0 \text{ et } \vec{N} \cdot \vec{AC} = 0 \text{ donc } \vec{N} \perp \vec{AB} \text{ et } \vec{N} \perp \vec{AC}$$

$$b) \vec{N} \text{ étant un vecteur normal de P donc } P : x + y + z + d = 0$$

$$\text{or } A \in P \Rightarrow d = -2$$

Conclusion : P est : $x + y + z - 2 = 0$.

3°/a) On a : $H \in P$ et $\vec{OH} = \frac{2}{3} \vec{N}$ donc $(OH) \perp P$

d'où : H est le projeté orthogonal de O sur P.

b)

* $\vec{HA} \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ -2/3 \end{pmatrix}$ et $\vec{BC} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ on a : $\vec{HA} \cdot \vec{BC} = 0$.

* $\vec{HB} \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$ et $\vec{AC} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ on a : $\vec{HB} \cdot \vec{AC} = 0$.

On a ainsi H est l'orthocentre du triangle ABC.

4°/ $S : x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

où $R = d(O, P) = \frac{2}{\sqrt{3}}$ d'où $S : x^2 + y^2 + z^2 = \frac{4}{3}$

5°/a) $P : x + y + z - 2 = 0$ et $P_m : x + y + z - m = 0$

On a : $\frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{1}{1} = \frac{2}{m}$ (car $m \in]0, 2[$)

d'où P et P_m sont strictement parallèles.

b) Soit $d = d(O, P_m) = \frac{m}{\sqrt{3}}$

$R^2 - d^2 = \frac{4}{3} - \text{Erreur ! Signet non défini.} = \frac{(2-m)(2+m)}{3} > 0$ car 0

$< m < 2$

d'où $S \cap P_m$ est un cercle (C_m) .

c) * Le rayon de C_m est $r = \sqrt{\frac{4-m^2}{3}}$

* Soit Ω_m le centre de C_m on a : $\vec{O\Omega_m} = \alpha \vec{N_{P_m}}$ et $\Omega_m \in P_m$

On a : $\vec{O\Omega_m} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\alpha \vec{N_{P_m}} \begin{pmatrix} \alpha \\ \alpha \\ \alpha \end{pmatrix}$

d'où : $\begin{cases} x = \alpha \\ y = \alpha \\ z = \alpha \end{cases}$ et $\Omega_m \in P_m$ d'où : $\alpha + \alpha + \alpha - m = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{m}{3}$

Conclusion : $\Omega_m \left(\frac{m}{3}, \frac{m}{3}, \frac{m}{3} \right)$ est le centre de C_m .

Solution 14 :

1°/

a) $M(x,y,z) \in (S) \Leftrightarrow (x^2 - 2x) + (y^2 - 2y) + (z^2 + 2z) = 0$

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 + (z+1)^2 = \sqrt{3}^2$$

(S) est la sphère de centre $\Omega(1,1,-1)$ et de rayon $R = \sqrt{3}$.

b) $O(0,0,0) \in (S)$

$B(2,2,-2) \in (S)$ car : $(2-1)^2 + (2-1)^2 + (-2+1)^2 = \sqrt{3}^2$

D'où $[OB]$ est une corde de (S)

2°/

a) On a : OMCB est un parallélogramme

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{MC} = \overrightarrow{OB} \Leftrightarrow t_{\overrightarrow{OB}}(M) = C$$

b) M varie sur (S) $\Leftrightarrow$ C vraie sur (S')

$$S' = t_{\overrightarrow{OB}}(S)$$

Soit $\Omega' = t_{\overrightarrow{OB}}(\Omega) \Leftrightarrow \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{\Omega\Omega'}$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'-1 \\ y'-1 \\ z'+1 \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} x'=3 \\ y'=3 \\ z'=X-3 \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \Omega'(3,3,-3)$$

C décrit la sphère (S') de centre $\Omega'(3,3,-3)$ et de rayon $\sqrt{3}$.

