

EXERCICES

Exercice 1 :

Calculer les limites suivantes :

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1}$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 2x^2}{x + 4}$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1)$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^{x+2}$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x \quad (n \in \mathbb{N}^*)$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{(x+1)^3}$$

$$g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + 1) - x$$

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(e^x + e^{-x})$$

$$j) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$$

$$k) \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \ln(1 + e^x)$$

$$l) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(x e^{\frac{x}{x^2-1}} - x\right)$$

Exercice 2 :

$$1^\circ \text{ Démontrer que } \forall x \in [0, 1] \text{ on a : } 1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

$$2^\circ \text{ Soit } f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{x}{e^x - 1} & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Montrer que f est continue, dérivable en 0.

$$3^\circ \text{ Etudier le signe de la fonction } g : [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto e^x - 1 - x e^x.$$

4° Etudier les variations de f .

5° Tracer (C) dans un repère orthonormé.

Exercice 3 :

$$\text{Soit } f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}.$$

1° Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et que $\forall x \in \mathbb{R}, -1 < f(x) < 1$.

2°/a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}$ et que : $\forall x \in \mathbf{R}$,

$$f'(x) = 1 - (f(x))^2.$$

b) En déduire le signe de $f'(x)$.

3°/ Etudier les variations de f .

4°/ Montrer que f est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $] -1, 1[$. Expliciter f^{-1} .

5°/a) Ecrire une équation de la tangente (T) à C_f au point O.

b) Etudier la position de C_f et (T).

6°/ Tracer dans un même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, les courbes C_f et $C_{f^{-1}}$.

Exercice 4 :

A) Soit $h: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} : x \mapsto e^x - x - 1$.

1°/ Etudier les variations de h .

2°/ En déduire que $\forall x \in \mathbf{R}, e^x \geq x + 1$.

B) Soit $g: \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{e^x - 1}{x \cdot e^{2x}} & \text{si } x > 0 \\ g(0) = 1 \end{cases}$

1°/ Prouver que g est continue sur $\mathbf{R}_+$.

2°/ Prouver que $\forall x > 0, e^{-2x} < g(x)$.

3°/a) Calculer pour tout $x > 0, g'(x)$.

b) Prouver que $\forall x > 0, g'(x) < -e^{-2x}$.

4°/a) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x)$.

b) Former le tableau de variations de g .

5°/ Montrer que g est une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur un intervalle J que l'on précisera.

Exercice 5 :

Soit $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} : x \mapsto \begin{cases} x \cdot e^{\frac{-1}{x}} & \text{si } x > 0 \\ \ln(1-x) & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$

1°/ Montrer que $D_f = \mathbf{R}$.

2°/ Montrer que f est continue en 0.

3°/a) Etudier la dérivabilité de f en 0.

b) Interpréter géométriquement le résultat.

4°/a) Montrer que $D : y = x - 1$ est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$

b) Calculer $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}$. Interpréter.

5°/a) Etudier les variations de f .

b) Tracer C_f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

Exercice 6 :

$$\text{Soit } f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{-1}{e^{x^2}} & \text{si } x \neq 0 \\ x^3 & \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

1°/ Montrer que f est continue sur $\mathbf{R}$.

2°/ Montrer que f est dérivable sur $\mathbf{R}$.

3°/ Etudier les variations de f et tracer sa courbe représentative **(C)** dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

4/ Soit $F : [1, +\infty[\rightarrow \mathbf{R} : x \mapsto \frac{1}{2} e^{\frac{-1}{x^2}}$.

a) Montrer en utilisant le théorème des accroissements finis que :

$$\forall x \geq 1 : f(x+1) \leq F(x+1) - F(x) \leq f(x) \quad (\star).$$

b) Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ définie par : $U_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k)$.

Utiliser $(\star)$ pour montrer que : $\forall n \in \mathbf{N}^* : \frac{e^{\frac{-1}{(n+1)^2}} - e^{-1}}{2n} \leq U_n \leq \frac{e^{\frac{-1}{n^2}} + e^{-1}}{2n}$.

En déduire que $(U_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est convergente.

