

EXERCICES

Exercice 1 :

Calculer l'intégrale A dans chacun des cas suivants :

$$1^\circ / A = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+2x^3}} dx$$

$$2^\circ / A = \int_0^1 t \sqrt{1-t^2} dt$$

$$3^\circ / A = \int_{-1}^0 \frac{2t}{(t^2+1)^3} dt$$

$$4^\circ / A = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx$$

$$5^\circ / A = \int_0^2 (1-|x-1|^3) dx$$

$$6^\circ / A = \int_0^\pi \cos x \sin^4 x dx$$

$$7^\circ / A = \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \cos^3 x dx$$

$$8^\circ / A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} (\cos^3 x + \sin^3 x) dx$$

Exercice 2 :

Soit $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbf{R} ; x \mapsto 1 + \tan x$.

1°/ a) Montrer que f est une bijection.

b) Soit $g = f^{-1}$. Prouver que g est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$g'(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}$$

$$2^\circ / \text{ Soit l'intégrale } I = \int_1^2 \frac{1}{x^2 - 2x + 2} dx.$$

a) Vérifier que $I = g(2) - g(1)$.

b) En déduire que $I = \frac{\pi}{4}$.

Exercice 3 :

Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbf{N}}$ définie par : $U_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx$.

1°/ Montrer que (U_n) est une suite décroissante, minorée par 0.

2°/ Soit n un entier non nul.

a) Montrer que la fonction $f_n : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} : x \mapsto x^n \sqrt{1-x}$ admet un maximum relatif que l'on précisera.

b) En déduire que (U_n) converge vers 0.

3°/a) Calculer U_0 .

b) Prouver que $\forall n \geq 1$, on a : $(2n+3)U_n = 2n U_{n-1}$.

4°/ Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{2^{2n+2} n!(n+1)!}{(2n+3)!}$.

Exercice 4 :

Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par : $U_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \, dt$.

1°/ Calculer U_0 , U_1 , U_2 .

2°/ Montrer, à l'aide d'une intégration par parties que :

$$U_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} U_n$$

3°/ Montrer que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \cdot \frac{\pi}{2^{2n+1}}$.

4°/a) Montrer que $(n+1)U_{n+1} \cdot U_n$ est indépendant de n .

b) Calculer alors U_{2n+1} .

Exercice 5 :

Soit a un réel de l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}]$.

Pour tout entier $n \geq 1$, on pose $I_n(a) = \int_0^a \frac{\sin^{2n} t}{\cos t} \, dt$.

1°/a) Montrer que $\forall t \in [0, a]$, $0 \leq \frac{\sin^{2n} t}{\cos t} \leq \frac{\sin^{2n} a}{\cos a}$.

b) Montrer que $0 \leq I_n(a) \leq \frac{a \sin^{2n} a}{\cos a}$.

c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(a)$.

Exercice 6 :

Soit $F(x) = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t^4 + 1}}$.

1°/ Montrer que F est une fonction impaire.

2°/ Etudier le sens des variations de F .

3°/a) Prouver que $\forall t \geq 1$, on a : $\frac{1}{\sqrt{t^4+1}} \leq \frac{1}{t^2}$.

b) En déduire que $\forall x \geq 1$, $F(x) - F(1) \leq 1$.

c) En déduire que F admet une limite finie l en $+\infty$.

On admettra que $l \approx 0,92$.

4°/a) Ecrire une équation de la tangente (T) à C_F au point d'abscisse $x_0 = 0$.

b) Etudier la position de C_F et (T) .

c) Donner l'allure de la courbe C_F dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 7 (BAC Tunisien) :

Pour tout entier naturel non nul, on pose $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg} x)^n dx$.

1°/a) Pour tout réel x de l'intervalle $[0, \frac{\pi}{4}]$ et pour tout entier naturel n ,

calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto (\operatorname{tg} x)^{n+1}$

b) En déduire que, pour tout entier naturel non nul n , on a :

$$I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}.$$

2°/a) Montrer que, pour tout entier naturel non nul, on a : $I_n \geq 0$.

En déduire que $I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

b) Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n$.

Exercice 8 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par $f(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$.

1°/a) Dresser le tableau de variation de f et tracer sa courbe représentative (C) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $\mathbf{R}$ une solution unique α telle que : $1 < \alpha < \frac{3}{2}$.

2°/ On appelle g la restriction de f à $\mathbb{R}_+$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque g^{-1} définie dans $]1, 2]$

b) Ecrire l'expression de $g^{-1}(x)$ pour x appartenant à $]1, 2]$.

c) Tracer la courbe (C') de g^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3°/ Soit φ la fonction définie sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ par : $\varphi(x) = \int_0^{\operatorname{tg} x} f(t) dt$.

a) Montrer que φ est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et que $\varphi'(x) = \operatorname{tg}^2 x + 2$.

b) Calculer alors $\varphi(x)$.

c) En déduire l'aire A du domaine limité par la courbe (C) et les droites d'équations respectives $x=0$, $x=1$ et $y=1$.

Exercice 9 :

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $U_n = \int_0^1 x^n \cdot \sqrt{1-x^2} dx$

1°/a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N} : 0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

2°/Utiliser une intégration par parties pour montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$

$$\text{on a : } U_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} U_n$$

3°/ Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\Phi(t) = \int_0^{\cos t} \sqrt{1-x^2} dx$

a) Montrer que Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer $\Phi'(t)$.

c) En déduire $\Phi(t)$ pour $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Calculer alors U_0 .

4°/ a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $\frac{n+1}{n+4} \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$

b) Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n}$

c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$U_n \cdot U_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)(n+2)(n+3)}$$

d) Montrer alors que : $\lim_{n \rightarrow +\infty} n \sqrt{n} U_n = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$

Exercice 10 :

$$U_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}}$$

1°/ Calculer U_0 .

2°/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n \geq 0$

3°/ a) Montrer que (U_n) est une suite décroissante

b) Montrer que (U_n) est convergente

4°/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$\frac{1}{\sqrt{2}(2n+2)} \leq U_n \leq \frac{1}{2n+2}$$

Calculer alors la limite de (U_n)

Exercice 11:

$$1^\circ/ f(x) = x + \sin x$$

Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par C_f ; $(x'x)$; $x=0$ et

$$x = \frac{\pi}{2}$$

$$2^\circ/ a) \text{ Calculer } J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx$$

$$b) C : \text{la courbe représentative de } f \text{ sur } \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Calculer le volume du solide (S) obtenu par la rotation de C autour l'axe des abscisses.

Exercice 12:

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$$

1°/ Déterminer Df

2°/ Calculer l'aire A de la partie du plan limitée par C_f ; la droite D :

$$y = 1, \text{ et les droites } x = 0 \text{ et } x = \frac{\pi}{4}.$$

$$3^\circ/ \text{ Soit } \varphi(x) = \frac{\sin x}{\cos^3 x}$$

- a) Calculer $\varphi'(x)$ et prouver que $\varphi'(x) = 3f^2(x) - 2f(x)$
- b) Calculer le volume du solide (S) obtenu par la rotation de Γ autour de l'axe des abscisses où $\Gamma = \left\{ M(x, y) / y = f(x) \text{ et } 0 \leq x \leq \frac{\pi}{4} \right\}$

Exercice 13 :

A) Soit la fonction $f :]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R} ; x \mapsto \operatorname{tg} x$

et C_f sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1°/a) Etudier les variations de f .

b) Soit Δ la tangente à C_f au point d'abscisse $x_0 = 0$. Etudier les positions relatives de C_f et Δ .

c) Tracer C_f .

