

EXERCICES

Exercice 1 :

Calculer les limites suivantes :

$$1^\circ / \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln x}{2x + \ln x} \quad 2^\circ / \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x \quad 3^\circ / \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n \ln^2 x$$

$$4^\circ / \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \quad 5^\circ / \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+x)}$$

$$6^\circ / \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x} \quad 7^\circ / \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sqrt{x}+1)}{x} \quad 8^\circ / \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2+1)}{x}$$

Exercice 2 :

Calculer les limites suivantes :

$$1^\circ / \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^3+1)}{x} \quad 2^\circ / \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \ln(x^3+4)$$

$$3^\circ / \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \quad 4^\circ / \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1+\ln x)}{x}$$

$$5^\circ / \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right) \quad 6^\circ / \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x - (x+1) \ln(x+1)$$

Exercice 3 :

A) 1°/ Démontrer que :

$$\forall x \in \left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[, \text{ on a :}$$

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$2^\circ / \text{ En déduire } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2}.$$

B) Soit la fonction f définie par :

$$\forall x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[: f(x) = \frac{x}{\ln(1+x)} ; f(0) = 1, f(-1) = 0.$$

1°/ Montrer que f est continue sur $[-1, +\infty[$.

2°/ Etudier la dérivabilité de f .

3°/a) Etudier le signe de $u :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbf{R} : x \mapsto \ln(1+x) - \frac{x}{1+x}$

b) Etudier les variations de f .

4°/a) Soit Δ la tangente à $\mathbf{C}_f$ au point A d'abscisse $x_0 = 0$.

Etudier la position de $\mathbf{C}_f$ et Δ .

b) Tracer $\mathbf{C}_f$ dans un plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 4 :

A) Soit $\varphi : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} : x \mapsto 1 - x^2 - \ln x$

1°/ Etudier les variations de φ .

2°/ Calculer $\varphi(1)$. En déduire le signe de $\varphi(x)$.

B) Soit $f : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R} : x \mapsto \frac{\ln x}{x} - x$.

1°/ Etudier les variations de f .

2°/a) Montrer que la courbe (C) de f admet une asymptote oblique D.

b) Etudier la position de (C) et D.

3°/ Tracer dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe (C) de f .

Exercice 5 :

Soit la fonction g définie sur $\mathbf{R}_+$ par : $g(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 1} - \ln(x^2 + 1)$.

1°/ Etudier les variations de g sur $\mathbf{R}_+$.

2°/ Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet deux solutions : 0 et α et que $1 < \alpha < 2$.

3°/ Etudier le signe de $g(x)$.

$$4^\circ \text{ Soit } f: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

a) Montrer que f est continue en 0.

b) Montrer que f est dérivable en 0.

c) Ecrire une équation de la tangente T à C_f au point d'abscisse 0.

d) Montrer que $\forall t > 0, \ln(1+t) \leq t$ et en déduire la position de C_f par rapport à T .

$$5^\circ \text{ a) Montrer que } f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}.$$

b) Etudier les variations de f (on introduira la fonction g dans le calcul de f').

c) Tracer C_f dans un plan P rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 6 :

$$1^\circ \text{ Soit la fonction } h: x \rightarrow \ln\left(\frac{1+x}{x}\right) - \frac{1}{2x+1}$$

a) Etudier les variations de h .

b) Etudier le signe de $h(x)$.

2° Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = x(x+1)\ln\left(\frac{1+x}{x}\right) \text{ pour }]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$$

$$f(0) = f(-1) = 0$$

a) Etudier la continuité de f .

b) Etudier la dérivabilité de f .

c) Etudier les variations de f .

Exercice 7 :

On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$g(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x$$

1°/ Etudier les variations de g .

2°/ a) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α .

b) Vérifier que $1,8 < \alpha < 1,9$.

c) Dédire de ce qui précède le signe de $g(x)$.

3°/ On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}$.

a) Montrer que f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et que :

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x^2)^2}.$$

b) Vérifier que $f(\alpha) = \frac{1}{2\alpha^2}$.

4°/ Etudier les variations de f et tracer sa courbe (C) dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 8 :

Soit $f : x \rightarrow \ln |\ln |x||$.

1°/ Etudier les variations de f .

2°/ Tracer $\mathcal{C}_f$.

3°/ Soit g la restriction de f à l'intervalle $]1, +\infty[$.

Montrer que g est une bijection de $]1, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

Exercice 9 :

Soit m un paramètre réel.

Soit $f_m : x \rightarrow \ln(x + \sqrt{x^2 + m})$

1°/ Déterminer suivant m , le domaine de définition de f_m noté D_m .

2°/ Etudier les variations de f_m .

3°/ Déterminer l'image de D_m par f_m .

4°/ Prouver que f_m admet une fonction réciproque.

Exercice 10 :

A) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $\begin{cases} f_n(x) = 2 - nx + \frac{1}{\text{Log } x} & \text{pour } x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[\\ f_n(0) = 2 \end{cases}$

1°/ Etudier la continuité de f_n à droite en $x_0 = 0$.

2°/ Etudier la dérivabilité de f_n à droite en $x_0 = 0$.

3°/ Etudier les variations de f_n . (distinguer $n = 0$ et $n \neq 0$).

4°/ Montrer que $(\mathcal{C}_n)$ (courbe représentative de f_n) admet deux asymptotes (distinguer $n = 0$ et $n \neq 0$).

5°/ Construire $(\mathcal{C}_0)$ et $(\mathcal{C}_1)$ dans le même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

B) Soit φ_n la restriction de f_n à l'intervalle $]1, +\infty[$.

1°/ Montrer que φ_n est une bijection de $]1, +\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera.

2°/ Montrer que pour tout entier n non nul l'équation $\varphi_n(x) = 0$ admet une seule solution α_n .

3°/ Montrer que α_{n+1} est l'unique solution de l'équation $\varphi_n(x) = x$.

4°/a) Montrer que la suite $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante.

b) Montrer que (α_n) est convergente vers un réel $l \geq 1$.

c) Calculer l .

Exercice 11 :

Soit $f(x) = -\ln |\cos x|$.

1°/ Etudier les variations de f et tracer $\mathcal{C}_f$.

2°/ Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$.

a) Montrer que g admet une fonction réciproque.

b) Calculer $g^{-1}(\ln \sqrt{2})$.

c) Etudier la dérivabilité de g^{-1} .

3°/ Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} U_0 = \frac{\pi}{4} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq \frac{\pi}{4}$.

b) Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$ une seule solution α .

c) Montrer que (U_n) est convergente et trouver sa limite.

Exercice 12 :

1°/ Etablir que $\forall x \geq 0, x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$ (★).

2°/ Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ définie par : $U_n = \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right)$.

a) Calculer U_1 et U_2 .

b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

c) Utiliser (★) pour montrer que (U_n) est une suite convergente.

Exercice 13 :

1°/ Etablir que $\forall x > 1, 1 - \frac{1}{x} < \ln x < \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$.

2°/ Soit $n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}$. Montrer que l'équation $\ln(1+nx) = x$ admet une seule solution α_n non nulle.

3°/ a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^* \setminus \{1\}, \ln n < \alpha_n$.

b) Montrer que $\alpha_n < 2 \ln n$ et que $\alpha_n < \ln(1+2n \ln n)$.

c) Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{\ln n}$.

Exercice 14 :

1°/ Calculer à l'aide d'une intégration par parties, les intégrales :

$$A = \int_1^2 \ln(1+x) \, dx \quad \text{et} \quad B = \int_1^2 \ln(-x+3) \, dx$$

2°/ En déduire les intégrales :

$$C = \int_1^2 \ln \left| \frac{x-3}{x+1} \right| \, dx \quad \text{et} \quad D = \int_1^2 \ln \sqrt{|x^2 - 2x - 3|} \, dx$$

Exercice 15 :

$$\text{Soit } U_n = \sum_{p=1}^n \frac{1}{p} \quad (n \in \mathbf{N}^*)$$

$$1^\circ/ \text{ Prouver que } U_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dx}{x} \leq U_n - \frac{1}{n}.$$

$$2^\circ/a) \text{ En déduire que } \forall n \in \mathbf{N}^*, \frac{1}{n} + \ln n \leq U_n \leq 1 + \ln n.$$

$$b) \text{ Calculer alors } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n.$$

Exercice 16 :

Soit n un entier ≥ 1 .

1°/ Démontrer que pour tout entier k , compris entre 0 et $n-1$, on a :

$$\frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln x \, dx \leq \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{k+1}{n}\right).$$

$$2^\circ/ \text{ Soit la suite } (U_n)_{n \in \mathbf{N}^*} \text{ définie par : } U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right).$$

$$a) \text{ Prouver que : } \forall n \in \mathbf{N}^*, U_n - \frac{1}{n} \ln 2 \leq \int_1^2 \ln x \, dx \leq U_n.$$

$$b) \text{ Montrer que } (U_n)_{n \in \mathbf{N}^*} \text{ est une suite convergente vers une limite } l.$$

Exercice 17 :

Soit f la fonction numérique définie sur $]0, +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln x$$

1°/ Etudier les variations de f .

2°/ Soit λ un réel strictement positif.

a) Calculer $I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 f(x) dx$

b) Déterminer $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} I(\lambda)$.

3°/ Pour tout entier naturel $n \geq 2$, on pose $S_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f\left(\frac{k}{n}\right)$.

a) Démontrer que, pour tout k entier naturel tel que : $1 \leq k \leq n-1$, on a :

$$\frac{1}{n} f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

b) En déduire que $S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) < S_n$ puis que :

$$I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq I\left(\frac{1}{n}\right) + \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

c) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} S_n$.

