

EXERCICES**Exercice 1 :**

$$\text{Soit } f(x) = x^2 - \frac{1}{\sqrt{x+1}}$$

1°/ Montrer que f admet sur $] -1, +\infty[$ une primitive F .

2°/ Calculer $F(x)$ tel que $F(0) = 0$

Exercice 2:

$$f(x) = \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} \quad \text{où } x \geq 0$$

1°/ Montrer que f admet sur $\mathbb{R}^+$ une primitive F .

2°/ Calculer $F(x)$ tel que $F(0) = 1$

Exercice 3:

$$f(x) = \tan^2 x + 2x \quad \text{où } x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

1°/ Montrer que f admet sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$ une primitive de F

2°/ Calculer $F(x)$ tel que $F(0) = 2$

Exercice 4:

$$f(x) = \sin x \cos^{2^n} x$$

1°/ Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$

2°/ Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}$ tel que $F(0) = 0$

Exercice 5 :

$$f(x) = \frac{2x^4 - 3x^2 + 5}{x^2} \quad \text{où } x \in]0, +\infty[$$

1°/ Montrer que f possède une primitive F sur $]0, +\infty[$

2°/ Calculer $F(x)$ tel que $F(1) = \frac{2}{3}$

Exercice 6 :

$$f(x) = \frac{3x - 4}{(3x + 2)^3}$$

1°/ Déterminer les réels a et b tels que pour tout $x \geq 0$ on a :

$$f(x) = \frac{a}{(3x + 2)^2} + \frac{b}{(3x + 2)^3}$$

2°/ Déterminer la primitive F de f sur $\mathbb{R}^+$ tels que $F(0) = 0$

Exercice 7 :

$$f(x) = 2 \sin x + 6 \sin^3 x$$

On pose $F(x) = a \cos x + b \cos^3 x$

Trouver a et b tels que F soit une primitive de f

exercice 8 :

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 5}{(x - 2)^2}$$

1°/ Trouver les réels a, b, c tels que $\forall x > 2$ on a :

$$f(x) = ax + b + \frac{c}{(x - 2)^2}$$

2°/ En déduire toutes les primitives de f définie sur $]2, +\infty[$

Exercice 9 :

$$f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$$

1°/ Justifier l'existence et l'unicité d'une primitive F définie sur $\mathbb{R}$ tel que

$$F(0) = 0$$

2°/ Montrer que F est une fonction impaire .

3°/ Soit $G(x) = F(\tan x)$ où $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

a) Montrer que G est dérivable sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$. Calculer $G'(x)$

b) En déduire $G(x)$

c) Calculer $F(1)$

4°/ Montrer que $\forall x > 0$ on a : $F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$

Exercice 10 :

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

1°/ Déterminer Df ?

2°/ Prouver l'existence et l'unicité d'une primitive F définie sur $[-1, 1]$, tel que $F(0) = 0$

3°/ Soit $\varphi(x) = F(\sin x)$ où $x \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right]$

a) Montrer que φ est dérivable sur $\left[0, \frac{\pi}{2} \right]$. Calculer $\varphi'(x)$

b) En déduire $\varphi(x)$

Exercice 11 :

Soit la fonction définie sur $]2, +\infty[$ par : $f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 7}{(x-2)^2}$.

1°/ Déterminer 3 réels a , b et c tels que : $f(x) = ax + b + \frac{c}{(x-2)^2}$

2°/ En déduire la primitive de f qui s'annule en 3.

Exercice 12 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}}$.

1°/ Montrer que f admet au moins une primitive sur $\mathbf{R}$.

2°/ Déterminer la primitive de f qui s'annule en 0.

Exercice 13 :

Soit $f(x) = \cos(3x) \sin^3 x$.

1°/ Linéariser $f(x)$.

2°/ Déterminer la primitive F de f qui s'annule en 0.