2°/a) Montrer que f est une bijection.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.

c) Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R} : f^{-1}(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$

3°/ Calculer alors $I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2}$.

B) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt$ et $a_0 = 1$.

1°/ Montrer que : $a_{n+1} - a_n = - \int_0^1 t^2 (1-t^2)^n dt$.

2°/ Montrer que la suite (a_n) est convergente.

3°/a) Prouver à l'aide d'une intégration par parties que pour tout

$n \in \mathbb{N}^*$ on a : $a_{n+1} = \frac{(2n+2)a_n}{3+2n}$.

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N} : a_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

C) On considère : $U_n = \sum_{p=0}^n \left(\frac{p!}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2p+1)} \right)$ où $n \in \mathbb{N}$.

1°/ Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a : $U_n = 2 \cdot \int_0^1 \frac{1 - \left(\frac{1-t^2}{2} \right)^{n+1}}{1+t^2} dt$.

2°/a) On pose $V_n = 2I - U_n$. Exprimer V_n à l'aide d'une intégrale.

b) Montrer que pour tout $t \in [0, 1]$: $0 \leq \frac{(1-t^2)^{n+1}}{1+t^2} \leq 1$.

c) Calculer alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$

3°/ Calculer alors : $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$.

SOLUTIONS

Solution 1 :

$$\begin{aligned}
 A &= \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1+2x^3}} dx = \int_0^1 x^2 (1+2x^3)^{-\frac{1}{2}} dx = \frac{1}{6} \int_0^1 6x^2 (1+2x^3)^{-\frac{1}{2}} dx \\
 &= \frac{1}{6} \cdot \left[\frac{(1+2x^3)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} \right]_0^1 = \frac{\sqrt{3}-1}{3}
 \end{aligned}$$

$$2^\circ / A = \int_0^1 t \sqrt{1-t^2} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 2t (1-t^2)^{\frac{1}{2}} dt = \frac{1}{2} \left[\frac{(1-t^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = -\frac{1}{3}.$$

$$3^\circ / A = \int_{-1}^0 \frac{2t}{(t^2+1)^3} dt = \int_{-1}^0 2t (t^2+1)^{-3} dt = \left[\frac{(t^2+1)^{-2}}{-2} \right]_{-1}^0 = -\frac{3}{8}.$$

$$4^\circ / A = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1+x}} dx = 2 \left[\sqrt{1+x} \right]_0^1 = 2(\sqrt{2}-1).$$

$$\begin{aligned}
 5^\circ / A &= \int_0^2 (1-|x-1|^3) dx = \int_0^1 (1-|x-1|^3) dx + \int_1^2 (1-|x-1|^3) dx \\
 &= \int_0^1 (1-(1-x)^3) dx + \int_1^2 (1-(x-1)^3) dx \\
 &= \left[x + \frac{(1-x)^4}{4} \right]_0^1 + \left[x - \frac{(x-1)^4}{4} \right]_1^2 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}
 \end{aligned}$$

$$6^\circ / A = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \cos x \sin^4 x dx = \left[\frac{\sin^5 x}{5} \right]_0^{\frac{\pi}{3}} = \frac{1}{5} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right)^5 = \frac{9\sqrt{3}}{160}.$$

$$\begin{aligned}
 7^\circ / A &= \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \cos^3 x dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \cos x \cos^2 x dx = \int_{\frac{\pi}{3}}^0 \cos x (1-\sin^2 x) dx \\
 &= \int_{\frac{\pi}{3}}^0 (\cos x - \cos x \sin^2 x) dx = \left[\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} \right]_{\frac{\pi}{3}}^0 = -\frac{3\sqrt{3}}{8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8^{\circ} / \mathcal{A} &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos^3 x + \sin^3 x) dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos x (1 - \sin^2 x) + \sin x (1 - \cos^2 x)) dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} (\cos x + \sin x - \cos x \sin^2 x - \sin x \cos^2 x) dx \\
 &= \left[\sin x - \cos x - \frac{\sin^3 x}{3} + \frac{\cos^3 x}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{27 - 9\sqrt{3}}{24}
 \end{aligned}$$

Solution 2 :

1°/a) f est définie et dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on a :

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} > 0.$$

f est continue et strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ donc f réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur $]\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}^+} f(x); \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} f(x)[= \mathbf{R}$.

b) * f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\forall x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, $f'(x) \neq 0$.

donc g est dérivable sur $f(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[) = \mathbf{R}$.

* $\forall x \in \mathbf{R}$ on a : $g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$. Posons $g(x) = y$

d'où $g'(x) = \frac{1}{f'(y)}$. Or $f'(y) = \frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y$.

Or $g(x) = y \Leftrightarrow x = f(y) \Leftrightarrow x = 1 + \tan y \Leftrightarrow \tan y = x - 1 \Leftrightarrow \tan^2 y = x^2 - 2x + 1$

d'où $f'(y) = x^2 - 2x + 2$ et par suite $\forall x \in \mathbf{R}$ on a :

$$g'(x) = \frac{1}{x^2 - 2x + 2}.$$

2°/a) $\mathbf{I} = \int_1^2 \frac{dx}{x^2 - 2x + 2} = \int_1^2 g'(x) dx = [g(x)]_1^2 = g(2) - g(1)$

b) On a : $\mathbf{I} = g(2) - g(1)$.

* Calcul de $g(2)$:

$$g(2) = x \Leftrightarrow f(x) = 2 \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg} x = 2 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{car } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[. \text{ Donc } g(2) = \frac{\pi}{4}.$$

* Calcul de $g(1)$:

$$g(1) = x \Leftrightarrow f(x) = 1 \Leftrightarrow 1 + \operatorname{tg} x = 1 \Leftrightarrow \operatorname{tg} x = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

$$\text{car } x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[. \text{ Donc } g(1) = 0 \quad \text{d'où } I = \frac{\pi}{4}$$

Solution 3 :

$1^\circ / x \mapsto x^n \sqrt{1-x}$ est continue sur $] -\infty, 1]$ en particulier sur $[0, 1]$

d'où $\int_0^1 x^n \sqrt{1-x} \, dx$ existe.

$$U_{n+1} - U_n = \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} (x-1) \, dx$$

$\forall x \in [0, 1], x^n \sqrt{1-x} (x-1) \leq 0$ d'où $\forall n \in \mathbf{N}, U_{n+1} - U_n \leq 0$ d'où (U_n) est une suite décroissante.

On a : $\forall x \in [0, 1], x^n \sqrt{1-x} \geq 0$ d'où $U_n \geq 0$ d'où (U_n) est une suite minorée par 0.