Exercice 18 :

Soit $x \in [0, 1]$ et $P_n(x) = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \cdot \frac{x^k}{k}$ où $n \geq 1$

1°/ a) Montrer que $\forall t \in [0, 1]$, on a : $\sum_{k=0}^{n-2} (-t)^k + \frac{(-t)^{n-1}}{1+t} = \frac{1}{1+t}$

b) En déduire que $\forall x \in [0, 1]$, $\ln(1+x) = P_n(x) + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt$

2°/ Soit $a_n = \int_0^1 \frac{t^{n-1}}{1+t} dt$ ($n \geq 1$).

a) Montrer que $|a_n| \leq \frac{1}{n}$.

b) En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n-1} a_n$

3°/ Soit $U_n = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k}$. Démontrer que (U_n) est une suite convergente

et donner sa limite.

SOLUTIONS

Solution 1 :

$$1^{\circ} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - \ln x}{2x + \ln x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x \left(\frac{x}{\ln x} - 1 \right)}{\ln x \left(\frac{2x}{\ln x} + 1 \right)} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{\ln x} - 1}{\frac{2x}{\ln x} + 1} = -1$$

$$2^{\circ} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^2 \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x (x \cdot \ln x) = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x = 0.$$

$$3^{\circ} \lim_{x \rightarrow 0^+} x^n (\ln^2 x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{\frac{n}{2}} \ln x)^2$$

On pose $X = x^{\frac{n}{2}} \Rightarrow x = X^{\frac{2}{n}}$. Lorsque $x \rightarrow 0^+$, $X \rightarrow 0^+$ d'où :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (x^{\frac{n}{2}} \ln x)^2 = \lim_{X \rightarrow 0^+} (X \cdot \ln X^{\frac{2}{n}})^2 = \lim_{X \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{n}\right)^2 (X \cdot \ln X)^2 = 0$$

$$\text{car } \lim_{X \rightarrow 0^+} X \cdot \ln X = 0.$$

$$4^{\circ} \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x \left(\frac{x+1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (\sqrt{x} \ln(x+1) - \sqrt{x} \ln x)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln(x+1) = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln x = \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln (\sqrt{x})^2 = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \ln \sqrt{x} \\ = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2X \cdot \ln X = 0 \quad (X = \sqrt{x}) \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 0^+} \sqrt{x} \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) = 0.$$

$$5^{\circ} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \frac{\ln(1+2x)}{2x}}{\frac{\ln(1+x)}{x}}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{2x} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1 \quad (X = 2x)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+2x)}{\ln(1+x)} = 2.$$

$$6^{\circ} / \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x} = ? \text{ . Soit la fonction } f(x) = \ln(\cos x) \text{ .}$$

$$f \text{ est dérivable en } 0 \text{ et } f(0) = 0 \text{ et } f'(x) = \frac{-\sin x}{\cos x} \text{ .}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(0) = 0 \text{ .}$$

$$7^{\circ} / \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sqrt{x} + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}^2} \text{ . On pose } X = \sqrt{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(\sqrt{x} + 1)}{\sqrt{x}^2} = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(X + 1)}{X^2} = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{X} \cdot \frac{\ln(X + 1)}{X} = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{X} = +\infty \text{ et } \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(X + 1)}{X} = 1 \text{ .}$$

$$8^{\circ} / \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} x \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} x = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(X + 1)}{X} = 1 \text{ (} X = x^2 \text{)} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = 0 \text{ .}$$

Solution 2 :

$$1^{\circ} / \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^3 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^3 (1 + \frac{1}{x^3})}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{\ln x^3}{x} + \frac{\ln(1 + \frac{1}{x^3})}{x} \right]$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[3 \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln(1 + \frac{1}{x^3})}{x} \right] = 0 + 0 = 0$$

$$2^{\circ} / \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \ln(x^3 + 4) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \ln x^3 (1 + \frac{4}{x^3})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - \ln x^3 - \ln(1 + \frac{4}{x^3}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 3 \ln x - \ln(1 + \frac{4}{x^3})$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(x - 3 \frac{\ln x}{x} \right) - \ln \left(1 + \frac{4}{x^3} \right) = 0$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln \left(1 + \frac{4}{x^3} \right) = 0.$$

$$3^\circ / \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{x+1}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1 \quad (X = \frac{1}{x}).$$

$$4^\circ / \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \ln x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x (1 + \frac{1}{\ln x}))}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x} + \frac{\ln(1 + \frac{1}{\ln x})}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x} + \frac{\ln(1 + \frac{1}{\ln x})}{x}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0 \quad (X = \ln x) ; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{\ln x})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln \left(1 + \frac{1}{\ln x} \right) = 0 \cdot 0 = 0$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \ln x)}{x} = 0.$$

$$5^\circ / \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{2x+1}{2x+3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(\frac{2x+3-2}{2x+3} \right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln \left(1 - \frac{2}{2x+3} \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{2x+3} \cdot \frac{\ln(1 - \frac{2}{2x+3})}{-\frac{2}{2x+3}}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-2x}{2x+3} = -1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 - \frac{2}{2x+3})}{\frac{-2}{2x+3}} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1 \quad (X = \frac{-2}{2x+3})$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(\frac{2x+1}{2x+3}\right) = -1 \cdot 1 = -1.$$

$$6^\circ / \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x - (x+1) \ln(x+1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x - x \ln(x+1) - \ln(x+1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x - x \ln x \left(1 + \frac{1}{x}\right) - \ln(x+1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x - x \ln x - x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \ln(x+1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} -x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \ln(x+1)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{-\ln(1+X)}{X} = -1 \quad (X = \frac{1}{x})$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -\ln(x+1) = -\infty \text{ d'où}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln x - (x+1) \ln(x+1) = -\infty.$$

Solution 3 :

$$\text{A) } 1^\circ / \bullet \text{ Soit } g(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} - \ln(1+x)$$

g est définie, continue, dérivable sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ et

$$g'(x) = 1 - x + x^2 - 2x^3 - \frac{1}{1+x} = (1 - x + x^2 - \frac{1}{1+x}) - 2x^3$$

$$= \frac{x^3}{1+x} - 2x^3 = \frac{x^3(-1-2x)}{1+x}$$

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$g'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$			0		

d'où $\forall x \geq -\frac{1}{2}$, on a : $g(x) \leq 0$

et par suite $\forall x \geq -\frac{1}{2}$ on a : $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} \leq \ln(1+x)$

• Soit $h(x) = \ln(1+x) - x + \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$

h est définie, continue, dérivable sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$

$$\text{et } h'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 + x - x^2 = \frac{-x^3}{1+x}$$

x	$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$h'(x)$	0	$+$	0	$-$	
$h(x)$			0		

d'où $\forall x \geq -\frac{1}{2}$ on a : $h(x) \leq 0$

et par suite $\forall x \geq -\frac{1}{2}$, $\ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

Conclusion : $\forall x \geq -\frac{1}{2}$, $x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} \leq \ln(1+x) \leq x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$.

$$2^{\circ} \text{ On a : } \forall x \geq -\frac{1}{2}, -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{2} \leq \ln(1+x) - x \leq -\frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$\forall x \geq -\frac{1}{2} \text{ et } x \neq 0, -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{2} \leq \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2} + \frac{x}{3}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} - \frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2} ; \lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{2} + \frac{x}{3} = -\frac{1}{2}$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x) - x}{x^2} = -\frac{1}{2}.$$

B) 1° $x \mapsto \frac{x}{\ln(1+x)}$ est définie, continue sur $] -1, 0[\cup] 0, +\infty[$

comme étant le quotient des fonctions continues.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\ln(1+x)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\ln(1+x)}{x}} = \frac{1}{1} = 1 = f(0)$$

d'où f est continue en 0.

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{\ln(1+x)} = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{X-1}{\ln X} = 0 = f(-1) \quad (X = x+1)$$

d'où f est continue en -1 .

Conclusion : f est continue sur $[-1, +\infty[$.

2° $x \mapsto \frac{x}{\ln(1+x)}$ est dérivable sur $] -1, 0[\cup] 0, +\infty[$

$$\begin{aligned} \bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{x}{\ln(1+x)} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x \ln(1+x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \right) \cdot \frac{1}{\left(\frac{\ln(1+x)}{x} \right)} = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{\ln(1+x) - x}{x^2} \right) = -\frac{1}{2} \quad (\text{d'après A) } 2^{\circ})$$

d'où f est dérivable en 0 et $f'(0) = \frac{1}{2}$.

$$\begin{aligned}
 \bullet \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{\frac{x}{\ln(1+x)}}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1^+} \frac{x}{(x + 1) \ln(x + 1)} \\
 &= \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{X - 1}{X \ln X} = +\infty \quad (X = x + 1) \quad \text{car} \quad \lim_{X \rightarrow 0^+} X \ln X = 0^-
 \end{aligned}$$

d'où f n'est pas dérivable à droite en -1 .

Conclusion : f est dérivable sur $] -1, +\infty[$.