Exercice 7 :

Soit $f : [0, 1] \rightarrow \mathbf{R} : x \mapsto \frac{e^x}{x+2}$.

1°/a) Etudier les variations de f .

b) Prouver que $\forall x \in [0,1]$ on a : $\frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$.

2°/ Montrer que l'équation $f(x) = x$ admet dans $[0,1]$ une seule solution notée a .

3°/ Soit la suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :
$$\begin{cases} U_0 = \frac{1}{2} \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$$

a) Prouver que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 \leq U_n \leq 1$.

b) Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, |U_{n+1} - a| \leq \frac{2}{3} |U_n - a|$.

c) Montrer que (U_n) est convergente vers a .

d) Trouver le plus petit entier n_0 tel que $\forall n \geq n_0, |U_n - a| \leq 10^{-3}$.

Exercice 8 :

Soit n un entier supérieur ou égal à 2.

On considère la fonction f_n définie sur $\mathbf{R}$ par : $f_n(x) = 1 + \frac{x}{n+1} - e^{\frac{x}{n+1}}$.

1°/a) Etudier les variations de f_n .

b) Montrer que f_n admet un maximum strictement positif que l'on calculera.

2°/a) Montrer que la courbe (C_n) représentant f_n admet une asymptote oblique Δ_n dont précisera une équation.

b) Tracer (C_2) .

3°/ Démontrer que sur l'intervalle $] -\infty, 0[$, l'équation $f_n(x) = 0$ admet une racine unique que l'on notera x_n .

B) 1°/ Soit $x > 1$ et $\varphi(x) = \frac{2}{x} + \ln\left(\frac{x-1}{x+1}\right)$.

Etudier le signe de $\varphi(x)$ pour tout réel $x > 1$.

2°/a) Montrer que $f_n(-2) < 0$ (on pourra introduire φ).

b) Montrer alors que $x_n > -2$.

3°/ Soit $x > 0$ et $\psi(x) = \frac{2x+1}{2x(x+1)} + \ln\left(\frac{x}{x+1}\right)$

a) Etudier le signe de $\psi(x)$.

b) Prouver que $f_n(2n - \ln(\frac{n}{n+1})) = \frac{2n}{n+1} \psi(n)$.

4°/a) Montrer alors que $x_n < 2n - \ln(\frac{n}{n+1})$.

b) En déduire que la suite de terme général x_n admet une limite finie que l'on calculera.

Exercice 9 :

Soit n un entier naturel non nul.

Soit la fonction f_n définie par : $\forall x > 0, f_n(x) = x e^{\frac{-1}{nx}}$ et $f_n(0) = 0$.

1°/ Etudier les variations de f_n .

2°/a) Montrer que $\forall t > 0, 0 \leq e^{-t} - (1-t) \leq \frac{t^2}{2}$.

b) En déduire que $\forall x > 0, 0 \leq f_n(x) - (x - \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{2n^2 x}$.

3°/a) Montrer que la droite D_n d'équation $y = x - \frac{1}{n}$ est une asymptote oblique à la courbe $(\mathcal{C}_n)$ représentative de f_n .

b) Préciser la position de $(\mathcal{C}_n)$ et D_n .

c) Tracer $(\mathcal{C}_1)$.

4°/a) Montrer que l'équation $(\star) : f_n(x) = 1$ a une seule solution α_n dans $]0, +\infty[$.

b) Montrer que α_n est une solution de l'équation $x - \ln x = \frac{1}{n}$.

5°/a) Montrer que $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante.

b) Montrer que $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est convergente vers un réel que l'on calculera.

Exercice 10 :

A) 1°/ Prouver que $\forall t \geq 0, 0 \leq 1 - t + \frac{t^2}{2} - e^{-t} \leq \frac{t^3}{6}$.

2°/ En déduire $\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{1 - e^{-t} - t}{t^2}$.