$2^\circ / a) f_n$ est continue sur $[0, 1]$; f_n est dérivable sur $[0, 1[$

$$\begin{aligned} \forall x \in [0, 1[, f'_n(x) &= n x^{n-1} \sqrt{1-x} + x^n \frac{-1}{2\sqrt{1-x}} = \frac{2n x^{n-1} (1-x) - x^n}{2\sqrt{1-x}} \\ &= \frac{x^{n-1} (2n - 2nx - x)}{2\sqrt{1-x}} = \frac{x^{n-1} (2n - (2n+1)x)}{2\sqrt{1-x}} \end{aligned}$$

x	0	$\frac{2n}{2n+1}$	1
$f'_n(x)$		+	0
$f_n(x)$	0	M_n	

$$M_n = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n \sqrt{1 - \frac{2n}{2n+1}} = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

$$\text{d'où } \forall x \in [0, 1], \text{ on a : } 0 \leq f_n(x) \leq \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

Conclusion : f_n admet sur $[0, 1]$ un maximum relatif égal à

$$M_n = \left(\frac{2n}{2n+1}\right)^n \frac{1}{\sqrt{2n+1}}.$$

$$\text{b) On a : } 0 \leq x^n \sqrt{1-x} \leq M_n \Rightarrow 0 \leq U_n \leq \int_0^1 M_n dx$$

$$0 \leq U_n \leq [M_n x]_0^1 \Rightarrow 0 \leq U_n \leq M_n$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} M_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} e^{n \operatorname{Log} \frac{2n}{2n+1}} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0 \text{ car :}$$

$$\bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2n+1}} = 0$$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{n \rightarrow +\infty} n \operatorname{Log} \frac{2n}{2n+1} &= \lim_{n \rightarrow +\infty} -n \operatorname{Log} \frac{2n+1}{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} -n \operatorname{Log} \left(1 + \frac{1}{2n}\right) \\ &= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{-1 \operatorname{Log}(1+X)}{\frac{1}{2n}} = \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

d'où (U_n) converge vers 0.

$$3^\circ/\text{a) } U_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x} dx = \left[\frac{-2}{3} (1-x)^{\frac{3}{2}} \right]_0^1 = \frac{2}{3}$$

$$\text{b) } \begin{cases} u = x^n \\ v' = \sqrt{1-x} \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u' = nx^{n-1} \\ v = -\frac{2}{3} (1-x)\sqrt{1-x} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} U_n &= \left[-\frac{2}{3} (1-x)\sqrt{1-x} \cdot x^n \right]_0^1 + \frac{2}{3} n \int_0^1 x^{n-1} (1-x)\sqrt{1-x} dx \\ &= \frac{2}{3} n \int_0^1 (x^{n-1} \sqrt{1-x} - x^n \sqrt{1-x}) dx \end{aligned}$$

$$U_n = \frac{2}{3} n \left(\int_0^1 x^{n-1} \sqrt{1-x} dx - \int_0^1 x^n \sqrt{1-x} dx \right).$$

$$3U_n = 2nU_{n-1} - 2nU_n \Rightarrow (3+2n)U_n = 2nU_{n-1}.$$

$$4^\circ / \text{ Montrons par récurrence que } \forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{2^{2n+2} n! (n+1)!}{(2n+3)!}$$

$$\bullet \text{ pour } n=0, U_0 = \frac{2}{3} = \frac{2^{2 \cdot 0 + 2} 0! (0+1)!}{(2 \cdot 0 + 3)!}$$

donc la relation demandée est vraie pour $n=0$.

$$\bullet \text{ supposons que pour un entier donné } n \text{ on a : } U_n = \frac{2^{2n+2} n! (n+1)!}{(2n+3)!}$$

$$\text{et montrons que } U_{n+1} = \frac{2^{2n+4} (n+1)! (n+2)!}{(2n+5)!}$$

$$\text{On a : } U_{n+1} = \frac{(2n+2)}{2n+5} U_n \text{ d'après } 3^\circ / \text{ b)}$$

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= \frac{(2n+2)}{2n+5} \cdot \frac{2^{2n+2} n! (n+1)!}{(2n+3)!} = \frac{2(n+1)(2n+4)2^{2n+2} n! (n+1)!}{(2n+5)!} \\ &= \frac{2^2 (n+1)(n+2)2^{2n+2} n! (n+1)!}{(2n+5)!} = \frac{2^{2n+4} (n+1)! (n+2)!}{(2n+5)!} \end{aligned}$$

$$\text{d'où } \forall n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{2^{2n+2} n! (n+1)!}{(2n+3)!}.$$

Solution 4 :

$$1^\circ / U_0 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^0 t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 1 \, dt = \frac{\pi}{2}$$

$$U_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos t \, dt = [\sin t]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$U_2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t \, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - \cos 2t}{2} \, dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.$$

$$2^\circ / U_{n+2} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{n+2} t \, dt$$

$$\text{Soient } \begin{cases} u' = \cos t \\ v = \cos^{n+1} t \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u = \sin t \\ v' = -(n+1) \cos^n t \sin t \end{cases}$$

$$U_{n+2} = \left[\sin t \cos^{n+1} t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t \sin^2 t \, dt$$

$$U_{n+2} = (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t (1 - \cos^2 t) \, dt \Rightarrow U_{n+2} = (n+1) (U_n - U_{n+2})$$

$$\Rightarrow U_{n+2} = \frac{n+1}{n+2} U_n.$$

3°/ Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}$, $U_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{\pi}{2^{2n+1}}$.

• pour $n=0$, $U_0 = \frac{\pi}{2} = \frac{(2 \cdot 0)!}{(0!)^2} \cdot \frac{\pi}{2^{2 \cdot 0 + 1}}$

• supposons que pour un entier donné n on a : $U_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{\pi}{2^{2n+1}}$ et

montrons que $U_{2n+2} = \frac{(2n+2)!}{((n+1)!)^2} \frac{\pi}{2^{2n+3}}$

$$\begin{aligned} U_{2n+2} &= U_{(2n)+2} = \frac{2n+1}{2n+2} U_{2n} = \frac{2n+1}{2n+2} \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{\pi}{2^{2n+1}} \\ &= \frac{(2n+1)! \pi}{2^{2n+2} (n+1)(n!)^2} = \frac{(2n+2)! \pi}{2^{2n+3} ((n+1)!)^2} \end{aligned}$$

d'où $\forall n \in \mathbf{N}$, $U_{2n} = \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{\pi}{2^{2n+1}}$.