SOLUTIONS

Solution 1 :

1°/ f est continue sur $] -1, +\infty[$

d'où f admet sur $] -1, +\infty[$ une primitive F

$$2^\circ/ F(x) = \frac{x^3}{3} - 2\sqrt{x+1} + c$$

$$\text{or } \begin{cases} F(0) = 0 \\ F(0) = -2 + c \end{cases} \quad \text{d'où } c = 2$$

$$\text{Conclusion : } F(x) = \frac{x^3}{3} - 2\sqrt{x+1} + 2$$

Solution 2 :

1°/ f est continue sur $\mathbb{R}^+$ comme étant le quotient de fonctions continues sur $\mathbb{R}^+$

D'où f admet sur $\mathbb{R}^+$, une primitive F

$$2^\circ/ f(x) = \frac{2}{3} \cdot \frac{3x^2}{2\sqrt{x^3+1}}$$

$$\Rightarrow F(x) = \frac{2}{3} \sqrt{x^3+1} + c$$

$$\text{Or } \begin{cases} F(0) = 1 \\ F(0) = \frac{2}{3} + c \end{cases} \quad \text{d'où } c = \frac{1}{3}$$

$$\text{Conclusion : } F(x) = \frac{2}{3} \sqrt{x^3+1} + \frac{1}{3}$$

Solution 3 :

$$1^{\circ} f(x) = \tan^2 x + 2x$$

f est continue sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ donc f possède une primitive F sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$$2^{\circ} F(x) = ?$$

$$f(x) = (1 + \tan^2 x) + (2x - 1)$$

$$\text{D'où } F(x) = \tan x + x^2 - x + \lambda$$

$$\text{Or } F(0) = \lambda = 2 \text{ d'où}$$

$$\text{Pour tout } x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[: F(x) = \tan x + x^2 - x + 2$$

Solution 4 :

$1^{\circ} f$ est le produit de fonctions continues sur $\mathbb{R}$ alors f est continue sur $\mathbb{R}$

$$2^{\circ} F(x) = \frac{-\cos^{2n+1} x}{2n+1} + c$$

$$\text{Or } \begin{cases} F(0) = \frac{-1}{2n+1} + c \\ F(0) = 0 \end{cases} \quad \text{d'où } c = \frac{1}{2n+1}$$

$$\text{Conclusion : } F(x) = \frac{1 - \cos^{2n+1} x}{2n+1}$$

Solution 5 :

$1^{\circ} f$ est continue sur $]0, +\infty[$

D'où f possède au moins une primitive F définie sur $]0, +\infty[$

$$2^o/ f(x) = 2x^2 - 3 + \frac{5}{x^2}$$

$$\text{D'où } F(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x - \frac{5}{x} + c$$

$$\text{Or } F(x) = \frac{2}{3} - 3 - 5 + c = \frac{2}{3} - 8 + c$$

$$F(1) = \frac{-22 + 3c}{3}$$

$$\text{Or } F(1) = \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{-22 + 3c}{3} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow 3c = 24 \text{ d'où } c = 8$$

$$\text{Conclusion : } F(x) = \frac{2}{3}x^3 - 3x - \frac{5}{x} + 8$$

Solution 6 :

$$1^o/ f(x) = \frac{a(3x+2)+b}{(3x+2)^3} = \frac{3ax+2a+b}{(3x+2)^3}$$

$$\text{D'où } \begin{cases} 3a = 3 \\ 2a + b = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = -6 \end{cases}$$

$$\text{Conclusion : } f(x) = \frac{1}{(3x+2)^2} - \frac{6}{(3x+2)^3}$$

$$2^o/ f(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3}{(3x+2)^2} - 2 \times \frac{3}{(3x+2)^3}$$

$$\text{Or on sait que si } g = \frac{u'}{u^n} \text{ alors } G = \frac{u^{-n+1}}{-n+1}$$

$$\text{D'où } F(x) = \frac{1}{3} \cdot \frac{-1}{(3x+2)} + \frac{1}{(3x+2)^2} + c$$

$$\text{On a : } F(0) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{6} + \frac{1}{4} + c = 0 \qquad c = \frac{1}{12}$$

$$\text{d'où } F(x) = \frac{-1}{3(3x+2)} + \frac{1}{(3x+2)^2} + \frac{1}{12}$$

Solution 7 :

$$\begin{aligned} F'(x) &= -a \sin x + 3b \cos^2 x (-\sin x) \\ &= -a \sin x - 3b \sin x (1 - \sin^2 x) \\ &= -(a + 3b) \sin x + 3b \sin^3 x \end{aligned}$$

F étant primitive de f sur $\mathbb{R}$ si $F' = f \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} 3b = 6 \\ -a - 3b = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b = 2 \\ a = -8 \end{cases}$$

$$\text{D'où } F(x) = -8 \cos x + 2 \cos^3 x$$

Solution 8 :

$$f(x) = \frac{x^3 - 3x^2 + 5}{(x-2)^2}$$

$$1^\circ / f(x) = \frac{(ax+b)(x-2)^2 + c}{(x-2)^2} = \frac{(ax+b)(x^2 - 4x + 4) + c}{(x-2)^2}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{ax^3 - 4ax^2 + 4ax + bx^2 - 4bx + 4b + c}{(x-2)^2} \\ &= \frac{ax^3 + (b-4a)x^2 + x(4a-4b) + 4b+c}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