3°/a) u est définie, continue, dérivable sur $] -1, +\infty[$ et $\forall x > -1$,

$$u'(x) = \frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{x}{(1+x)^2}$$

x	-1	0	$+\infty$
$u'(x)$	0	-	0
$u(x)$			

$\swarrow$ 0 $\searrow$

d'où $\forall x > -1$, $u(x) \geq 0$.

b) f est définie, continue sur $[-1, +\infty[$

f est dérivable sur $] -1, +\infty[$ et $\forall x \in] -1, 0[\cup] 0, +\infty[$, on a :

$$f'(x) = \frac{\ln(1+x) - \frac{x}{1+x}}{\ln^2(1+x)} = \frac{u(x)}{\ln^2(1+x)} > 0$$

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$			

$\nearrow$ 1 $\nearrow$ $+\infty$

$$\left(\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X-1}{\ln X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{X}{\ln X} - \frac{1}{\ln X} = +\infty \right) (X = x + 1).$$

$$4^\circ/a) \Delta: y = f'(0)(x - 0) + f(0) = \frac{1}{2}x + 1.$$

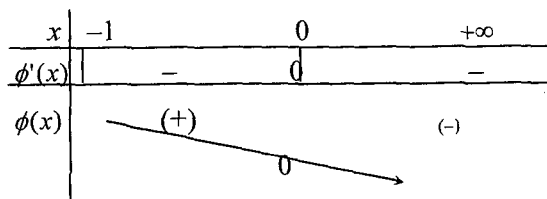
Etudions le signe de $d(x) = f(x) - \left(\frac{1}{2}x + 1\right)$

$$\forall x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[, d(x) = \frac{x}{\ln(1+x)} - \frac{x+2}{2}$$

$$= \frac{2x - (x+2)\ln(1+x)}{2 \ln(1+x)} = \left(\frac{2x}{x+2} - \ln(1+x) \right) \frac{x+2}{2 \ln(1+x)}$$

Soit $\phi(x) = \frac{2x}{x+2} - \ln(1+x)$; $\phi'(x) = \frac{2(x+2) - 2x}{(x+2)^2} - \frac{1}{1+x}$

$$\phi'(x) = \frac{4}{(x+2)^2} - \frac{1}{1+x} = \frac{4(1+x) - (x+2)^2}{(1+x)(2+x)^2} = \frac{-x^2}{(1+x)(2+x)^2} \leq 0$$



On a : $d(x) = \frac{\phi(x)(x+2)}{2 \ln(1+x)}$

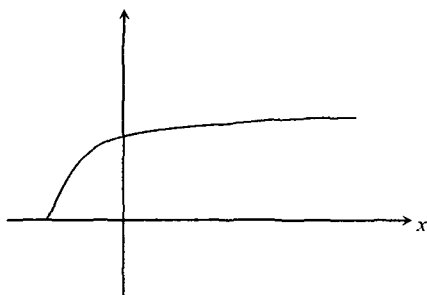
x	-1	0	$+\infty$
$x+2$		+	+
$2\text{Log}(1+x)$		0	+
$\phi(x)$		0	-
$d(x)$		-	-

$\forall x \in]-1, 0[\cup]0, +\infty[, d(x) < 0$ et par suite (C_f) est au dessous de Δ .

b) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln(1+x)} = 0$ d'où (C_f) admet au voisinage

de $+\infty$ une branche parabolique de direction l'axe $(O, \vec{i})$.

$\Delta : y = \frac{1}{2}x + 1$ tangente à (C_f) au point $(0, 1)$.

**Solution 4 :**

A) 1°/ φ est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$,

$$\varphi'(x) = -2x - \frac{1}{x} < 0 \quad \text{d'où :}$$

x	0	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$		-	
$\varphi(x)$	$+\infty$	0	$-\infty$

2°/ $\varphi(1) = 0$ donc, d'après le tableau des variations de φ , on a le tableau de signe suivant :

x	0	1	$+\infty$
$\varphi(x)$		+	-

B) 1°/ f est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$:

$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{1 - x^2 - \ln x}{x^2} = \frac{\varphi(x)}{x^2}$$

Le signe de f' est celui de $\varphi(x)$ d'où

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$	$-\infty$	-1	$-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot \ln x - x = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} - x = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0.$$

2°/a) On a : $\forall x \in \mathbf{R}_+^*, f(x) = \frac{\ln x}{x} - x$. Et comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

donc la droite D : $y = -x$ est une asymptote oblique à (C) au voisinage de $+\infty$.

b) Etudions le signe de $f(x) + x$:

$$f(x) + x = \frac{\ln x}{x}, \text{ le signe de } f(x) + x \text{ sur } \mathbf{R}_+^* \text{ est celui de } \ln x.$$

Donc :

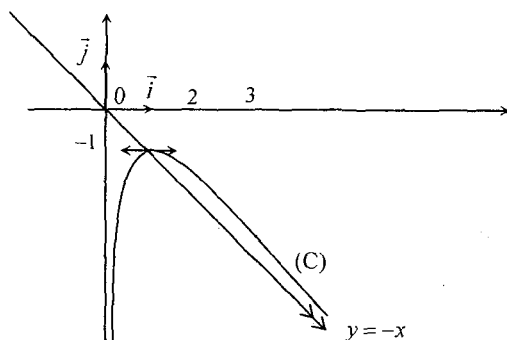


D'où : • sur $]0, 1[$, (C) est au dessous de D

• sur $]1, +\infty[$, (C) est au dessus de D

• au point d'abscisse 1, (C) et D se coupent.

3°/



Solution 5 :

1°/ g est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et $\forall x \in \mathbf{R}_+$,

$$g'(x) = \frac{4x}{(x^2 + 1)^2} - \frac{2x}{x^2 + 1} = \frac{2x(1 - x^2)}{(x^2 + 1)^2}$$

Le signe de $g'(x)$ sur $\mathbb{R}_+$ est celui de $1-x^2$:

x		-1		1		
$1-x^2$		-	0	+	0	-

d'où

x	0		1		$+\infty$
$g'(x)$	0	+	0	-	
$g(x)$					

$\nearrow$ $1 - \ln 2$ $\searrow$
 0 $-\infty$

2°/• On a : $g(0)=0$ et $\forall x \in]0, 1]$, $g(x) > 0$ (d'après le tableau de variations de g) donc 0 est la seule solution de l'équation $g(x)=0$ sur $[0, 1]$

• g est continue et strictement décroissante sur $[1, +\infty[$ donc g réalise une bijection de $[1, +\infty[$ sur $]-\infty, 1 - \ln 2]$ et comme $0 \in]-\infty, 1 - \ln 2]$ donc 0 admet un seul antécédent $\alpha \in]1, +\infty[$ par g .

Conclusion : L'équation $g(x)=0$ admet 2 solutions 0 et $\alpha > 1$.

3°/ On a le tableau de variations de g :

x	0		1		α		$+\infty$
$g(x)$							

$\nearrow$ $1 - \ln 2$ $\searrow$
 0 0 $-\infty$

d'où le tableau de signe de g :

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	0	+	0	-	

$$4^\circ/a) \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x^2} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x}$$

$$\text{Or } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2} = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(X + 1)}{X} = 1$$

d'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 \cdot 1 = 0 = f(0)$ donc f est continue à droite en 0.

$$b) \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(x^2 + 1)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln(X + 1)}{X} = 1$$

donc f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = 1$.

c) $T : y = f'_d(0) \cdot x + f(0)$ d'où $T : y = x$.

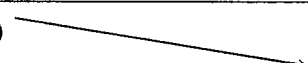
d) Soit la fonction $\varphi : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R} ; t \mapsto \ln(1+t) - t$

• Etudions les variations de φ :

φ est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et $\forall t \in \mathbf{R}_+$,

$$\varphi'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = \frac{-t}{1+t}$$

$\Rightarrow \forall t \in \mathbf{R}_+, \varphi'(t) \leq 0$.

t	0	$+\infty$
$\varphi'(t)$	0	-
$\varphi(t)$	0	

D'après le tableau de variations on a 0 est un maximum absolu de φ

$\Rightarrow \forall t \in \mathbf{R}_+, \varphi(t) \leq 0$ d'où $\forall t \in \mathbf{R}_+, \ln(1+t) \leq t$.

• Etudions le signe de $f(x) - x$:

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, f(x) - x = \frac{\ln(x^2 + 1)}{x} - x = \frac{\ln(x^2 + 1) - x^2}{x}$$

Le signe de $f(x) - x$ sur $\mathbf{R}_+^*$ est celui de $\ln(x^2 + 1) - x^2$

Or $\ln(x^2 + 1) - x^2 = \varphi(x^2) < 0$ donc C_f est au dessous de T sur $\mathbf{R}_+$.

$$5^\circ/a) \text{ On a : } g(\alpha) = 0 \Rightarrow \ln(\alpha^2 + 1) = \frac{2\alpha^2}{\alpha^2 + 1} \Rightarrow f(\alpha) = \frac{2\alpha}{\alpha^2 + 1}.$$

b) f est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$, on a :

$$f'(x) = \frac{\frac{2x}{x^2 + 1} \cdot x - \ln(x^2 + 1)}{x^2} = \frac{\frac{2x^2}{x^2 + 1} - \ln(x^2 + 1)}{x^2} = \frac{g(x)}{x}$$

$\Rightarrow$ Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$

x	0		α		$+\infty$
$f'(x)$	0	+	0	-	
$f(x)$					

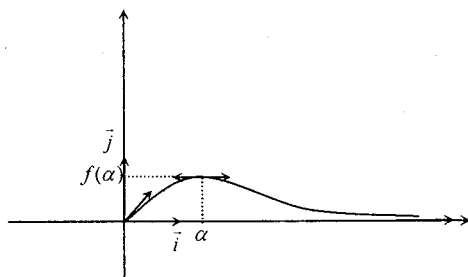
$\begin{matrix} & \nearrow & \frac{2\alpha}{\alpha^2+1} & \searrow \\ 0 & & & & 0 \end{matrix}$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^2 (1 + \frac{1}{x^2})}{x}$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^2}{x} + \frac{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}{x} \quad \text{Or} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln x}{x} = 0 \text{ et}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x^2})}{x} = 0 \quad \text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0.$$

c)

**Solution 6 :**

$$1^{\circ}/a) D_h = \left\{ x \in \mathbf{R} / \frac{x+1}{x} > 0, x \neq 0 \text{ et } 2x+1 \neq 0 \right\}.$$

$$D_h =]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[.$$

h est définie, continue et dérivable sur $]-\infty, -1[\cup]0, +\infty[$

$$\forall x \in D_h, h'(x) = \frac{\left(\frac{x+1}{x}\right)'}{\frac{x+1}{x}} + \frac{2}{(2x+1)^2} = \frac{-1}{x(x+1)} + \frac{2}{(2x+1)^2}$$

$$= \frac{-(2x+1)^2 + 2x(x+1)}{x(x+1)(2x+1)^2} = \frac{-(2x^2 + 2x + 1)}{x(x+1)(2x+1)^2}$$

Le signe de $h'(x)$ sur D_h est celui de $-(2x^2 + 2x + 1) < 0$ (car $\Delta' < 0$)

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$		$-$	
$h(x)$	0		$+\infty$	

$\swarrow (-)$ $\searrow (+)$
 $-\infty$ 0

b) D'après le tableau des variations de h , on en déduit :

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$h(x)$	$-$		$+$	

2°/a) La fonction $f : x \mapsto x(x+1) \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ est continue sur

$] -\infty, -1[\cup] 0, +\infty[$ comme produit et composée de fonctions continues sur $] -\infty, -1[\cup] 0, +\infty[$.