4°/a) Soit $V_n = (n+1)U_{n+1} \cdot U_n$

$$V_{n+1} = (n+2)U_{n+2} \cdot U_{n+1} = (n+2) \frac{n+1}{n+2} U_n \cdot U_{n+1}$$

$$= (n+1)U_n \cdot U_{n+1} = V_n \Rightarrow (V_n) \text{ est une suite constante.}$$

$$V_0 = 1 \cdot U_1 \cdot U_0 = \frac{\pi}{2} \text{ d'où } \forall n \in \mathbf{N}, (n+1)U_n \cdot U_{n+1} = \frac{\pi}{2}.$$

b) $(2n+1)U_{2n} \cdot U_{2n+1} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow (2n+1) \frac{(2n)!}{(n!)^2} \frac{\pi}{2^{2n+1}} U_{2n+1} = \frac{\pi}{2}$

$$\Rightarrow \frac{(2n+1)!}{(n!)^2} \frac{1}{2^{2n}} U_{2n+1} = 1 \Rightarrow U_{2n+1} = \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n+1)!}.$$

Solution 5 :

1°/a) Soit $f_n(t) = \frac{\sin^{2n} t}{\cos t}$; f_n est dérivable sur $[0, a]$ et $\forall t \in [0, a]$,

$$f'_n(t) = \frac{\sin^{2n-1} t (2n \cos^2 t + \sin^2 t)}{\cos^2 t} \geq 0$$

ce qui prouve que f_n est une fonction croissante sur $[0, a]$ donc pour

tout $t \in [0, a]$, $f_n(0) \leq f_n(t) \leq f_n(a)$ d'où $0 \leq \frac{\sin^{2n} t}{\cos t} \leq \frac{\sin^{2n} a}{\cos a}$.

b) En intégrant entre 0 et a ces inégalités on obtient :

$$0 \leq \int_0^a \frac{\sin^{2n} t}{\cos t} dt \leq \int_0^a \frac{\sin^{2n} a}{\cos a} dt$$

$$\text{or } \int_0^a \frac{\sin^{2n} a}{\cos a} dt = \frac{\sin^{2n} a}{\cos a} [t]_0^a = a \frac{\sin^{2n} a}{\cos a}$$

Il en résulte que : $0 \leq I_n(a) \leq a \frac{\sin^{2n} a}{\cos a}$.

c) On a : $\forall n \geq 1$, $0 \leq I_n(a) \leq a \frac{\sin^{2n} a}{\cos a}$ et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} a \frac{\sin^{2n} a}{\cos a} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a}{\cos a} \cdot (\sin^2 a)^n = 0 \text{ car } -1 < \sin^2 a < 1$$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n(a) = 0$.

$$2^\circ/ U_n = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{(2k+1) \cdot 2^{2k+1}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3 \cdot 2^3} + \frac{1}{5 \cdot 2^5} + \dots + \frac{1}{(2n-1) \cdot 2^{2n-1}}$$

$$= \sin \frac{\pi}{6} + \frac{\sin^3(\frac{\pi}{6})}{3} + \frac{\sin^5(\frac{\pi}{6})}{5} + \dots + \frac{\sin^{2n-1}(\frac{\pi}{6})}{2n-1} = F_n(\frac{\pi}{6})$$

or d'après 4°/ b) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} F_n(\frac{\pi}{6}) = g(\frac{\pi}{6}) = \frac{1}{2} \operatorname{Log} \left(\frac{1 + \sin \frac{\pi}{6}}{1 - \sin \frac{\pi}{6}} \right) = \frac{1}{2} \operatorname{Log} 3 = \operatorname{Log} \sqrt{3}$$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = g(\frac{\pi}{6}) = \operatorname{Log} \sqrt{3}$.

Solution 6 :

1°/ F est définie sur $\mathbf{R}$ car la fonction $t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t^4+1}}$ est continue sur $\mathbf{R}$.

F est impaire si et seulement si $\forall x \in \mathbf{R}, F(-x) + F(x) = 0$

Soit $K(x) = F(-x) + F(x)$

K est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme somme et composée des fonctions dérivables sur $\mathbf{R}$.

$\forall x \in \mathbf{R}, K'(x) = -F'(-x) + F'(x)$

Or $F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4+1}}$ d'où $K'(x) = \frac{-1}{\sqrt{x^4+1}} + \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} = 0$

Donc $\forall x \in \mathbf{R}, K'(x) = 0$ d'où K est une fonction constante.

Or $K(0) = 2F(0) = 0$ donc $\forall x \in \mathbf{R}, K(x) = 0 \Rightarrow F(-x) + F(x) = 0$
ce qui prouve que F est une fonction impaire.

2°/ On a : $\forall x \in \mathbf{R}, F'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^4+1}} > 0$

d'où F est une fonction strictement croissante sur $\mathbf{R}$.

3°/a) On a : $\forall t \in \mathbf{R}^*, t^4 + 1 \geq t^4 \Rightarrow \sqrt{t^4+1} \geq t^2 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{t^4+1}} \leq \frac{1}{t^2}$

en particulier pour tout $t \geq 1$ on a : $\frac{1}{\sqrt{t^4+1}} \leq \frac{1}{t^2}$

b) Soit $x \geq 1$, $F(x) = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}} + \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}} = F(1) + \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$

or pour tout $t \geq 1$, on a : $\frac{1}{\sqrt{t^4+1}} \leq \frac{1}{t^2} \Rightarrow \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}} \leq \int_1^x \frac{1}{t^2} dt$

$\int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \left[\frac{-1}{t} \right]_1^x = \frac{-1}{x} + 1$ or pour tout $x \geq 1, 1 - \frac{1}{x} \leq 1$

d'où $\int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}} \leq 1 \Rightarrow F(1) + \int_1^x \frac{dt}{\sqrt{t^4+1}} \leq F(1) + 1$

$\Rightarrow F(x) \leq F(1) + 1 \Rightarrow F(x) - F(1) \leq 1$.

Conclusion : $\forall x \geq 1, F(x) - F(1) \leq 1$.

c) F est une fonction strictement croissante

et $\forall x \in [1, +\infty[$, $F(x) \leq F(1) + 1$ (F est majorée sur $[1, +\infty[$ par $F(1) + 1$)

donc F admet une limite finie l en $+\infty$.

4°/a) La tangente (T) à C_F au point d'abscisse $x_0 = 0$ a pour équation $y = F'(0)x + F(0)$ or $F'(0) = 1$ et $F(0) = 0$ d'où (T) : $y = x$.

b) $g(x) = F(x) - x$.

g est dérivable sur $\mathbf{R}$. $\forall x \in \mathbf{R}$, $g'(x) = F'(x) - 1 = \frac{1}{\sqrt{x^2 + 1}} - 1 \leq 0$

car $\forall x \in \mathbf{R}$, $\sqrt{x^2 + 1} \geq 1$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g'(x)$	-	0	-
$g(x)$	(+)	0	(-)

d'après le tableau des variations de g , on a :

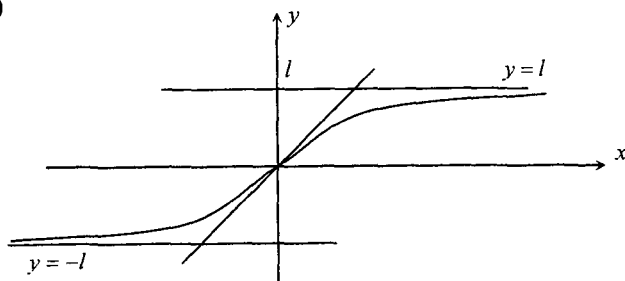
x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	+	0	-

donc : • sur $] -\infty, 0[$, C_F est au dessus de (T)

• sur $] 0, +\infty [$, C_F est au dessous de (T)