3°/ Soit $g : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R} : t \mapsto \begin{cases} \frac{1 - e^{-t}}{t} & \text{si } t > 0 \\ 1 & \text{si } t = 0 \end{cases}$

a) Montrer que g est continue, dérivable sur $\mathbf{R}_+$.

b) Prouver que $\forall t \geq 0, 1 + t \leq e^t$, en déduire le signe de $g'(t)$.

c) Etudier ainsi les variations de g et tracer sa courbe ($\mathbf{C}_g$)

représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

B) Soit $f : [0, +\infty[\rightarrow \mathbf{R} : x \mapsto \begin{cases} \frac{1}{x}(e^{-x} - e^{-2x}) & \text{si } x > 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

1°/ Prouver que f est continue sur $\mathbf{R}_+$.

2°/ a) Prouver que $\forall x \geq 0, f(x) = 2g(2x) - g(x)$.

b) En déduire que f est dérivable sur $\mathbf{R}_+$.

c) Ecrire une équation de la tangente (T) à la courbe ($\mathbf{C}_f$) au point d'abscisse $x_0 = 0$.

3°/ a) Montrer que $\forall x > 0, f'(x) = \frac{e^{-2x}}{x^2}(2x + 1 - (x + 1)e^x)$

b) En utilisant A) 3°/ b), prouver que $\forall x > 0, f'(x) < 0$.

4°/ Etudier f et tracer ($\mathbf{C}_f$) dans un repère orthonormé.

Exercice 11 :

Soit $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} : x \mapsto \ln(1 + e^{-x})$.

1°/ Etudier les variations de f .

2°/ a) Montrer que la courbe (C) de f admet une asymptote oblique Δ .

b) Etudier la position de (C) et Δ .

c) Tracer (C) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3°/ Montrer que f est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $\mathbf{R}_+^*$ et expliciter sa réciproque.

4°/ Soit $a \in \mathbf{R}^*$, M et N deux points de (C) d'abscisses respectives $-a$ et a .

a) Montrer que la droite (MN) garde une direction fixe que l'on précisera.

b) Montrer que les tangentes à (C) en M et N se coupent sur l'axe des ordonnées.

B) 1°/ Montrer que $\forall t \geq 0, t - \frac{t^2}{2} \leq \ln(1+t) \leq t$.

2°/ En déduire que $\forall x \in \mathbf{R}, e^{-x} - \frac{e^{-2x}}{2} \leq f(x) \leq e^{-x}$.

3°/ Soit la suite $(U_n)_{n \geq 1}$ définie par : $U_1 = 1 + \frac{1}{e}$ et $\forall n \geq 1$,

$$U_{n+1} = U_n \left(1 + \frac{1}{e^{n+1}}\right)$$

a) Prouver que $\forall n \geq 1, U_n > 0$.

b) Prouver que (U_n) est une suite croissante.

4°/ a) Prouver que $\forall n \in \mathbf{N}^*, \ln(U_n) = \sum_{p=1}^n f(p)$.

b) Calculer en fonction de n les deux sommes $\sum_{p=1}^n \frac{1}{e^p}$ et $\sum_{p=1}^n \frac{1}{e^{2p}}$.

5°/ a) Montrer que $(U_n)_{n \geq 1}$ est une suite convergente. Soit l sa limite.

b) Prouver que $\frac{2e+1}{2(e^2-1)} \leq \ln l \leq \frac{1}{e-1}$.

Exercice 12 :

A) 1°/ Soit $u : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R} : x \mapsto e^x - x - 1$.

Etudier les variations de u . En déduire que $\forall x > 0, e^x \geq x + 1$.

2°/ Montrer que $\forall x > 0, \ln x \leq x - 1$. (On étudiera une fonction convenablement choisie).

3°/ En déduire que $\forall x > 0, e^x - \ln x \geq 2$.

B) Soit φ la fonction définie par :
$$\begin{cases} \varphi(x) = \frac{x}{e^x - \ln x} & \text{si } x > 0 \\ \varphi(0) = 0 \end{cases}$$

1°/ Montrer que $D_\varphi = \mathbf{R}_+$.

2°/ Montrer que φ est continue, dérivable sur $\mathbf{R}_+$.

3°/ Soit $h : \mathbf{R}_+^* \rightarrow \mathbf{R} : x \mapsto e^x(1-x) - \text{Log } x + 1$

a) Etudier les variations de h .

b) Montrer qu'il existe un seul réel $\alpha > 0$ solution de l'équation :

(E) : $h(x) = 0$. Vérifier que $1 < \alpha < 2$.

c) En déduire le signe de $h(x)$.