Continuité à droite en 0 :

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x(x+1) \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x(x+1) (\ln(x+1) - \ln x) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} x(x+1)\ln(x+1) - x(x+1)\ln x \end{aligned}$$

- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(x+1)\ln(x+1) = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x(x+1)\ln x = 1 \cdot 0 = 0$ car $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$

d'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ et par suite f est continue à droite en 0.

Continuité à gauche de -1 :

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x(x+1) \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 \frac{(x+1)}{x} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{(x+1)}{x} \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{X \rightarrow 0^+} X \ln X = 0 \quad (X = \frac{x+1}{x})$$

• $\lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 = 1$ d'où $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = 0 = f(-1)$ et par suite f est continue à gauche en -1 .

Conclusion : f est continue sur $\mathbf{R}$.

b) • La fonction $x \mapsto x(x+1) \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$ est dérivable sur $] -\infty, -1[\cup] 0, +\infty[$ comme produit et composée de fonctions dérivables.

• **Dérivabilité de f à droite 0 :**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x(x+1) \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = +\infty \end{aligned}$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow 0^+} (x+1) = 1 \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln(1+X) = +\infty$$

et par suite f n'est pas dérivable en 0.

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{f(x) - f(-1)}{x + 1} &= \lim_{x \rightarrow -1^-} \frac{x(x+1) \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)}{x + 1} \\ &= \lim_{x \rightarrow -1^-} x \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) = +\infty \end{aligned}$$

et par suite f n'est pas dérivable à gauche en -1 .

Conclusion : f est dérivable sur $] -\infty, -1[\cup] 0, +\infty[$ et $\mathcal{C}_f$ admet deux demi tangentes verticales aux points d'abscisses respectives : -1 et 0 .

$$\text{c) } \forall x \in] -\infty, -1[\cup] 0, +\infty[,$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= (2x+1) \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) + x(x+1) \frac{-1}{x(x+1)} \\ &= (2x+1) \ln\left(\frac{x+1}{x}\right) - 1 = (2x+1) \left[\ln\frac{x+1}{x} - \frac{1}{2x+1} \right] = (2x+1) h(x) \end{aligned}$$

x	$-\infty$	-1	0	$+\infty$
$2x+1$	$-$			$+$
$h(x)$	$-$			$+$
$f'(x)$	$+$			$+$
$f(x)$	$-\infty$		0	$+\infty$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x(x+1) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}$$

On a : • $\lim_{x \rightarrow -\infty} (x+1) = -\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1+X)}{X} = 1 \quad (X = \frac{1}{x})$$

d'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$

$$\diamond \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x+1) \ln\left(\frac{x+1}{x}\right)$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x(x+1) \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (x+1) \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = +\infty$$

Solution 7 :

1°/ g est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$,

$$g'(x) = 2x - 2\left(2x \ln x + x^2 \cdot \frac{1}{x}\right) = -4x \ln x$$

x	0	1	$+\infty$
$g'(x)$		0	$-$
$g(x)$	1	2	$-\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + x^2 - 2x \cdot (x \ln x)) = 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (1 + x^2(1 - 2 \ln x)) = -\infty$$

2°/a) D'après le tableau de variations de g on a :

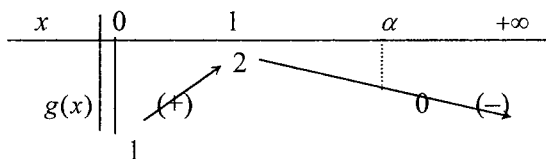
$$\bullet \forall x \in]0, 1], g(x) \geq 1 \Rightarrow \forall x \in]0, 1], g(x) \neq 0$$

$\bullet g$ est continue et strictement décroissante sur $]1, +\infty[$ donc g réalise une bijection de $]1, +\infty[$ sur $] -\infty, 2[$ et comme $0 \in] -\infty, 2[$ donc 0 admet un seul antécédent $\alpha \in]1, +\infty[$ par g .

Conclusion : L'équation $g(x) = 0$ admet une seule solution α .

$$\text{b) On a : } \begin{cases} g(1,8) \cdot g(1,9) < 0 \\ \text{et} \\ g \text{ est continue sur } [1,8 ; 1,9] \end{cases} \quad \text{donc } 1,8 < \alpha < 1,9$$

c) On a :



d'où le tableau de signe de $g(x)$:

x	0	α	$+\infty$
$g(x)$		0	
		+	-

3°/a) $\bullet f$ est dérivable sur $]0, +\infty[$ comme quotient de deux fonctions dérivables ($x \mapsto \ln x$ et $x \mapsto 1 + x^2$).

$$\bullet \forall x \in]0, +\infty[,$$

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x} \cdot (1 + x^2) - 2x \ln x}{(1 + x^2)^2} = \frac{1 + x^2 - 2x^2 \ln x}{x(1 + x^2)^2} = \frac{g(x)}{x(1 + x^2)^2}$$

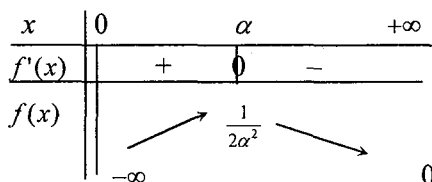
$$\text{b) On a : } g(\alpha) = 0 \Rightarrow 1 + \alpha^2 - 2\alpha^2 \ln \alpha = 0 \Rightarrow \ln \alpha = \frac{1 + \alpha^2}{2\alpha^2}$$

$$\text{donc } f(\alpha) = \frac{1+\alpha^2}{\frac{2\alpha^2}{1+\alpha^2}} = \frac{1}{2\alpha^2}.$$

4°/ f est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et $\forall x \in \mathbf{R}_+^*$,

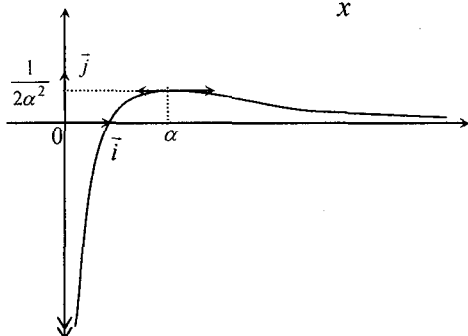
$$f'(x) = \frac{g(x)}{x(1+x^2)}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $g(x)$



$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{1+x^2} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{1+x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\ln x}{x}}{\frac{1+x^2}{x}} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$



Solution 8 :

$$1^\circ/ f(x) = \ln |x|$$

• f est définie si et seulement si $x \neq 0$ et $\ln |x| \neq 0$

$$\ln |x| = 0 \Leftrightarrow |x| = 1 \Leftrightarrow x = -1 \text{ ou } x = 1 \text{ d'où } D_f = \mathbf{R} \setminus \{-1, 0, 1\}$$

• $\forall x \in D_f$ on a : $-x \in D_f$

$f(-x) = f(x)$ donc f est une fonction paire et par suite il suffit de faire l'étude sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$.

$$\forall x \in]0, 1[\cup]1, +\infty[, f(x) = \ln |\ln x|$$

f est continue, dérivable sur $]0, 1[\cup]1, +\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{x \ln x}$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$

2°/ $x=0$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

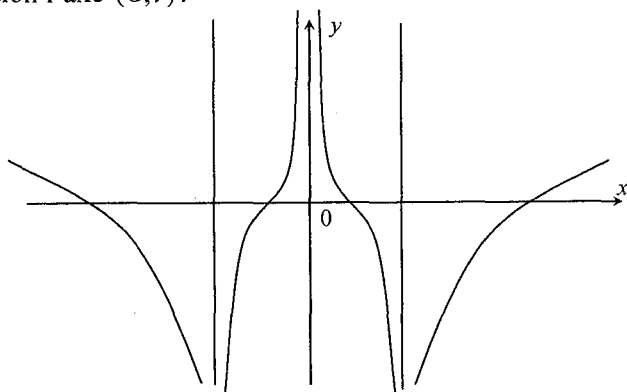
$x=1$ est une asymptote verticale à $\mathcal{C}_f$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} \cdot \frac{\ln x}{x} = 0$$

car • $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln x)}{\ln x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0 \quad (X = \ln x)$

d'où $\mathcal{C}_f$ admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction l'axe $(O, \vec{i})$.



3°/ $g(x) = \ln(\ln x)$ où $x > 1$

g est définie, continue, dérivable sur $]1, +\infty[$, $g'(x) = \frac{1}{x \ln x} > 0$

x	1	$+\infty$
$g'(x)$		+
$g(x)$	$-\infty$	$+\infty$

g est continue, strictement croissante sur $]1, +\infty[$ donc g est une bijection de $]1, +\infty[$ sur $g(]1, +\infty[) = \mathbf{R}$.