• C_F et (T) se rencontrent au point $O(0,0)$.

c)



Solution 7 :

1°/ a) Soit $f(x) = (\operatorname{tg} x)^{n+1}$.

f est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{4}]$ et $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $f'(x) = (n+1) \operatorname{tg}^n x (1 + \operatorname{tg}^2 x)$.

$$\begin{aligned}
 \text{b) } I_n + I_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^n x \, dx + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^{n+2} x \, dx \\
 &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\operatorname{tg}^n x + \operatorname{tg}^{n+2} x) \, dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^n x (1 + \operatorname{tg}^2 x) \, dx \\
 &= \frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (n+1) \operatorname{tg}^n x (1 + \operatorname{tg}^2 x) \, dx \\
 &= \frac{1}{n+1} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f'(x) \, dx = \frac{1}{n+1} [f(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{1}{n+1} [f(\frac{\pi}{4}) - f(0)]
 \end{aligned}$$

or $f(\frac{\pi}{4}) = 1$ et $f(0) = 0$ d'où $I_n + I_{n+2} = \frac{1}{n+1}$.

2°/ a) • $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, on a : pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\operatorname{tg}^n x \geq 0$ donc $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \operatorname{tg}^n x \, dx \geq 0$
d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $I_n \geq 0$.

• On a : $I_n - \frac{1}{n+1} = -I_{n+2}$ or $I_{n+2} \geq 0$ donc $-I_{n+2} \leq 0$

d'où $I_n - \frac{1}{n+1} \leq 0$ et par suite $I_n \leq \frac{1}{n+1}$.

b) on a : $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} I_n = 0$

Solution 8 :

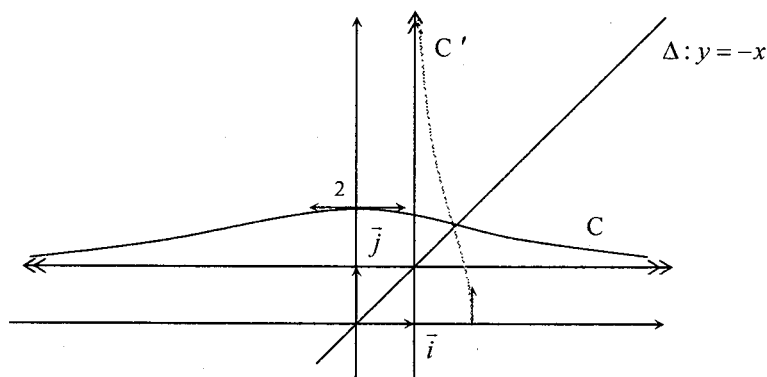
1°/ a) f est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = \frac{2x(x^2+1) - 2x(x^2+2)}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x}{(x^2+1)^2}$$

le signe de $f'(x)$ est celui de $-x$ d'où :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$		2	

$\swarrow$ 1 $\searrow$



$$b) f(x) = x \Leftrightarrow \frac{x^2 + 2}{x^2 + 1} = x \Leftrightarrow x^3 - x^2 + x - 2 = 0$$

$$\text{Soit } h(x) = x^3 - x^2 + x - 2, \quad h'(x) = 3x^2 - 2x + 1$$

Or $\Delta = -8 < 0$ donc $h'(x) > 0$ d'où

x	$-\infty$	$+\infty$
$h'(x)$	+	
$h(x)$	$-\infty$	$+\infty$

h est continue et strictement croissantes sur $\mathbf{R}$ donc h réalise une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}$ donc 0 admet un seul antécédent α par h et par suite l'équation $f(x) = x$ admet une solution unique α dans $\mathbf{R}$.

$$\text{On a : } \begin{cases} h(1) \cdot h(\frac{3}{2}) < 0 \\ h \text{ est continue sur } [1, \frac{3}{2}] \end{cases} \quad \text{donc } 1 < \alpha < \frac{3}{2}.$$

2°/a) g est continue et strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$ donc g réalise une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur $g(\mathbf{R}_+) =]1, 2]$ donc g admet une fonction réciproque g^{-1} définie sur $]1, 2]$.

$$b) g^{-1} :]1, 2] \rightarrow \mathbf{R} : x \mapsto g^{-1}(x) = y$$

$$g^{-1}(x) = y \Leftrightarrow g(y) = x \Leftrightarrow \frac{y^2 + 2}{y^2 + 1} = x \Leftrightarrow y^2 + 2 = xy^2 + x \Leftrightarrow$$

$$y^2(1-x) = x-2 \Leftrightarrow y^2 = \frac{x-2}{1-x} \quad (\text{car } x \neq 1) \Leftrightarrow y = \sqrt{\frac{x-2}{1-x}} \quad (\text{car } y \in \mathbf{R}_+)$$

c) $(C') = S_{\Delta}(C)$ où S_{Δ} est la symétrie orthogonale d'axe $\Delta: y = x$.

3°/a) La fonction f est continue sur $\mathbf{R}$ donc la fonction

$$F: x \mapsto \int_0^x f(t) dt \text{ est dérivable sur } \mathbf{R}.$$

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}[, \operatorname{tg} x \in [0, 1] \subset \mathbf{R}$$

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}[, \varphi(x) = F(\operatorname{tg} x)$$

φ est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{4}[$ comme composée de deux fonctions dérivables.

$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}[, \varphi'(x) = (1 + \operatorname{tg}^2 x) F'(\operatorname{tg} x) = (1 + \operatorname{tg}^2 x) f(\operatorname{tg} x)$$

$$= (1 + \operatorname{tg}^2 x) \cdot \frac{\operatorname{tg}^2 x + 2}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = \operatorname{tg}^2 x + 2$$

$$\text{b) On a : } \varphi'(x) = \operatorname{tg}^2 x + 2 = (1 + \operatorname{tg}^2 x) + 1 = \operatorname{tg}' x + 1$$

$$\Rightarrow \varphi(x) = \operatorname{tg} x + x + C$$

$$\text{or } \varphi(0) = 0 \text{ d'où } C = 0 \text{ et par suite } \varphi(x) = x + \operatorname{tg} x.$$

$$\text{c) } A = \int_0^1 (f(t) - 1) dt \quad (uA) \text{ car } C_f \text{ est au dessus de la droite } D: y = 1.$$

$$\int_0^1 (f(t) - 1) dt = \int_0^1 f(t) dt - \int_0^1 1 dt = \int_0^{\operatorname{tg} \frac{\pi}{4}} f(t) dt - [t]_0^1 = \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) - 1$$

$$\text{or } \varphi(x) = x + \operatorname{tg} x \text{ d'où } \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{4} + 1$$

$$\text{d'où } A = \frac{\pi}{4} \quad (uA).$$

Solution 9 :

$$1^\circ/\text{a) } 0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Leftrightarrow -1 \leq -x^2 \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq 1 - x^2 \leq 1 \Leftrightarrow$$

$$0 \leq \sqrt{1 - x^2} \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^n \sqrt{1 - x^2} \leq x^n$$