4°/ Etudier ainsi les variations de φ .

Exercice 13 :

Soient $f(x) = x^2 e^{2x}$ et $g(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$.

1°/ Déterminer a, b et c pour que g soit une primitive de f .

2°/ En déduire la primitive F de f qui s'annule en 0.

Exercice 14 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = \frac{e^x - 2}{e^x + 1}$

1°/ Montrer qu'il existe deux réels a et b tels que $\forall x \in \mathbf{R}$, on a :

$$f(x) = a + \frac{be^x}{e^x + 1}$$

2°/ Calculer ainsi l'intégrale $I = \int_0^{n^2} f(x) dx$.

Exercice 15 :

Soit F définie sur $\mathbf{R}_+$ par : $F(x) = \int_0^x \sqrt{t} \cdot e^{-t} dt$

(on ne demande pas le calcul de $F(x)$)

1°/ Montrer que F est dérivable sur $\mathbf{R}_+$ et calculer $F'(x)$.

2°/ Etudier le sens de variations de F .

3°/ a) Montrer que $\forall t \geq 0, \sqrt{t} \leq t + \frac{1}{4}$.

b) Calculer à l'aide d'une intégration par parties : $\int_0^x (t + \frac{1}{4}) \cdot e^{-t} dt$

c) En déduire que $\forall x \geq 0$, on a : $F(x) \leq \frac{5}{4}$.

Exercice 16 :

Soit la fonction $f(x) = \int_0^{\frac{e^x - e^{-x}}{2}} \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}}$.

1°/ Prouver que f est définie sur $\mathbf{R}$.

2°/ a) Prouver que f est dérivable sur $\mathbf{R}$.

b) Calculer pour chaque $x \in \mathbf{R}$, $f'(x)$.

3°/ En déduire $f(x)$.

4°/ Calculer $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t^2 - 1}}$.

Exercice 17 :

1°/ En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que :

$$\forall x \in \mathbf{R}, |e^x - 1| \leq |x| e^{|x|}.$$

2°/ Soit $x \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $\varphi(x) = \int_0^{\operatorname{tg} x} \frac{dt}{t^2 + 1}$.

a) Montrer que φ est dérivable sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et calculer $\varphi'(x)$.

b) En déduire $\varphi(x)$.

3°/ Soit $x \in \mathbf{R}$, $F(x) = \int_{-1}^1 \frac{e^{tx}}{t^2 + 1} dt$.

a) Montrer que F est définie sur $\mathbf{R}$ et calculer $F(0)$.

b) Montrer que $\forall x \in [-1, 1], \left| F(x) - \frac{\pi}{2} \right| \leq |x| e^{-\ln 2}$.

c) En déduire que F est continue en 0.

Exercice 18 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = |x-1| \cdot e^x$.

1°/ Etudier la dérivabilité de f en $x_0 = 1$. Interpréter graphiquement.

2°/ Etudier les variations de f et tracer sa courbe (C) dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3°/ Calculer l'aire de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites : $x = 0$ et $x = 2$.

Exercice 19 :

Soit la fonction f définie sur $\mathbf{R}_+$ par : $f(x) = e^{\sqrt{x}} + 1$.

1°/a) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter.

b) Etudier les variations de f .

2°/ Tracer la courbe (C) de f dans un plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3°/a) Montrer que f est une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur un intervalle J que l'on précisera.

On note $g = f^{-1}$. Tracer la courbe (C') de g dans le même repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b) Montrer que $\forall x \in [2, +\infty[$, $g(x) = \ln^2(x-1)$.

4°/a) Calculer à l'aide de deux intégrations par parties l'intégrale

$$J = \int_2^{e+1} g(x) dx.$$

b) Que représente géométriquement J ?

5°/ Soit A l'aire de la partie du plan limitée par (C), l'axe des abscisses et les droites $x = 0$ et $x = 1$.

a) Montrer que $A + J = e + 1$.

b) En déduire A.