Solution 9 :

1°/ $D_m = \{x \in \mathbf{R} / x^2 + m \geq 0 \text{ et } x + \sqrt{x^2 + m} > 0\}$

• Si $m > 0 \Rightarrow \forall x \in \mathbf{R}, x^2 + m > 0$ et $x^2 + m > x^2 \Rightarrow$

$$\sqrt{x^2 + m} > |x| > -x \Rightarrow \sqrt{x^2 + m} + x > 0 \text{ d'où } D_m = \mathbf{R}$$

• Si $m = 0 \Rightarrow x + \sqrt{x^2} = x + |x| \geq 0$

$$x + |x| = 0 \Leftrightarrow |x| = -x \Leftrightarrow x \in \mathbf{R}_- \Rightarrow D_m = \mathbf{R}_+^*$$

• Si $m < 0$ alors $(x^2 + m \geq 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty, -\sqrt{-m}] \cup [\sqrt{-m}, +\infty[)$

Etudions le signe de la fonction $g(x) = x + \sqrt{x^2 + m}$ sur

$$]-\infty, -\sqrt{-m}] \cup [\sqrt{-m}, +\infty[:$$

$$g(x) = 0 \Leftrightarrow x + \sqrt{x^2 + m} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x^2 + m} = -x \\ x \leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = 0 \\ x \leq 0 \end{cases}$$

impossible car $m < 0$

d'où $\forall x \in]-\infty, -\sqrt{-m}] \cup [\sqrt{-m}, +\infty[$, $g(x) \neq 0$ et comme g est continue sur chacun des intervalles

$]-\infty, -\sqrt{-m}]$ et $[\sqrt{-m}, +\infty[$ donc elle garde un signe constant sur chacun de ces deux intervalles.

$\forall x \in]-\infty, -\sqrt{-m}]$, le signe de $g(x)$ est celui de

$$g(-\sqrt{-m}) = -\sqrt{-m} < 0$$

$\forall x \in [\sqrt{-m}, +\infty[$, le signe de $g(x)$ est celui de $g(\sqrt{-m}) = \sqrt{-m} > 0$

d'où $D_m = [\sqrt{-m}, +\infty[$.

Conclusion : • Si $m > 0 \Rightarrow D_m = \mathbf{R}$.

• Si $m = 0 \Rightarrow D_m = \mathbf{R}_+^*$.

• Si $m < 0 \Rightarrow D_m = [\sqrt{-m}, +\infty[$.

2°/ 1^{er} Cas : $m > 0$. f_m est définie, continue et dérivable sur D_m .

$$\forall x \in D_m, f'_m(x) = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + m}}}{x + \sqrt{x^2 + m}} = \frac{\sqrt{x^2 + m} + x}{\sqrt{x^2 + m} (x + \sqrt{x^2 + m})} = \frac{1}{\sqrt{x^2 + m}} > 0$$

x	$-\infty$	$+\infty$
$f'_m(x)$		+
$f_m(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln(x + \sqrt{x^2 + m}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(\frac{m}{\sqrt{x^2 + m} - x}\right)$$

$$= \lim_{X \rightarrow 0^+} \ln X = -\infty \quad (X = \frac{x}{\sqrt{x^2 + m} - x} ; \text{ si } x \rightarrow -\infty, X \rightarrow 0^+)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f_m(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + \sqrt{x^2 + m}) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$$

$$\underline{2^{\text{ème}} \text{ Cas}} : m = 0. f'_0(x) = \frac{1}{x} > 0$$

x	0	$+\infty$
$f'_0(x)$		+
$f_0(x)$	$-\infty$	$+\infty$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln(x + |x|) = \lim_{X \rightarrow 0^+} \ln X = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x + |x|) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \ln X = +\infty$$

$$\underline{3^{\text{ème}} \text{ Cas}} : m < 0. f'_m(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + m}} > 0$$

x	$\sqrt{-m}$	$+\infty$
$f'_m(x)$		+
$f_m(x)$	$\ln(\sqrt{-m})$	$+\infty$

$$3^{\circ} \bullet \underline{1^{\text{er}} \text{ Cas } m > 0} \Rightarrow D_m =]-\infty, +\infty[$$

f_m est continue sur D_m donc $f_m(D_m)$ est l'intervalle $]-\infty, +\infty[= \mathbf{R}$.

$$\bullet \underline{2^{\text{ème}} \text{ Cas } m = 0} \Rightarrow D_m =]0, +\infty[; f_m(D_m) = \mathbf{R}.$$

$$\bullet \underline{3^{\text{ème}} \text{ Cas } m < 0} \Rightarrow D_m = [\sqrt{-m}, +\infty[; f_m(D_m) = [\text{Log}(\sqrt{-m}), +\infty[.$$

4°/ f_m est continue et strictement croissante sur D_m donc f_m admet une fonction réciproque.

Solution 10 :

$$\text{A) } 1^{\circ} / \lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} 2 - nx + \frac{1}{\ln x} = 2$$

d'où $\lim_{x \rightarrow 0^+} f_n(x) = f_n(0)$ et par suite f_n est continue à droite en 0.

$$\begin{aligned} 2^{\circ} / \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f_n(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 - nx + \frac{1}{\ln x} - 2}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} -n + \frac{1}{x \ln x} = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} x \ln x = 0^- \end{aligned}$$

donc f_n n'est pas dérivable à droite en 0.

3°/ f_n est dérivable sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$

• pour $n=0$, $f'_0(x) = \frac{-1}{x(\ln x)^2} < 0$

x	0	1	$+\infty$
$f'_0(x)$			
$f_0(x)$	2	$+\infty$	2

Diagram showing the sign of $f'_0(x)$ and the behavior of $f_0(x)$ near $x=0$ and $x=1$. Arrows indicate that $f_0(x)$ decreases from $+\infty$ at $x=0$ to a minimum at $x=1$ and then increases towards $+\infty$ as $x \rightarrow +\infty$.

• pour $n \neq 0$, $f'_n(x) = -n - \frac{1}{x(\ln x)^2} < 0$

x	0	1	$+\infty$
$f'_n(x)$			
$f_n(x)$	2	$+\infty$	$-\infty$

Diagram showing the sign of $f'_n(x)$ and the behavior of $f_n(x)$ near $x=0$ and $x=1$. Arrows indicate that $f_n(x)$ decreases from $+\infty$ at $x=0$ to a minimum at $x=1$ and then increases towards $+\infty$ as $x \rightarrow +\infty$.

4°/ On a : $\lim_{x \rightarrow 1^+} f_n(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 1^-} f_n(x) = -\infty$ donc la droite d'équation $x=1$ est une asymptote verticale à C_{f_n} .

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_0(x) = 2 \Rightarrow$ la droite $y=2$ est une asymptote horizontale à C_{f_0} au voisinage de $+\infty$.

• pour $n \neq 0$, on a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) - (2 - nx) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$

d'où la droite D_n d'équation $y = 2 - nx$ est une asymptote à C_{f_n} au voisinage de $+\infty$.

5°/ • Etudions les positions relatives de C_0 et C_1 :

$$f_1(x) - f_0(x) = -x < 0$$

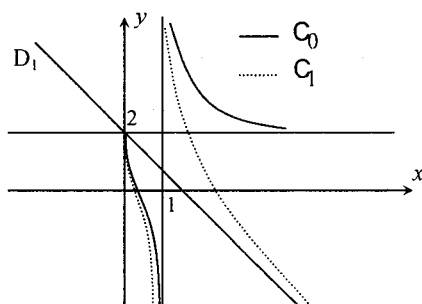
pour tout $x \in]0,1[\cup]1,+\infty[$ donc sur $]0,1[\cup]1,+\infty[$, C_1 est au dessous de C_0 et $C_1 \cap C_0 = \{A(0,2)\}$.

• Etudions la position de C_1 et D_1 : $y = -x + 2$:

$$f_1(x) - (-x + 2) = \frac{1}{\ln x} \text{ or sur }]0,1[, \ln x < 0 \text{ et sur }]1,+\infty[, \ln x > 0$$

et par suite :

- sur $]0,1[$, C_1 est au dessous de D_1
- sur $]1,+\infty[$, C_1 est au dessus de D_1 .



B) 1°/ φ_n est continue et strictement décroissante sur $]1,+\infty[$, donc φ_n est une bijection de $]1,+\infty[$ sur $\varphi_n(]1,+\infty[) = I_n$.

Or • si $n=0$, $\varphi_0(]1,+\infty[) =]2,+\infty[$

• si $n \neq 0$, $\varphi_0(]1,+\infty[) = \mathbf{R}$.

2°/ Pour $n \neq 0$, φ_n est une bijection de $]1,+\infty[$ sur $\mathbf{R}$ donc 0 admet un seul antécédent α_n de $]1,+\infty[$ et par suite l'équation $\varphi_n(x)=0$ admet une seule solution $\alpha_n \in]1,+\infty[$.

$$3^\circ / \varphi_n(x) = x \Leftrightarrow \varphi_n(x) - x = 0 \Leftrightarrow 2 - nx + \frac{1}{\ln x} - x = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - (n+1)x + \frac{1}{\ln x} = 0 \Leftrightarrow \varphi_{n+1}(x) = 0$$

or $\varphi_{n+1}(x) = 0$ admet une unique solution α_{n+1} .

4°/a) On a : $\forall n \in \mathbf{N}$, $\alpha_n > 1$

pour montrer que $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$, il suffit de prouver que $\varphi_n(\alpha_{n+1}) \geq \varphi_n(\alpha_n)$ car φ_n est décroissante sur $]1,+\infty[$.

On a : $\varphi_n(\alpha_{n+1}) = \alpha_{n+1}$, $\varphi_n(\alpha_n) = 0$

On a : $\alpha_{n+1} > 0$ donc $\varphi_n(\alpha_{n+1}) > \varphi_n(\alpha_n)$ d'où $\alpha_{n+1} \leq \alpha_n$ et par conséquent la suite $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante.

b) (α_n) est une suite décroissante et minorée par 1 donc (α_n) est convergente vers un réel $l \geq 1$.

Solution 11 :

1°/ f est définie sur $D = \{ x \in \mathbf{R} / \cos x \neq 0 \}$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ où } k \in \mathbf{Z} \text{ d'où } D = \mathbf{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbf{Z} \right\}$$

- $\forall x \in D$ on a : $-x \in D$ et $f(-x) = f(x)$ d'où f est paire.
- $\forall x \in D$ on a : $x + \pi \in D$ et $f(x + \pi) = f(x)$ donc f est une fonction périodique dont la période est π .