$$\text{d'où } 0 \leq \int_0^1 x^n \sqrt{1 - x^2} dx \leq \int_0^1 x^n dx \Leftrightarrow 0 \leq U_n \leq \left[\frac{x^{n+1}}{n+1} \right]_0^1 \text{ donc}$$

$$0 \leq U_n \leq \frac{1}{n+1}$$

b) On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+1} = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$

$$2^\circ / U_{n+2} = \int_0^1 x^{n+2} \sqrt{1-x^2} dx \quad \text{on pose : } \begin{cases} u' = -2x\sqrt{1-x^2} \\ v = -\frac{x^{n+1}}{2} \end{cases} \quad \text{et}$$

$$\begin{cases} u = \frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2} \\ v' = -\frac{(n+1)x^n}{2} \end{cases}$$

$$U_{n+2} = \left[-\frac{2}{3}(1-x^2)^{3/2} \frac{-x^{n+1}}{2} \right]_0^1 - \int_0^1 \frac{2}{3} \frac{-(n+1)}{2} x^n (1-x^2)^{3/2} dx$$

$$\text{d'où } U_{n+2} = \frac{(n+1)}{3} \int_0^1 x^n (1-x^2) \sqrt{1-x^2} dx =$$

$$\frac{(n+1)}{3} \int_0^1 (x^n \sqrt{1-x^2} - x^{n+2} \sqrt{1-x^2}) dx$$

$$U_{n+2} = \frac{(n+1)}{3} (U_n - U_{n+2}) \text{ soit } U_{n+2} = \frac{n+1}{3} U_n - \frac{n+1}{3} U_{n+2} \text{ d'où } U_{n+2}$$

$$+ \frac{n+1}{3} U_{n+2} = \frac{n+1}{3} U_n$$

$$\text{ainsi } (n+4)U_{n+2} = (n+1)U_n \quad \text{donc pour tout } n \in \mathbb{N} : U_{n+2} = \frac{n+1}{n+4} U_n$$

$$3^\circ / \text{Soit } g(x) = \sqrt{1-x^2}$$

a) * g est continue sur $[-1, 1]$

* $0 \in [-1, 1]$, $\cos t \in [-1, 1]$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ donc $\Phi(t)$ est définie sur $\mathbb{R}$

b) Soit G une primitive de g sur $[-1, 1]$ alors pour tout $t \in \mathbb{R}$ on a : $\Phi(t) = G(\cos t) - G(0)$

Φ est dérivable sur $\mathbb{R}$ (comme somme et composée de fonctions dérivables)

$$\Phi'(t) = g(\cos t) \cdot (-\sin t) \quad \text{d'où } \Phi'(t) = -\sqrt{1-\cos^2 t} \cdot \sin t = -|\sin t| \sin t$$

c) $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $\Phi'(t) = -\sin^2 t$ or $\cos 2t = 1 - 2\sin^2 t$

$$\text{donc } -\sin^2 t = \frac{\cos 2t - 1}{2}$$

d'où $\Phi'(t) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2t)$ et par suite $\Phi(t) = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin(2t) + C$

or $\Phi\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ donc $-\frac{\pi}{4} + \frac{1}{4} \sin(\pi) + C = 0$ d'où $C = \frac{\pi}{4}$

on a pour tout $t \in [0, \frac{\pi}{2}]$: $\Phi(t) = -\frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin(2t) + \frac{\pi}{4}$

$$U_0 = \int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx = \Phi(0) = \frac{\pi}{4}$$

4^{o/a}) (U_n) est une suite décroissante donc $U_{n+2} \leq U_{n+1} \leq U_n$ et comme $U_n > 0$

on a : $\frac{U_{n+2}}{U_n} \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$ soit $\frac{n+1}{n+4} \leq \frac{U_{n+1}}{U_n} \leq 1$

b) on a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{n+4} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n(1 + \frac{1}{n})}{n(1 + \frac{4}{n})} = 1$ donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1$

c) * $U_0 = \frac{\pi}{4}$ et $U_1 = \int_0^1 x \sqrt{1-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^1 (-2x) \sqrt{1-x^2} dx$
 $= \frac{1}{2} \left[\frac{(1-x^2)^{3/2}}{3/2} \right]_0^1 = \frac{1}{3}$

$$U_0 \cdot U_1 = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2(0+1)(0+2)(0+3)}$$

supposons que : $U_n \cdot U_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)(n+2)(n+3)}$ et montrons que

$$U_{n+1} \cdot U_{n+2} = \frac{\pi}{2(n+2)(n+3)(n+4)}$$

$$\begin{aligned} U_{n+1} \cdot U_{n+2} &= U_{n+1} \cdot \frac{n+1}{n+4} U_n \\ &= \frac{n+1}{n+4} U_n \cdot U_{n+1} = \frac{n+1}{n+4} \cdot \frac{\pi}{2(n+1)(n+2)(n+3)} = \frac{\pi}{2(n+2)(n+3)(n+4)} \end{aligned}$$

Conclusion pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n \cdot U_{n+1} = \frac{\pi}{2(n+1)(n+2)(n+3)}$

$$\begin{aligned}
 \text{d) } U_n^2 \frac{U_{n+1}}{U_n} &= \frac{\pi}{2n^3(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})} \quad \text{d'où } n^3 U_n^2 \\
 &= \frac{\pi}{2(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})} \cdot \frac{1}{\frac{U_{n+1}}{U_n}} \\
 n \sqrt{n} U_n &= \sqrt{\frac{\pi}{2(1+\frac{1}{n})(1+\frac{2}{n})(1+\frac{3}{n})} \cdot \frac{U_{n+1}}{U_n}} \quad \text{on a : } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{U_{n+1}}{U_n} = 1 \\
 \text{donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} n \sqrt{n} U_n &= \sqrt{\frac{\pi}{2}}
 \end{aligned}$$

Solution 10 :

$$1^\circ / U_0 = \int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 \frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}} dx = \left[\sqrt{x^2+1} \right]_0^1 = \sqrt{2} - 1$$

$$2^\circ / \forall x \in [0,1] \text{ on a : } \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}} \geq 0 \quad \text{d'où } U_n \geq 0$$

$$3^\circ / \text{a) } U_{n+1} - U_n = \int_0^1 \frac{x^{2n+3}}{\sqrt{x^2+1}} dx - \int_0^1 \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}} dx = \int_0^1 \frac{x^{2n+1}(x^2-1)}{\sqrt{x^2+1}} dx \leq 0$$

D'où (U_n) est une suite décroissante.

$$\text{b) On a : } \begin{cases} \dot{U}_n \geq 0 \\ (U_n) \text{ est une suite décroissante} \end{cases}$$

D'où (U_n) est convergente

$$4^\circ / x \in [0,1]$$

$$0 \leq x \leq 1 \Leftrightarrow 0 \leq x^2 \leq 1 \Rightarrow 1 \leq x^2+1 \leq 2 \Rightarrow 1 \leq \sqrt{x^2+1} \leq \sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}} x^{2n+1} \leq \frac{x^{2n+1}}{\sqrt{x^2+1}} \leq x^{2n+1}$$

$$\text{D'où : } \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^1 x^{2n+1} dx \leq U_n \leq \int_0^1 x^{2n+1} dx$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2n+2} \leq U_n \leq \frac{1}{2n+2}$$

$$\text{On a : } \begin{cases} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{1}{2n+2} = 0 \\ \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n+2} = 0 \end{cases} \quad \text{d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$$