3°/ a) On a : $\overrightarrow{A'G} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A'M} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C})$

or : $\overrightarrow{A'B} = \overrightarrow{BO} = \overrightarrow{CM}$

$$\text{d'où : } \overrightarrow{A'G} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A'M} + \overrightarrow{CM} + \overrightarrow{A'C}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{A'M}$$

$$\text{d'où } G = h_{\left(A', \frac{2}{3}\right)}(M)$$

b) M varie sur la sphère (S) de centre $\Omega(1,1,-1)$ et de rayon $\sqrt{3}$
 alors G varie sur la sphère (Γ) de centre $\Omega'' = h_{\left(A', \frac{2}{3}\right)}(\Omega)$ et

$$\text{de rayon } \frac{2}{3} \times \sqrt{3}$$

$$\text{on a : } \overrightarrow{A'\Omega''} = \frac{2}{3}\overrightarrow{A'\Omega} \text{ soit } \Omega''(x_0, y_0, z_0)$$

$$\begin{cases} O(0,0,0) \\ B(2,2,-2) \end{cases} \Rightarrow A'(4,4,-4)$$

$$\text{on a alors } \begin{cases} x_0 - 4 = \frac{2}{3}(1 - 4) = -2 \\ y_0 - 4 = \frac{2}{3}(1 - 4) = -2 \\ z_0 + 4 = \frac{2}{3}((-1) + 4) = 2 \end{cases}$$

$$\text{d'où } \Omega''(2,2,-2)$$

ainsi G varie sur la sphère (Γ) de centre $\Omega''(2,2,-2)$ et de rayon $\frac{2}{3}\sqrt{3}$

Solution 15 :

1°/ On a : $\overrightarrow{MA} \cdot \overrightarrow{MB} = 0 \Leftrightarrow \overrightarrow{MA} \perp \overrightarrow{MB} \Leftrightarrow M$ appartient à la sphère
 de diamètre [AB]

(S) est la sphère de diamètre [AB]

2°/

$$\text{a) On a : } \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OM})$$

$$\text{Or } O = A * B \text{ d'où } \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} = \overrightarrow{O} \text{ d'où } \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OM}$$

b) On a : $h_{\left(0, \frac{1}{3}\right)}(M) = G$ (d'après a))

$$\text{Et par suite } \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OM} \Leftrightarrow h_{\left(0, \frac{1}{3}\right)}(M) = G$$

3°/ M varie sur la sphère de diamètre [AB]

$\Leftrightarrow$ M varie sur la sphère (S) de centre O et de rayon $\frac{AB}{2}$

$\Leftrightarrow$ G varie sur la sphère S' de centre $h_{\left(0, \frac{1}{3}\right)}(O) = O$ et de rayon $\frac{AB}{6}$

Solution 16 :

$$1^\circ / \overrightarrow{A''B''} = \overrightarrow{A''C'} + \overrightarrow{C'B''} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B'C'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{C'A'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{B'A'}$$

$$\overrightarrow{B'A'} = \overrightarrow{B'D} + \overrightarrow{DA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BA}$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{A''B''} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} = \frac{-1}{4}\overrightarrow{AB}$$

2°/ a) Soit O le centre de h

$$\text{on a : } \overrightarrow{OA''} = \frac{-1}{4}\overrightarrow{OA}$$

$$4\overrightarrow{OA''} + \overrightarrow{OA} = \vec{0}$$

O représente le barycentre des points (A'', 4) et (A, 1)

$$\text{b) } \overrightarrow{A''B''} = \frac{-1}{4}\overrightarrow{AB} \Leftrightarrow \overrightarrow{A''O} + \overrightarrow{OB''} = \frac{1}{4}\overrightarrow{OA} - \frac{1}{4}\overrightarrow{OB}$$

$$\text{or } \overrightarrow{OA''} = \frac{-1}{4}\overrightarrow{OA}$$

$$\text{d'où : } \overrightarrow{OB''} = \frac{-1}{4}\overrightarrow{OB}$$

$$\text{d'où } h(B) = B''$$

$$\bullet \quad \overrightarrow{A''C''} = \overrightarrow{A''B'} + \overrightarrow{B'C''} = \frac{1}{2}\overrightarrow{C'B'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{B'A'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{C'A'}$$

$$\text{or } \overrightarrow{C'A'} = \overrightarrow{C'D} + \overrightarrow{DA'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA}$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{A''C''} = \frac{-1}{4}\overrightarrow{AC} \text{ or } h(A) = A''$$

$$\text{alors } h(C) = C''.$$

c) G centre de gravité du triangle ABC

$$\text{on a : } \overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{O}$$

$$\text{on a : } h(A) = A''$$

$$h(B) = B'' \quad \text{soit } G' = h(G)$$

$$h(C) = C''$$

$$\text{d'où : } \overrightarrow{A''G'} + \overrightarrow{B''G'} + \overrightarrow{C''G'} = \overrightarrow{O}$$

d'où G' est le centre de gravité du triangle A''B''C''.