SOLUTIONS

Solution 1 :

$$a) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \frac{e^{2x} - 1}{2x}}{\frac{e^x - 1}{x}}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} 2 \frac{e^{2x} - 1}{2x} = \lim_{X \rightarrow 0} 2 \frac{e^X - 1}{X} = 2 \cdot 1 = 2 \quad (X = 2x)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} - 1}{e^x - 1} = 2$$

$$b) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 2x^2}{x + 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 \left(\frac{e^x}{x^2} - 2 \right)}{x \left(1 + \frac{4}{x} \right)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x \left(\frac{e^x}{x^2} - 2 \right)}{1 + \frac{4}{x}}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{4}{x} = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\left(\frac{x}{2}\right)^2}}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left[\frac{e^{\frac{x}{2}}}{x} \right]^2$$

$$= \lim_{X \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^X}{2X} \right)^2 = +\infty \quad (X = \frac{x}{2}) \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - 2x^2}{x + 4} = +\infty$$

$$c) \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{1}{x}} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}} - 1}{\frac{1}{x}} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1$$

$$d) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^{x+2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 e^x e^2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^2 x^3 \left(e^{\frac{x}{3}} \right)^3$$

$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} e^2 (xe^{\frac{x}{3}})^3 = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^2 (3Xe^X)^3 = 0$$

$$e) \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n e^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \left(e^{\frac{x}{n}} \right)^n = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^{\frac{x}{n}})^n$$

$$= \lim_{X \rightarrow -\infty} (nXe^X)^n = \lim_{X \rightarrow -\infty} n^n (Xe^X)^n = 0 \quad (X = \frac{x}{n})$$

$$f) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{(x+1)^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(x+1)^3} + \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{(x+1)^3}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-x}}{(x+1)^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \frac{1}{(x+1)^3} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{(x+1)^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^3 (1 + \frac{1}{x})^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{\frac{x}{3}}}{x}\right)^3 \frac{1}{(1 + \frac{1}{x})^3} = +\infty$$

$$\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{e^{\frac{x}{3}}}{x}\right) = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{1}{3^3} \left(\frac{e^X}{X}\right)^3 = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{(1 + \frac{1}{x})^3} = 1$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x + e^{-x}}{(x+1)^3} = +\infty$$

$$\begin{aligned} g) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x + 1)}{x} &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x (1 + e^{-x}))}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln e^x}{x} + \frac{\ln(1 + e^{-x})}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{x} + \frac{\ln(1 + e^{-x})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{x} \cdot \ln(1 + e^{-x}) = 1 \end{aligned}$$

$$h) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x + 1) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x (1 + e^{-x})) - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^x) + \ln(1 + e^{-x}) - x$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} x + \ln(1 + e^{-x}) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(1 + e^{-x}) = 0$$

$$i) \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(e^x + e^{-x}) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(e^x (1 + e^{-2x}))$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(e^x)}{x} + \frac{\ln(1 + e^{-2x})}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{\ln(1 + e^{-2x})}{e^{-2x}} \cdot \frac{1}{xe^{2x}}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^{-2x})}{e^{-2x}} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 1 \quad (X = e^{-2x})$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{xe^{2x}} = 0 \quad \text{d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} \ln(e^x + e^{-x}) = 1.$$

$$j) \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})})$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow +\infty} x \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + \frac{1}{x})}{\frac{1}{x}}$$

$$= \lim_{X \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + X)}{X} = 1 \quad (X = \frac{1}{x})$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{x \ln(1 + \frac{1}{x})} = \lim_{t \rightarrow 1} e^t = e^1 = e \quad (t = x \ln(1 + \frac{1}{x}))$$

$$\Rightarrow \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \ln e = 1$$

k) Posons $X = e^x$. Lorsque $x \rightarrow +\infty$, $X \rightarrow +\infty$

$$\text{donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} \ln(1 + e^x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + e^x)}{e^x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln(1 + X)}{X}$$

$$= \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X (1 + \frac{1}{X})}{X} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} + \frac{\ln(1 + \frac{1}{X})}{X}$$