Solution 11 :

$$f(x) = x + \sin x \geq 0 \text{ pour } \forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

$$1^\circ / A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (x + \sin x) dx = \left[\frac{x^2}{2} - \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$A = \left(\frac{\pi^2}{8} + 1 \right) \text{ unité d'aires.}$$

2°/

$$a) \begin{cases} f'(x) = \sin x \\ g(x) = x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) = -\cos x \\ g'(x) = 1 \end{cases}$$

$$J = \left[-x \cos x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x dx$$

$$J = \left[\sin x \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = 1$$

$$b) V = \pi \int_0^1 f^2(x) dx$$

$$= \pi \int_0^1 (x^2 + \sin^2 x + 2x \sin x) dx$$

$$\text{Soit } K = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{-\cos 2x + 1}{2} dx$$

$$= \left[\frac{x}{2} - \frac{1}{4} \sin(2x) \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}$$

$$\text{On a : } V = \pi \left[\frac{x^3}{3} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \pi \cdot \lambda + 2\pi J$$

$$V = \left(\frac{\pi^4}{24} + \frac{\pi^2}{4} + 2\pi \right) \text{ unité de volume}$$

Solution 12 :

$$1^\circ / D f = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k \in \mathbb{Z} \right\}$$

$$\begin{aligned} 2^\circ / A &= \int_0^{\frac{\pi}{4}} |f(x) - 1| dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (1 + \tan^2 x - 1) dx \\ &= [\tan x - x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1 - \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

$$A = \left(\frac{4 - \pi}{4} \right) u_A$$

3°/ a)

$$\bullet \quad \varphi'(x) = \frac{\cos^4 x + \sin^2 x (3 \cos^2 x)}{\cos^6 x} = \frac{1}{\cos^2 x} + 3 \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x}$$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} + 3 \frac{(1 - \cos^2 x)}{\cos^4 x}$$

$$\varphi'(x) = \frac{3}{\cos^4 x} - \frac{2}{\cos^2 x} = 3f^2(x) - 2f(x)$$

$$b) V = \pi \int_0^1 f^2(x) dx = \pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^4 x} dx$$

$$\text{On a : } f^2(x) = \frac{\varphi'(x) + 2f(x)}{3}$$

$$\text{D'où : } V = \frac{\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} (\varphi'(x) + 2f(x)) dx$$

$$V = \frac{\pi}{3} [\varphi(x)]_0^{\frac{\pi}{4}} + \frac{2\pi}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx$$

$$\text{Or } \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(x) dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos^2 x} dx = [\operatorname{tg} x]_0^{\frac{\pi}{4}} = 1$$

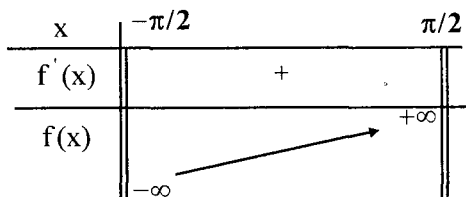
$$\text{D'où } V = \frac{\pi}{3} \varphi\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{2\pi}{3}$$

$$V = \frac{4\pi}{3} \text{ unité de volume}$$

Solution 13 :

A) 1°/a) pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ on a : $\cos x \neq 0$ f est définie, continue, dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

on a : pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: $f'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x > 0$



* On a $\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \operatorname{tg} x = -\infty$ car $\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \sin x = -1$

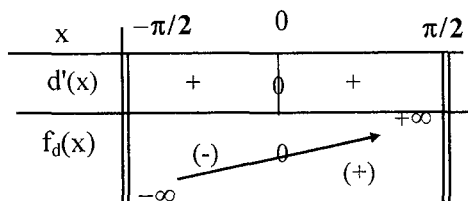
et $\lim_{x \rightarrow (-\frac{\pi}{2})^+} \cos x = 0^+$.

* $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{2})^-} f(x) = +\infty$.

b) Soit $\Delta : y = f'(0)(x-0) + f(0)$ or $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$ d'où $\Delta : y = x$.

Position de C_f et Δ : soit $d(x) = f(x) - y = \operatorname{tg} x - x$

d est une fonction dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: $d'(x) = 1 + \operatorname{tg}^2 x - 1 = \operatorname{tg}^2 x \geq 0$.



On a : pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$, $d(x) < 0$

d'où C_f est en dessous de Δ sur $]-\frac{\pi}{2}, 0[$

Pour $x \in]-\frac{\pi}{2}, 0[$, $d(x) > 0$ d'où C_f est au dessus de Δ sur $]-\frac{\pi}{2}, 0[$

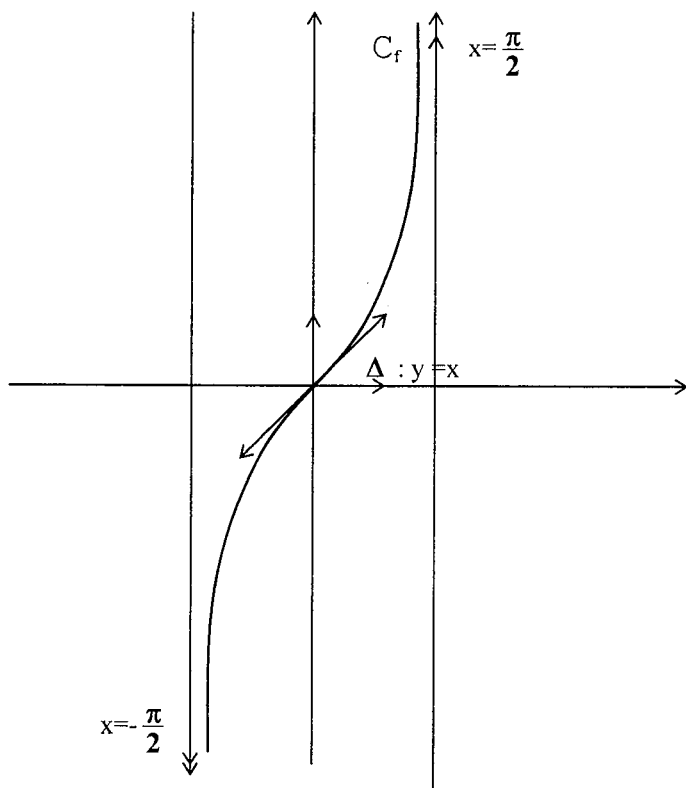
C_f coupe Δ au point $O(0,0)$.

c)