3°/

$$\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{O} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}$$

$$\text{On a : } \overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

$$= \frac{1}{3}(-4\overrightarrow{OA''} - 4\overrightarrow{OB''} - 4\overrightarrow{OC''}) = \frac{-4}{3}(\overrightarrow{OA''} + \overrightarrow{OB''} + \overrightarrow{OC''})$$

$$= \frac{-4}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA'} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB'}\right)$$

$$\text{D'où } \overrightarrow{OG} = \frac{-4}{3}(\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{OC'} + \overrightarrow{OA'})$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{-4}{3}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{OA}\right)$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{-2}{3}(3\overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC})$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{-2}{3}(3\overrightarrow{OD} + 3\overrightarrow{OG}) \Leftrightarrow \overrightarrow{OG} = -2\overrightarrow{OD} - 2\overrightarrow{OG} \Leftrightarrow$$

$$\overrightarrow{OG} = \frac{-2}{3}\overrightarrow{OD} \Leftrightarrow O, D, G \text{ sont alignés.}$$

Solution 17 :

1°/ On a : $t_{(\overrightarrow{AB})}(M) = N \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN} \Leftrightarrow ABNM \text{ est un parallélogramme.}$

on a : $I = B * M$ d'où $I = A * N$

on a : $\overrightarrow{AN} = 2\overrightarrow{AI}$

d'où $N = h_{(A,2)}(I)$

2°/

a) on a : $\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{NG} = \overrightarrow{O} \Leftrightarrow \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{MI} + \overrightarrow{NI} + 3\overrightarrow{IG} = \overrightarrow{O}$

$$\text{d'où } \overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{IN} + \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IB})$$

$$\text{or } I = B * M \text{ d'où : } \overrightarrow{IM} + \overrightarrow{IB} = \overrightarrow{O} \text{ et par suite } \overrightarrow{IG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{IN}$$

b) On a : $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN})$

$$\text{Or } \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{MN} \text{ d'où } \overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{AN})$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AN} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AI}$$

3°/ a) On a : $I = B * M \Leftrightarrow \overrightarrow{BI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BM} \Leftrightarrow I = h_{(B, \frac{1}{2})}(M)$

M varie sur la sphère (S) de centre O et de rayon r alors

I varie sur la sphère (S') de centre $O' = h_{(B, \frac{1}{2})}(O)$ et de rayon $r' = \left| \frac{1}{2} \right| r = \frac{r}{2}$

b) $\overrightarrow{AG} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AI} \Leftrightarrow h_{(A, \frac{4}{3})}(I) = G$

I varie sur la sphère S" de centre $O'' = h_{(A, \frac{4}{3})}(O')$ et de rayon $r'' = \frac{2}{3}r$

Solution 18 :

1°/ Soit $G' = f(G)$

on a : $\overrightarrow{GG'} = 2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \overrightarrow{O}$

d'où $G = G'$

et par suite $f(G) = G$ donc G est un point invariant par f .

$$\begin{aligned} 2^\circ / \overrightarrow{MM'} &= 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} \Leftrightarrow \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GM'} = 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA}) + 3(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB}) \\ &\Leftrightarrow \overrightarrow{GM'} = 4\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \overrightarrow{GM} = -4\overrightarrow{GM'}$$

$$\text{On a : } \overrightarrow{GM} = -4\overrightarrow{GM'} \Leftrightarrow h(G, -4)(M) = M'$$

et par suite f est l'homothétie de centre G et de rapport -4 .

$$3^\circ / \text{a) } \varphi = h(G, k)$$

$$f = h(G, -4)$$

$$\text{b) } \varphi = f^{-1} \Leftrightarrow \varphi \circ f = \text{id}_\xi \text{ d'où } -4k = 1 \text{ et par suite } k = -\frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} 4^\circ / \overrightarrow{MM'} = 2 &\Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB}\| = 2 \Leftrightarrow \|2\overrightarrow{MG} + 2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{MG} + 3\overrightarrow{GB}\| = 2 \\ &\Leftrightarrow \|5\overrightarrow{MG}\| = 2 \Leftrightarrow GM = \frac{2}{5} \Leftrightarrow M \in S(G, \frac{2}{5}) \end{aligned}$$

(E) est la sphère de centre G et de rayon $\frac{2}{5}$.