Par identification :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b - 4a = -3 \\ 4a - 4b = 0 \\ 4b + c = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 1 \\ b = 1 \\ c = 5 - 4 = 1 \end{cases}$$

$$f(x) = x + 1 + \frac{1}{(x-2)^2}$$

$$2^{\circ} / F(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{1}{(x-2)} + c \quad c \in \mathbb{R}$$

Solution 9 :

1^o / f est continue sur $\mathbb{R}$ donc f possède au moins une primitive F définie sur $\mathbb{R}$.

Comme $F(0) = 0$ alors F est unique.

2^o / Soit $\varphi(x) = F(-x) + F(x)$

φ est définie, dérivable sur $\mathbb{R}$

$$\varphi'(x) = -F'(-x) + F'(x) = \frac{-1}{x^2+1} + \frac{1}{x^2+1} = 0$$

D'où $\varphi(x) = c$

Or $\varphi(0) = F(0) + F(0) = 0$ d'où $c = 0$

D'où pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\varphi(x) = 0$

Et par suite $F(-x) = -F(x)$

Conclusion : F est une fonction impaire.

3^o /

$$a) \quad G(x) = F(\tan x) \quad \text{où } x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$$

On a : $G = F \circ \tan$

$\tan$ est dérivable sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

et pour tout $x \in \left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[: (\tan x) \in Df = \mathbb{R}$

et comme F est dérivable sur $\mathbb{R}$

alors G est dérivable sur $\left] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right[$

$$G'(x) = F'(\tan x) \cdot (1 + \tan^2 x) = f(\tan x) (1 + \tan^2 x)$$

$$= \frac{1}{\tan^2 x + 1} (1 + \tan^2 x) = 1$$

b) On a : $G'(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$

$$\text{D'où } G(x) = x + c$$

$$\text{Or } G(0) = F(\tan(0)) = F(0) = 0$$

$$\text{Et puisque } G(0) = c \text{ alors } c = 0$$

$$\text{D'où pour tout } x \in \mathbb{R} : G(x) = x$$

$$\text{c) On a : } \begin{cases} G(x) = x \\ G(x) = F(\tan x) \end{cases}$$

$$\text{D'où } F(\tan x) = x$$

$$\text{Pour } x = \frac{\pi}{4} \text{ on a : } F\left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right)\right) = \frac{\pi}{4} \text{ d'où } F(1) = \frac{\pi}{4}$$

$$4^\circ / K(x) = F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) \text{ où } x > 0$$

K est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ comme étant somme et composée de fonction dérivables.

$$\begin{aligned} \text{On a : } K'(x) &= F'(x) - \frac{1}{x^2} F'\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{x^2} \left(\frac{1}{\frac{1}{x^2} + 1} \right) \\ &= \frac{1}{x^2 + 1} - \frac{1}{1 + x^2} = 0 \end{aligned}$$

D'où $K(x) = b$ où b est une constante

$$\begin{cases} K(1) = b \\ K(1) = 2F(1) = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad \text{d'où } b = \frac{\pi}{2}$$

$$\text{Conclusion : } \forall x > 0 : F(x) + F\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

Solution 10 :

$$1^\circ / 1 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \leq 1 \Leftrightarrow |x| \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq x \leq 1$$

$$Df = [-1, 1]$$

2°/ f est continue sur $[-1, 1]$

D'où il existe au moins une primitive F définie sur $[-1, 1]$

Or $F(0) = 0$ alors F est unique .

$$3^\circ / a) \varphi(x) = F(\sin x)$$

$$\varphi = F_0 \sin$$

$$\sin \text{ est dérivable sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \quad \sin x \in [-1, 1] = Df \text{ alors } \varphi \text{ est dérivable sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right].$$

$$\varphi'(x) = F'(\sin x) \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} \cos x = \sqrt{\cos^2 x} \cos x = \cos^2 x$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1)$$

$$b) \varphi'(x) = \frac{1}{2}(\cos(2x) + 1)$$

$$\text{Alors } \varphi(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\sin(2x) + x\right) + c$$

$$\text{Or } \varphi(0) = F(0) = 0$$

$$\text{D'où } 0 + 0 + c = 0 \Rightarrow c = 0$$

Conclusion : pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] : \varphi(x) = \frac{1}{4} \sin 2x + \frac{x}{2}$