2°/a) f est continue, strictement croissante sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

alors f réalise une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ sur

$$J = f\left(]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\right) = \lim_{\left(-\frac{\pi}{2}\right)^+} f, \lim_{\left(\frac{\pi}{2}\right)^-} f =]-\infty, +\infty[= \mathbb{R}$$



b) f est une bijection de $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbb{R}$

et f est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et pour tout $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$: $f'(x) \neq 0$

d'où f^{-1} est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$$\text{c) On a } (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{1+\tan^2 y} \text{ où } y = f^{-1}(x)$$

or $y = f^{-1}(x)$ d'où : $f(y) = x$ et par suite $\tan y = x$

$$\text{soit } (f^{-1})'(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

$$\text{on a : } \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \int_0^{f^{-1}(x)} \frac{1}{1+t^2} dt = \int_0^{f^{-1}(x)} (f^{-1})'(t) dt = [f^{-1}(t)]_0^{f^{-1}(x)} = f^{-1}(x) - f^{-1}(0).$$

$$\text{or } f(0) = 0 \text{ d'où } f^{-1}(0) = 0 \text{ et par suite pour tout } x \in \mathbb{R} : f^{-1}(x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

$$3^\circ / I = \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = f^{-1}(1) = \frac{\pi}{4} \text{ car : } f\left(\frac{\pi}{4}\right) = 1.$$

$$\text{B) Soit } n \in \mathbb{N}^* \text{ et } a_n = \int_0^1 (1-t^2)^n dt \text{ et } a_0 = 1.$$

$$\begin{aligned} 1^\circ / a_{n+1} - a_n &= \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} dt - \int_0^1 (1-t^2)^n dt \\ &= \int_0^1 [(1-t^2)^{n+1} - (1-t^2)^n] dt = \int_0^1 (1-t^2)^n (1-t^2-1) dt = - \int_0^1 t^2 (1-t^2)^n dt. \end{aligned}$$

2°/ On a pour tout $t \in [0,1]$: $t^2 \geq 0$ et $1-t^2 \geq 0$ d'où $t^2(1-t^2)^n \geq 0$ et par suite $a_{n+1} - a_n \leq 0$ donc (a_n) est une suite convergente.

$$3^\circ / \text{a) } a_{n+1} = \int_0^1 (1-t^2)^{n+1} dt ; \begin{cases} u'=1 \\ v=(1-t^2)^{n+1} \end{cases} \text{ d'où}$$

$$\begin{cases} u=t \\ v'=(n+1)(-2t)(1-t^2)^n \end{cases}$$

$$\text{On a : } a_{n+1} = [t(1-t^2)^{n+1}]_0^1 + 2(n+1) \int_0^1 t^2 (1-t^2)^n dt \quad a_{n+1} = (2n+2)$$

$(a_n - a_{n+1})$ (d'après B-1°)

$$\text{On a ainsi } a_{n+1} = (2n+2)a_n - (2n+2)a_{n+1}$$

$$\text{et par suite } a_{n+1}(1+2n+2) = (2n+2)a_n$$

d'où pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a : $a_{n+1} = \frac{(2n+2)a_n}{3+2n}$

b) On a : $a_0 = 1$ et $\frac{2^{2 \times 0}(0!)^2}{(2 \times 0 + 1)!} = \frac{1}{1} = 1$ d'où $a_0 = \frac{2^{2 \times 0}(0!)^2}{(2 \times 0 + 1)!}$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que : $a_n = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$ et montrons que $a_{n+1} =$

$$\frac{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}{(2(n+1)+1)!}.$$

$$\begin{aligned} \text{On a : } a_{n+1} &= \frac{(2n+2)a_n}{3+2n} = \frac{(2n+2)}{3+2n} \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{(2n+2)^2 \cdot 2^{2n}(n!)^2}{(2n+3) \cdot (2n+2) \cdot (2n+1)!} \\ &= \frac{2^2 \cdot (n+1)^2 \cdot 2^{2n}(n!)^2}{(2n+3)!} = \frac{2^{2n+2} \cdot ((n+1)(n!))^2}{(2n+3)!} = \frac{2^{2(n+1)}((n+1)!)^2}{(2(n+1)+1)!} \end{aligned}$$

$$c) U_n = \sum_{p=0}^n \left(\frac{p!}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2p+1)} \right)$$

$$1^\circ / \frac{p!}{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2p+1)} = \frac{p!(2 \times 4 \times 6 \times \dots \times 2p)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \dots \times 2p \times (2p+1)} =$$

$$\frac{p!((2 \times 1) \times (2 \times 2) \times (2 \times 3) \times \dots \times (2 \times p))}{(2p+1)!} = \frac{p! \cdot 2^p \cdot p!}{(2p+1)!} = \frac{2^p \cdot (p!)^2}{(2p+1)!}$$

$$\text{On a : } U_n = \sum_{p=0}^n \frac{2^p \cdot (p!)^2}{(2p+1)!} = \sum_{p=0}^n \frac{1}{2^p} \frac{(2^p \cdot p!)^2}{(2p+1)!} = \sum_{p=0}^n \frac{1}{2^p} \int_0^1 (1-t^2)^p dt =$$

$$\int_0^1 \sum_{p=0}^n \frac{1}{2^p} (1-t^2)^p dt = \int_0^1 \sum_{p=0}^n \left(\frac{1-t^2}{2} \right)^p dt$$

$$= \int_0^1 \frac{1 - \left(\frac{1-t^2}{2} \right)^{n+1}}{1 - \frac{1-t^2}{2}} dt = 2 \cdot \int_0^1 \frac{1 - \left(\frac{1-t^2}{2} \right)^{n+1}}{1+t^2} dt.$$

$$2^\circ / a) \text{ On pose } V_n = 2I - U_n = 2 \cdot \int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} - 2 \cdot \int_0^1 \frac{1 - \left(\frac{1-t^2}{2} \right)^{n+1}}{1+t^2} dt$$

$$= \int_0^1 \frac{2 \left(1 - \left(\frac{1-t^2}{2} \right)^{n+1} \right)}{1+t^2} dt = \int_0^1 \frac{2 \left(\frac{1-t^2}{2} \right)^{n+1}}{1+t^2} dt$$

b) On a pour tout $t \in [0, 1]$: $0 \leq 1-t^2 \leq 1$ d'où $0 \leq (1-t^2)^{n+1} \leq 1$

$$0 \leq t \leq 1 \quad \text{d'où} \quad 1 \leq 1+t^2 \leq 2 \quad \text{d'où} \quad 0 \leq \frac{(1-t^2)^{n+1}}{1+t^2} \leq 1.$$

$$\text{c) On a } V_n = 2 \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n+1}}{2^{n+1}(1+t^2)} dt = \frac{1}{2^n} \int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n+1}}{(1+t^2)} dt$$

On a pour tout $t \in [0, 1]$: $0 \leq \frac{(1-t^2)^{n+1}}{1+t^2} \leq 1$ d'où $0 \leq$

$$\int_0^1 \frac{(1-t^2)^{n+1}}{(1+t^2)} dt \leq \int_0^1 1 dt = [t]_0^1 = 1$$

d'où $0 \leq V_n \leq \frac{1}{2^n}$, d'autre part $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$ et par suite $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$

3°/On a : $V_n = 2I - U_n =$ et par suite $U_n = 2I - V_n = \frac{\pi}{2} - V_n$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{\pi}{2} - V_n \right) = \frac{\pi}{2} - 0 = \frac{\pi}{2} \quad \text{car} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$$