$$= \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{\ln X}{X} + \frac{1}{X} \ln\left(1 + \frac{1}{X}\right) = 0 + 0 \cdot 0 = 0$$

$$l) \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(xe^{\frac{x}{x^2-1}} - x) = ? ; \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{x}{x^2-1}} - 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2-1} \frac{e^{\frac{x}{x^2-1}} - 1}{\frac{x}{x^2-1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{x^2-1} = 1 ; \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{x^2-1}} - 1}{\frac{x}{x^2-1}} = \lim_{X \rightarrow 0} \frac{e^X - 1}{X} = 1 \quad (X = \frac{x}{x^2-1})$$

$$\text{d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(xe^{\frac{x}{x^2-1}} - x) = \lim_{t \rightarrow 1} \ln t = 0 \quad (t = xe^{\frac{x}{x^2-1}} - x).$$

Solution 2 :

1°/ • Montrons que $\forall x \in [0,1], 1+x+\frac{x^2}{2} \leq e^x$

Soit $h(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - x - 1$

h est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1], h'(x) = e^x - x - 1$

h' est dérivable sur $[0,1]$ et $\forall x \in [0,1], h''(x) = e^x - 1 \geq 0$

x	0	1
$h''(x)$		+
$h'(x)$	0	(+) $\nearrow$
$h(x)$	0	(+) $\nearrow$

D'après le tableau des variations de g , on a :

$\forall x \in [0,1], h(x) \geq 0$ d'où $\forall x \in [0,1], 1+x+\frac{x^2}{2} \leq e^x$

• Montrons que $\forall x \in [0,1], e^x \leq 1+x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}$

Pour cela considérons la fonction $k(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}$

$k'(x) = e^x - 1 - x - x^2$; $k''(x) = e^x - 1 - 2x$; $k^{(3)}(x) = e^x - 2$

on a : $e^x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 2 \Leftrightarrow x \geq \ln 2$

x	0	$\ln 2$	1
$k^{(3)}(x)$	-	0	+
$k''(x)$	0 $\searrow$	(-) $\nearrow$	$e-3$
$k'(x)$	0 $\searrow$	(-) $\searrow$	
$k(x)$	0 $\searrow$	(-) $\searrow$	

d'après le tableau des variations de k on a :

$$\forall x \in [0, 1], k(x) \leq 0 \text{ d'où } \forall x \in [0, 1], e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$\textbf{Conclusion : } \forall x \in [0, 1], 1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}.$$

2°/ • **Continuité de f à droite en 0 :**

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{e^x - 1} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} = 1 \text{ car } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

donc $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 = f(0)$ et par suite f est continue à droite en 0.

• **Dérivabilité de f à droite en 0 :**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{e^x - 1} - 1}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x - e^x + 1}{x(e^x - 1)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-(e^x - x - 1)}{x^2} \cdot \frac{1}{\frac{e^x - 1}{x}} \end{aligned}$$

$$\text{On a : } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1. \text{ Calculons } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-(e^x - x - 1)}{x^2}$$

$$\text{D'après 1°/ , } \forall x \in [0, 1], 1 + x + \frac{x^2}{2} \leq e^x \leq 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3}$$

$$\Rightarrow \frac{x^2}{2} \leq e^x - x - 1 \leq \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \Rightarrow -\frac{x}{3} - \frac{1}{2} \leq -\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \leq -\frac{1}{2}$$

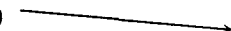
$$\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{x}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{-(e^x - x - 1)}{x^2} = -\frac{1}{2} \text{ et par suite}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x} = -\frac{1}{2}.$$

Conclusion : f est dérivable à droite en 0 et $f'_d(0) = -\frac{1}{2}$.

3°/ g est dérivable sur $[0, +\infty[$ et $\forall x \in [0, +\infty[$,

$$g'(x) = e^x - e^x(x+1) = -xe^x \leq 0$$

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		-
$g(x)$	0	

donc d'après le tableau des variations de g , on a : $\forall x \in [0, +\infty[$,
 $g(x) \leq 0$.