Il suffit donc de faire l'étude sur l'intervalle $[0, \frac{\pi}{2}[$

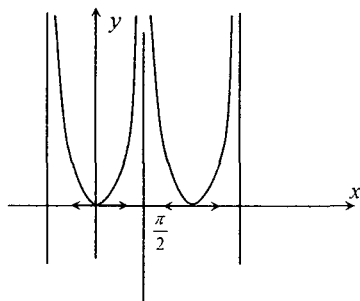
$$\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[, f(x) = -\ln(\cos x)$$

f est définie, continue, dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$; $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[,$

$$f'(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \geq 0$$

x	0		$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$	0	+	
$f(x)$			

$0 \xrightarrow{\quad\quad\quad} +\infty$



$$2^{\circ}/a) g : [0, \frac{\pi}{2}[\rightarrow \mathbf{R} : x \mapsto -\ln(\cos x)$$

g est définie, continue, strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ donc g est

une bijection de $[0, \frac{\pi}{2}[$ sur $g([0, \frac{\pi}{2}[) = \mathbf{R}_+$.

$$b) g^{-1}(\ln \sqrt{2}) = y \Leftrightarrow g(y) = \ln \sqrt{2} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{\cos y}\right) = \ln \sqrt{2}$$

$$\Leftrightarrow \cos y = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow y = \frac{\pi}{4} \text{ car } y \in [0, \frac{\pi}{2}[\text{ d'où } g^{-1}(\ln \sqrt{2}) = \frac{\pi}{4}$$

c) On a: g est dérivable sur $[0, \frac{\pi}{2}[$ et $\forall x \in [0, \frac{\pi}{2}[$, $g'(x) \neq 0$ donc

g^{-1} est dérivable sur $g([0, \frac{\pi}{2}[) = \mathbf{R}_+$.

Etudions la dérivabilité de g^{-1} à droite en $x_0 = 0$.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{g^{-1}(x) - g^{-1}(0)}{x - 0} = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{X - 0}{f(X) - f(0)} = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{f(X) - f(0)}{X - 0}} = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{f(X) - f(0)}{X - 0} = f'(0) = 0^+$$

d'où g^{-1} n'est pas dérivable en 0.

3^o/a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 \leq U_n \leq \frac{\pi}{4}$

• pour $n = 0$, $0 \leq U_n \leq \frac{\pi}{4}$ est vraie

• supposons que pour un entier donné n , on a : $0 \leq U_n \leq \frac{\pi}{4}$ et

montrons que $0 \leq U_{n+1} \leq \frac{\pi}{4}$.

$0 \leq U_n \leq \frac{\pi}{4}$ et f est strictement croissante sur $[0, \frac{\pi}{4}[$ donc

$$f(0) \leq f(U_n) \leq f\left(\frac{\pi}{4}\right) \text{ or } f(0) = -\text{Log}(\cos 0) = 0 ;$$

$$f\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\ln(\cos \frac{\pi}{4}) = \ln \sqrt{2} \leq \frac{\pi}{4} \text{ d'où } 0 \leq U_{n+1} \leq \frac{\pi}{4}.$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbf{N}$, $0 \leq U_n \leq \frac{\pi}{4}$.

b) Etudions les variations de la fonction $h(x) = f(x) - x$ sur

l'intervalle $]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$. h est définie, continue, dérivable sur $]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$.

$$\forall x \in]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[, h'(x) = f'(x) - 1 = \frac{\sin x}{\cos x} - 1 = \operatorname{tg} x - 1$$

x	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
$h'(x)$		+
$h(x)$	$(\ln 2) - \frac{\pi}{3}$	$+\infty$

$$\begin{cases} h \text{ est définie, continue sur }]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[\\ h \text{ est strictement croissante sur }]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[\end{cases}$$

donc h est une bijection de $]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$ sur $[\ln 2 - \frac{\pi}{3}, +\infty[$

$0 \in [\ln 2 - \frac{\pi}{3}, +\infty[$ donc 0 admet un seul antécédent α par h

d'où l'équation $f(x) = x$ admet dans $]\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}[$ une seule solution α .

c) On a : $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n = h(U_n)$

or $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $h'(x) = \operatorname{tg} x - 1$

x	0	$\frac{\pi}{4}$
$h'(x)$		-
$h(x)$	0	$\ln(\sqrt{2}) - \frac{\pi}{4}$

d'où $\forall x \in [0, \frac{\pi}{4}]$, $h(x) \leq 0$. Or $U_n \in [0, \frac{\pi}{4}]$ donc $h(U_n) \leq 0$

donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n \leq 0$ et par conséquent $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante minorée par 0 donc (U_n) est convergente. Soit l sa limite.

On a : $l \in [0, \frac{\pi}{4}]$, f est continue en l donc $f(l) = l \Rightarrow h(l) = 0 \Rightarrow l = 0$.

Conclusion : (U_n) est convergente vers 0.

Solution 12 :

1°/ Soit $f(x) = x - \frac{x^2}{2} - \ln(1+x)$. f est définie, continue, dérivable

sur $\mathbf{R}^+$ et $\forall x \in \mathbf{R}^+$, $f'(x) = 1 - x - \frac{1}{1+x} = \frac{-x^2}{1+x} \leq 0$.

x	0	$+\infty$
$f'(x)$	0	-
$f(x)$	0	$(-)$

d'où $\forall x \geq 0$, $f(x) \leq 0$ et par suite on a : $\forall x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x)$.

• Soit $g(x) = \ln(1+x) - x$. g est définie, continue, dérivable sur

$\mathbf{R}_+$ et $\forall x \in \mathbf{R}_+$, $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = \frac{-x}{1+x} \leq 0$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		-
$g(x)$	0	$(-)$

d'où $\forall x \geq 0$, $g(x) \leq 0$ et par suite on a : $\forall x \geq 0$, $\ln(1+x) \leq x$.

Conclusion : $\forall x \geq 0$, $x - \frac{x^2}{2} \leq \ln(1+x) \leq x$.

$$2^\circ/a) U_1 = \sum_{k=1}^1 \ln\left(1 + \frac{k}{1^2}\right) = \ln 2$$

$$U_2 = \sum_{k=1}^2 \ln\left(1 + \frac{k}{4}\right) = \ln\left(1 + \frac{1}{4}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{4}\right)$$

$$= \ln \frac{5}{4} + \ln \frac{6}{4} = \ln \frac{30}{16} \Rightarrow U_2 = \ln \frac{15}{8}$$

b) Montrons par récurrence que : $\forall n \in \mathbb{N}^*$ on a : $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

- pour $n=1$, $\sum_{k=1}^1 k^2 = 1 = \frac{1(1+1)(2+1)}{6} = 1$

- supposons que $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ et montrons que

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}$$

$$\sum_{k=1}^{n+1} k^2 = \sum_{k=1}^n k^2 + (n+1)^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + (n+1)^2$$

$$= (n+1) \left(\frac{n(2n+1)}{6} + (n+1) \right) = (n+1) \left(\frac{2n^2 + 7n + 6}{6} \right)$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6} \text{ d'où } \forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

c) On prend $x = \frac{k}{n^2}$ dans (*) on obtient :

$$\forall k \geq 1, \frac{k}{n^2} - \frac{k^2}{2n^4} \leq \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \frac{k}{n^2}$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2} - \sum_{k=1}^n \frac{k^2}{2n^4} \leq \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n^2}\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{k}{n^2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k - \frac{1}{2n^4} \sum_{k=1}^n k^2 \leq U_n \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n k$$

$$\text{or } \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{d'où } \forall n \geq 1, \frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \leq U_n \leq \frac{n+1}{2n}$$

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{n+1}{2n} - \frac{(n+1)(2n+1)}{12n^3} \right) = \frac{1}{2} - 0 = \frac{1}{2}$

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2}$ d'où $(U_n)_{n \geq 1}$ est une suite convergente vers $\frac{1}{2}$.

Solution 13 :

$$1^\circ \text{ Soit } f(x) = 1 - \frac{1}{x} - \ln x \quad (x > 1).$$

f est définie, continue, dérivable sur $]1, +\infty[$ et $\forall x > 1$,

$$f'(x) = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} = \frac{1-x}{x^2} < 0$$

x	1	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	0	$\searrow (-)$

d'où $\forall x > 1$, $f(x) < 0$ et par suite $\forall x > 1$, $1 - \frac{1}{x} < \ln x$

$$\bullet \text{ Soit } g(x) = \ln x - \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right) \quad (x > 1)$$

g est définie, continue, dérivable sur $]1, +\infty[$

$$\begin{aligned} \forall x > 1, g'(x) &= \frac{1}{x} - \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{x^2}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2x^2} = \frac{2x - x^2 - 1}{2x^2} \\ &= \frac{-(x^2 - 2x + 1)}{2x^2} = \frac{-(x-1)^2}{2x^2} < 0 \end{aligned}$$

x	1	$+\infty$
$g'(x)$		-
$g(x)$	0	$\searrow (-)$

$$\text{on a : } \forall x > 1, g(x) < 0 \Rightarrow \ln x < \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

$$\textbf{Conclusion : } \forall x > 1, 1 - \frac{1}{x} < \ln x < \frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right).$$

2^o/ Soit $\phi_n(x) = \ln(1+nx) - x$. ϕ_n est définie, continue, dérivable sur

$$\left]-\frac{1}{n}, +\infty\right[\text{ et } \forall x > -\frac{1}{n} \quad \phi'_n(x) = \frac{n}{1+nx} - 1 = \frac{n-1-nx}{1+nx}$$

$$\phi'_n(x) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n} > -\frac{1}{n}$$

x	$-\frac{1}{n}$	$1-\frac{1}{n}$	$+\infty$
$\phi'_n(x)$		0	
$\phi_n(x)$		$M > 0$	
	$-\infty$		$-\infty$

$$M = \phi_n\left(1 - \frac{1}{n}\right) = \ln(1 + n - 1) - \left(1 - \frac{1}{n}\right) = \ln n - \left(1 - \frac{1}{n}\right) > 0 \text{ (d'après 1°/)}$$

• On a : ϕ_n est une bijection de $]-\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}[$ sur $]-\infty, M[$
 or $0 \in]-\infty, M[$ d'où l'équation $\phi_n(x) = 0$ admet dans l'intervalle
 $]-\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}[$ une seule solution. Comme $\phi_n(0) = 0$ et
 $0 \in]-\frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}[$ donc cette solution est nulle.