Solution 11 :

$$\begin{aligned} 1^\circ / f(x) &= \frac{(ax+b)(x-2)^2 + c}{(x-2)^2} = \frac{(ax+b)(x^2 - 4x + 4) + c}{(x-2)^2} \\ &= \frac{a \cdot x^3 - 4ax^2 + 4a \cdot x + bx^2 - 4bx + 4b + c}{(x-2)^2} \\ &= \frac{a x^3 + x^2(b-4a) + x(4a-4b) + 4b+c}{(x-2)^2} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} a=1 \\ b-4a=-3 \\ 4a-4b=0 \\ 4b+c=7 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ b=1 \\ c=3 \end{cases}$$

$$\text{d'où } \forall x > 2, f(x) = x + 1 + \frac{3}{(x-2)^2}.$$

2°/ f est continue sur $]2, +\infty[$ donc f admet au moins une primitive F définie sur $]2, +\infty[$:

$$F(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{x-2} + k.$$

$$\text{or } F(3) = 0 \Rightarrow \frac{9}{2} + 3 - 3 + k = 0 \Rightarrow k = -\frac{9}{2}.$$

$$\text{Conclusion : } \forall x > 2, F(x) = \frac{x^2}{2} + x - \frac{3}{x-2} - \frac{9}{2}.$$

Solution 12 :

$$1^\circ / \forall x \in \mathbf{R}, x^4 + 1 > 0 \text{ d'où } D_f = \mathbf{R}.$$

f est continue sur $\mathbf{R}$ donc f admet au moins une primitive F définie sur $\mathbf{R}$

$$2^\circ / f(x) = \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} \text{ on pose } u(x) = 1+x^4, \quad u'(x) = 4x^3 \text{ d'où } \forall x \in \mathbf{R},$$

$$f(x) = \frac{1}{4} \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \Rightarrow F(x) = \frac{1}{2} \sqrt{u(x)} + k = \frac{\sqrt{1+x^4}}{2} + k.$$

$$\text{or } F(0) = 0 \Rightarrow k + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow k = -\frac{1}{2}.$$

$$\text{Conclusion : } \forall x \in \mathbf{R}, F(x) = \frac{\sqrt{1+x^4}}{2} - \frac{1}{2}.$$

Solution 13 :

$$1^\circ / e^{ix} = \cos x + i \sin x ; \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

$$\text{On a : } \cos 3x = \frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2} \text{ et } \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

$$\begin{aligned} \text{d'où } f(x) &= \left(\frac{e^{i3x} + e^{-i3x}}{2} \right) \left(\frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \right)^3 \\ &= \frac{(e^{i3x} + e^{-i3x})(e^{i3x} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-i3x})}{-16i} \\ &= \frac{e^{i6x} - 3e^{i4x} + 3e^{i2x} - 1 + 1 - 3e^{-2ix} + 3e^{-i4x} - e^{-i6x}}{-16i} \\ &= \frac{(e^{i6x} - e^{-i6x}) - 3(e^{i4x} - e^{-i4x}) + 3(e^{i2x} - e^{-i2x})}{-16i} \\ &= \frac{2i \sin 6x - 3(2i \sin 4x) + 3(2i \sin 2x)}{-16i} \end{aligned}$$

$$\text{d'où : } f(x) = \frac{-1}{8} \sin 6x + \frac{3}{8} \sin 4x - \frac{3}{8} \sin 2x.$$

$$2^\circ / F(x) = \frac{-1}{8} \left(\frac{-1}{6} \cos 6x \right) + \frac{3}{8} \left(\frac{-1}{4} \cos 4x \right) - \frac{3}{8} \left(\frac{-1}{2} \cos 2x \right) + k$$

$$F(x) = \frac{1}{48} \cos 6x - \frac{3}{32} \cos 4x + \frac{3}{16} \cos 2x + k.$$

$$\text{Or } F(0) = 0 \Rightarrow \frac{1}{48} - \frac{3}{32} + \frac{3}{16} + k = 0 \Rightarrow k = -\frac{11}{96}.$$

$$\text{Conclusion : } \forall x \in \mathbf{R}, F(x) = \frac{1}{48} \cos 6x - \frac{3}{32} \cos 4x + \frac{3}{16} \cos 2x - \frac{11}{96}.$$