• On a : ϕ_n est une bijection de $[1 - \frac{1}{n}, +\infty[$ sur $]-\infty, M]$
 $0 \in]-\infty, M]$ d'où l'équation $\phi_n(x) = 0$ admet une seule solution
 α_n dans l'intervalle $]1 - \frac{1}{n}, +\infty[$.

$$3^\circ/a) \text{ On a : } \ln(1 + n\alpha_n) = \alpha_n$$

$$\text{On a : } \alpha_n > 1 - \frac{1}{n} \Rightarrow n\alpha_n > n - 1 \Rightarrow n\alpha_n + 1 > n$$

$$\Rightarrow \ln(1 + n\alpha_n) > \ln n \Rightarrow \alpha_n > \ln n$$

$$b) \text{ On a : } \phi_n(2 \ln n) = \ln(1 + 2n \ln n) - 2 \ln n$$

$$= \ln(1 + 2n \ln n) - \ln n^2 = \ln\left(\frac{1 + 2n \ln n}{n^2}\right)$$

$$\text{or } \ln n < \frac{1}{2}\left(n - \frac{1}{n}\right) \Rightarrow 2n \ln n + 1 < n^2 \Rightarrow \ln\left(\frac{2n \ln n + 1}{n^2}\right) < 0$$

$$\Rightarrow \phi_n(2 \ln n) < 0$$

$$\text{On a : } 1 - \frac{1}{n} < \ln n < 2 \ln n$$

ϕ_n est strictement décroissante sur $[1 - \frac{1}{n}, +\infty[$; $\alpha_n \in [1 - \frac{1}{n}, +\infty[$.

$$2 \ln n \in [1 - \frac{1}{n}, +\infty[; \phi_n(2 \ln n) < 0 = \phi_n(\alpha_n)$$

$$\text{d'où } \alpha_n < 2 \ln n \Rightarrow 1 + n\alpha_n < 1 + 2n \ln n$$

$$\text{or } \ln(1 + n\alpha_n) = \alpha_n \text{ d'où } \alpha_n < \ln(1 + 2n \ln n)$$

Conclusion : $\forall n \geq 2, \ln n < \alpha_n < \ln(1 + 2n \ln n)$

$$\text{c) } 1 < \frac{\alpha_n}{\ln n} < \frac{\ln(1 + 2n \ln n)}{\ln n}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + 2n \ln n)}{\ln n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln [n \ln n (2 + \frac{1}{n \ln n})]}{\ln n}$$

$$= 1 + \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} + \frac{\ln(2 + \frac{1}{n \ln n})}{\ln n} = 1 \text{ car :}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(\ln n)}{\ln n} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} = 0$$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(2 + \frac{1}{n \ln n})}{\ln n} = 0 \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\alpha_n}{\ln n} = 1.$$

Solution 14 :

$$1^\circ \bullet A = \int_1^2 \ln(1+x) \, dx$$

$$\text{Posons } \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln(1+x) \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{1}{1+x} \end{cases}$$

$$\text{D'où } A = [x \ln(1+x)]_1^2 - \int_1^2 \frac{x}{1+x} \, dx$$

$$\text{Calculons } \int_1^2 \frac{x}{1+x} \, dx.$$

$$\int_1^2 \frac{x}{1+x} \, dx = \int_1^2 \frac{x+1-1}{1+x} \, dx = \int_1^2 1 - \frac{1}{1+x} \, dx$$

$$= [x - \ln(1+x)]_1^2 = 1 + \ln \frac{2}{3}$$

$$\text{d'où } A = 2 \ln 3 - \ln 2 - 1 - \ln \frac{2}{3} = 3 \ln 3 - 2 \ln 2 - 1 = \ln \frac{27}{4} - 1.$$

$$\bullet B = \int_1^2 \ln(-x+3) \, dx$$

$$\text{Posons } \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln(-x+3) \end{cases} \quad \text{et } \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{-1}{-x+3} \end{cases}$$

$$B = [x \ln(-x+3)]_1^2 - \int_1^2 \frac{-x}{3-x} \, dx$$

$$\text{Calculons } \int_1^2 \frac{-x}{3-x} \, dx :$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \frac{-x}{3-x} \, dx &= \int_1^2 \left(1 + \frac{-3}{3-x}\right) \, dx = [x + 3 \ln |3-x|]_1^2 \\ &= 2 - (1 + 3 \ln 2) = 1 - 3 \ln 2 \end{aligned}$$

$$\text{D'où } B = -\ln 2 - (1 - 3 \ln 2) = 2 \ln 2 - 1$$

$$2^{\circ} \bullet C = \int_1^2 \ln \left| \frac{x-3}{x+1} \right| \, dx = \int_1^2 \ln |x-3| \, dx - \int_1^2 \ln |x+1| \, dx$$

$$\text{or pour } x \in [1, 2], \, x-3 < 0 \Rightarrow \ln |x-3| = \ln(-x+3) \text{ et } x+1 > 0 \Rightarrow$$

$$\ln |x+1| = \ln(x+1) \text{ et par suite l'intégrale } C \text{ s'écrit :}$$

$$\begin{aligned} C &= \int_1^2 \ln(-x+3) \, dx - \int_1^2 \ln(x+1) \, dx = B - A \\ &= 2 \ln 2 - 1 - \left(\ln \frac{27}{4} - 1\right) = \ln \frac{16}{27} \end{aligned}$$

$$D = \int_1^2 \ln \sqrt{x^2 - 2x - 3} \, dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \ln |x^2 - 2x - 3| \, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int_1^2 \ln |(x-3)(x+1)| \, dx = \frac{1}{2} \int_1^2 \ln |x-3| \, dx + \frac{1}{2} \int_1^2 \ln |x+1| \, dx$$

$$= \frac{1}{2} (A + B) = \frac{1}{2} (2 \ln 2 - 1 + \ln \frac{27}{4} - 1) = \frac{1}{2} \ln(27) - 1$$

Solution 15 :

$$1^\circ/\text{On a : } \int_1^n \frac{dx}{x} = \int_1^2 \frac{dx}{x} + \int_2^3 \frac{dx}{x} + \dots + \int_{n-1}^n \frac{dx}{x} = \sum_{p=1}^{n-1} \int_p^{p+1} \frac{1}{x} dx$$

$$\text{or } \forall x \in [p, p+1] \text{ on a : } \frac{1}{p+1} \leq \frac{1}{x} \leq \frac{1}{p} \Rightarrow \frac{1}{p+1} \leq \int_p^{p+1} \frac{1}{x} dx \leq \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p+1} \leq \sum_{p=1}^{n-1} \int_p^{p+1} \frac{1}{x} dx \leq \sum_{p=1}^{n-1} \frac{1}{p}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \leq \int_1^n \frac{dx}{x} \leq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n-1}$$

$$\Rightarrow U_n - 1 \leq \int_1^n \frac{dx}{x} \leq U_n - \frac{1}{n}$$

$$2^\circ/\text{a) On a : } \int_1^n \frac{dx}{x} = [\ln x]_1^n = \ln n$$

$$\text{d'où } U_n - 1 \leq \ln n \leq U_n - \frac{1}{n} \Rightarrow \ln n + \frac{1}{n} \leq U_n \leq 1 + \ln n$$

$$\text{b) } \lim_{n \rightarrow +\infty} \ln n + \frac{1}{n} = +\infty \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty.$$

Solution 16 :

$$1 + \frac{k}{n} \leq x \leq 1 + \frac{k+1}{n} \Rightarrow \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \ln x \leq \ln\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$$

car la fonction Log est strictement croissante sur $\mathbf{R}_+$.

En passant à l'intégrale on obtient :

$$\int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) dx \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln x dx \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln\left(1 + \frac{k+1}{n}\right) dx$$

$$\Rightarrow \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) [x]_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln x dx \leq \ln\left(1 + \frac{k+1}{n}\right) [x]_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}}$$

$$\text{d'où } \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln x dx \leq \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$$

2°/ a) On a : $\forall n \in \mathbf{N}^*$ et pour tout $0 \leq k \leq n-1$:

$$\frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln x \, dx \leq \frac{1}{n} \ln\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) \leq \sum_{k=0}^{n-1} \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln x \, dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{k+1}{n}\right)$$

$$\text{or } \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \left(\ln 1 + \sum_{k=1}^n \ln\left(1 + \frac{k}{n}\right) - \ln\left(1 + \frac{n}{n}\right) \right) = U_n - \frac{1}{n} \ln 2$$

• Montrons que $\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{k+1}{n}\right) = U_n$.

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \ln\left(1 + \frac{k+1}{n}\right) = \frac{1}{n} \left(\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) + \ln\left(1 + \frac{2}{n}\right) + \dots + \ln\left(1 + \frac{n}{n}\right) \right) = U_n$$

• $\sum_{k=0}^{n-1} \int_{1+\frac{k}{n}}^{1+\frac{k+1}{n}} \ln x \, dx = \int_1^{1+\frac{1}{n}} \ln x \, dx + \int_{1+\frac{1}{n}}^{1+\frac{2}{n}} \ln x \, dx + \dots$

$$\dots + \int_{1+\frac{n-2}{n}}^{1+\frac{n-1}{n}} \ln x \, dx + \int_{1+\frac{n-1}{n}}^{1+\frac{n}{n}} \ln x \, dx = \int_1^2 \ln x \, dx$$

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}^*, U_n - \frac{1}{n} \ln 2 \leq \int_1^2 \ln x \, dx \leq U_n$.

b) On a : $U_n - \frac{1}{n} \ln 2 \leq \int_1^2 \ln x \, dx$

donc $U_n \leq \frac{1}{n} \ln 2 + \int_1^2 \ln x \, dx$

d'où $\forall n \in \mathbb{N}^*, \int_1^2 \ln x \, dx \leq U_n \leq \frac{1}{n} \ln 2 + \int_1^2 \ln x \, dx$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \ln 2 + \int_1^2 \ln x \, dx = 0 + \int_1^2 \ln x \, dx = \int_1^2 \ln x \, dx$$

d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \int_1^2 \ln x \, dx = [x \ln x - x]_1^2 = 2 \ln 2 - 1 = l$.

Conclusion : (U_n) est une suite convergente vers $l = 2 \ln 2 - 1$.

Solution 17 :

f est définie, continue et dérivable sur $]0, +\infty[$;

$$f'(x) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2x} = \frac{1}{2}\left(\frac{x^2-1}{x}\right)$$

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{2} \frac{\ln x}{x} - \frac{1}{4} \right) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

$$I(\lambda) = \int_{\lambda}^1 \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln x \right) dx = \int_{\lambda}^1 \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4} \right) dx - \frac{1}{2} \int_{\lambda}^1 \ln x \, dx$$

$$\bullet \int_{\lambda}^1 \left(\frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{4} \right) dx = \frac{1}{4} \left[\frac{x^3}{3} - x \right]_{\lambda}^1 = \frac{-\lambda^3}{12} + \frac{\lambda}{4} - \frac{1}{6}$$

$$\bullet \text{ Intégrons par parties : } \int_{\lambda}^1 \ln x \, dx$$

$$\text{Posons } \begin{cases} u'(x) = 1 \\ v(x) = \ln x \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u(x) = x \\ v'(x) = \frac{1}{x} \end{cases}$$

D'où

$$\int_{\lambda}^1 \ln x \, dx = [x \ln x]_{\lambda}^1 - \int_{\lambda}^1 1 \, dx = -\lambda \ln \lambda - [x]_{\lambda}^1 = -\lambda \ln \lambda - 1 + \lambda$$

Il en résulte que :

$$I(\lambda) = -\frac{\lambda^3}{12} + \frac{\lambda}{4} - \frac{1}{6} + \frac{\lambda}{2} \ln \lambda - \frac{\lambda}{2} + \frac{1}{2} = -\frac{\lambda^3}{12} - \frac{\lambda}{4} + \frac{\lambda}{2} \ln \lambda + \frac{1}{3}$$

$$\text{b) } \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} I(\lambda) = \frac{1}{3} \text{ car } \lim_{\lambda \rightarrow 0^+} \lambda \ln \lambda = 0.$$

3°/a) f est décroissante sur $]0, 1]$ et pour tout $1 \leq k \leq n-1$ on a :

$$\left[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n} \right] \subset]0, 1] \text{ donc } \frac{k}{n} \leq x \leq \frac{k+1}{n} \Rightarrow f\left(\frac{k+1}{n}\right) \leq f(x) \leq f\left(\frac{k}{n}\right)$$

En intégrant sur $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}]$, on obtient :

$$f(\frac{k+1}{n}) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dx \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq f(\frac{k}{n}) \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} dx$$

$$\Rightarrow (\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}) f(\frac{k+1}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq (\frac{k+1}{n} - \frac{k}{n}) f(\frac{k}{n})$$

$$\text{Il en résulte que } \frac{1}{n} f(\frac{k+1}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f(\frac{k}{n}).$$

b) On a : d'après a) pour tout $1 \leq k \leq n-1$

$$\frac{1}{n} f(\frac{k+1}{n}) \leq \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} f(\frac{k}{n})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k+1}{n}) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx \leq \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n}) \quad (*)$$

$$\bullet \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k+1}{n}) = \frac{1}{n} (f(\frac{2}{n}) + f(\frac{3}{n}) + f(\frac{4}{n}) + \dots + f(\frac{n}{n}))$$

$$= \frac{1}{n} (f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + f(\frac{3}{n}) + f(\frac{4}{n}) + \dots + f(\frac{n}{n}) - f(\frac{1}{n}))$$

$$\text{donc } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k+1}{n}) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(\frac{k}{n}) - \frac{1}{n} f(\frac{1}{n}) = S_n - \frac{1}{n} f(\frac{1}{n})$$

$$\bullet \sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx = \int_{\frac{1}{n}}^{\frac{2}{n}} f(x) dx + \int_{\frac{2}{n}}^{\frac{3}{n}} f(x) dx + \dots + \int_{\frac{n-1}{n}}^{\frac{n}{n}} f(x) dx$$

En utilisant la relation de Chasles, on trouve que :

$$\sum_{k=1}^{n-1} \int_{\frac{k}{n}}^{\frac{k+1}{n}} f(x) dx = \int_{\frac{1}{n}}^1 f(x) dx = I(\frac{1}{n})$$

$$\bullet \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f(\frac{k}{n}) = \frac{1}{n} (f(\frac{1}{n}) + f(\frac{2}{n}) + f(\frac{3}{n}) + f(\frac{4}{n}) + \dots + f(\frac{n-1}{n}))$$

$$\text{or } f(\frac{n}{n}) = f(1) = 0$$

$$\text{donc } \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) = \frac{1}{n} \left(f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + f\left(\frac{4}{n}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{n}\right) \right) = S_n$$

Les inégalités (*) sont équivalentes donc $S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n$.

$$\bullet \text{ On a : } S_n - \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) \leq I\left(\frac{1}{n}\right) \Rightarrow S_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + I\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\text{d'où } I\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + I\left(\frac{1}{n}\right).$$

c) • On a montré que $\lim_{\lambda \rightarrow 0^+} I(\lambda) = \frac{1}{3}$ et on a :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0^+ \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} I\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3}.$$

$$\bullet \text{ Calculons } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{1}{4n^2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} \ln \frac{1}{n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{4n^3} - \frac{1}{4n} + \frac{1}{2} \frac{\ln n}{n} \right) = 0 \end{aligned}$$

on a donc pour tout $n \geq 1$, $I_n\left(\frac{1}{n}\right) \leq S_n \leq \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + I\left(\frac{1}{n}\right)$

$$\text{et } \lim_{n \rightarrow +\infty} I_n\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} f\left(\frac{1}{n}\right) + I\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{3} \text{ donc } \lim_{n \rightarrow +\infty} S_n = \frac{1}{3}.$$

Solution 18 :

1°/a) Pour tout réel $t \neq -1$, $\sum_{k=0}^{n-2} (-t)^k$ est la somme des $(n-1)$ termes

d'une suite géométrique de 1^{er} terme 1 et de raison $-t$

$$\text{donc } \sum_{k=0}^{n-2} (-t)^k = \frac{1 - (-t)^{n-1}}{1 + t} \Rightarrow \sum_{k=0}^{n-2} (-t)^k + \frac{(-t)^{n-1}}{1 + t} = \frac{1}{1 + t}$$

b) Pour tout $x \in [0, 1]$, on peut intégrer entre 0 et x les deux membres de cette égalité d'où :

$$\int_0^x \sum_{k=0}^{n-2} (-t)^k dt + \int_0^x \frac{(-t)^{n-1}}{1 + t} dt = \int_0^x \frac{1}{1 + t} dt$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \int_0^x t^k dt + (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt = [\ln(1+t)]_0^x$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} + (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt = \ln(1+x)$$

$$\text{or } \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^k \frac{x^{k+1}}{k+1} = (-1)^0 \frac{x^1}{1} + \frac{(-1)^1 x^2}{2} + \dots + \frac{(-1)^{n-2} x^{n-1}}{n-1} = \sum_{k=1}^{n-1} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k}$$

$$\text{d'où } \ln(1+x) = P_n(x) + (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt$$

2°/a) Pour tout réel $t \in [0, 1]$, on a : $0 \leq t \leq 1 \Rightarrow 1 \leq 1+t \leq 2$

$$\Rightarrow \frac{1}{1+t} \leq 1 \Rightarrow \frac{t^{n-1}}{1+t} \leq t^{n-1}$$

En intégrant cette inégalité entre 0 et 1, on obtient :

$$\int_0^1 \frac{t^{n-1}}{1+t} dt \leq \int_0^1 t^{n-1} dt \text{ or } \int_0^1 t^{n-1} dt = \left[\frac{t^n}{n} \right]_0^1 = \frac{1}{n} \text{ et comme } m_{a_n} \geq 0 \text{ on en}$$

$$\text{déduit : } |a_n| \leq \frac{1}{n}.$$

b) On a : $\forall n \in \mathbb{N}^* : |(-1)^{n-1} a_n| = |a_n| \leq \frac{1}{n}$ et comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0$ donc

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (-1)^{n-1} a_n = 0.$$

3°/ D'après 1°/ on a :

$$\text{pour tout réel } x \in [0, 1], \ln(1+x) = P_n(x) + (-1)^{n-1} \int_0^x \frac{t^{n-1}}{1+t} dt$$

en particulier pour $x=1$, on obtient : $\ln 2 = P_n(1) + (-1)^{n-1} a_n$

$$\Rightarrow -P_n(1) = (-1)^{n-1} a_n - \ln 2 \Rightarrow -\sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = (-1)^{n-1} a_n - \ln 2$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^k}{k} = (-1)^{n-1} a_n - \ln 2 \Rightarrow U_n = (-1)^{n-1} a_n - \ln 2$$

or d'après 2°/ la suite de terme général $(-1)^{n-1} a_n$ converge vers 0 donc la suite (U_n) converge vers $-\ln 2$.

Conclusion : La suite (U_n) converge vers $\ln \frac{1}{2}$.