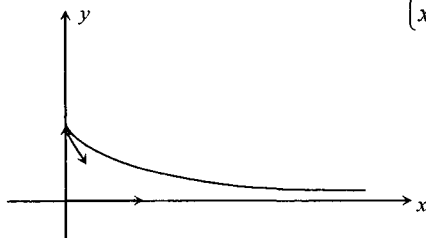
4°/ f est définie, continue et dérivable sur $[0, +\infty[$;

$$\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = \frac{e^x - 1 - xe^x}{(e^x - 1)^2} = \frac{g(x)}{(e^x - 1)^2} < 0$$

x	0	$+\infty$
$f'(x)$		-
$f(x)$	1	0

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\frac{e^x}{x} - \frac{1}{x}} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$$

- C_f admet une demi tangente T au point $x_0 = 0$, $T: \begin{cases} y = \frac{-1}{2}x + 1 \\ x > 0 \end{cases}$



Solution 3 :

1°/ • $\forall x \in \mathbf{R}$, $e^x + e^{-x} > 0$ d'où $e^x + e^{-x} \neq 0$ pour tout réel donc $D_f = \mathbf{R}$

$$\bullet -1 - f(x) = -1 - \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{-e^{-x} - e^{-x} - e^x + e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{-2e^x}{e^x + e^{-x}} < 0$$

d'où $\forall x \in \mathbf{R}$, $-1 < f(x)$.

$$\bullet f(x) - 1 = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} - 1 = \frac{e^x - e^{-x} - e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \frac{-2e^{-x}}{e^x + e^{-x}} < 0$$

d'où $\forall x \in \mathbf{R}$, $f(x) < 1$

Conclusion : $\forall x \in \mathbf{R}$, $-1 < f(x) < 1$.

2°/a) • $x \mapsto e^x - e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme somme de fonctions dérivables.

• $x \mapsto e^x + e^{-x}$ est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme somme de fonctions dérivables d'où f est dérivable sur $\mathbf{R}$ comme quotient de fonctions dérivables.

$$\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = \frac{(e^x + e^{-x})^2 - (e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = 1 - \frac{(e^x - e^{-x})^2}{(e^x + e^{-x})^2} = 1 - (f(x))^2$$

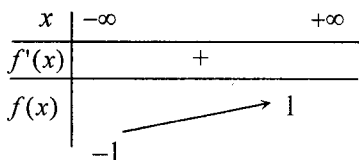
$$\text{b) On a : } -1 < f(x) < 1 \Rightarrow 0 \leq f^2(x) < 1 \Rightarrow 1 - f^2(x) > 0$$

d'où $\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) > 0$.

3°/ f est continue, dérivable sur $\mathbf{R}$ et $\forall x \in \mathbf{R}, f'(x) = 1 - f^2(x) > 0$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1} = -1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = 1$$



4°/ • f est continue, strictement croissante sur $\mathbf{R}$ donc f est une bijection de $\mathbf{R}$ sur $f(\mathbf{R}) =]-1, 1[$.

$$\bullet f^{-1} :]-1, 1[\rightarrow \mathbf{R}; x \mapsto f^{-1}(x) = y$$

$$f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x \Leftrightarrow \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}} = x \Leftrightarrow \frac{e^{2y} - 1}{e^{2y} + 1} = x \Leftrightarrow$$

$$e^{2y} - 1 = x e^{2y} + x \Leftrightarrow e^{2y}(1 - x) = x + 1 \Leftrightarrow e^{2y} = \frac{x + 1}{1 - x} \Leftrightarrow 2y = \text{Log}\left(\frac{x + 1}{1 - x}\right)$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2} \text{Log}\left(\frac{x + 1}{1 - x}\right)$$

$$\text{d'où } \forall x \in]-1, 1[, f^{-1}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{x + 1}{1 - x}\right).$$

$$5^\circ/\text{a) } T : y = f'(0) \cdot x + f(0)$$

$$\text{or } f(0) = 0 \text{ et } f'(0) = 1 - f^2(0) = 1 \text{ d'où } T : y = x.$$

b) $h(x) = f(x) - x$

h est dérivable sur $\mathbf{R}$; $h'(x) = f'(x) - 1 = 1 - f^2(x) - 1 = -f^2(x) \leq 0$

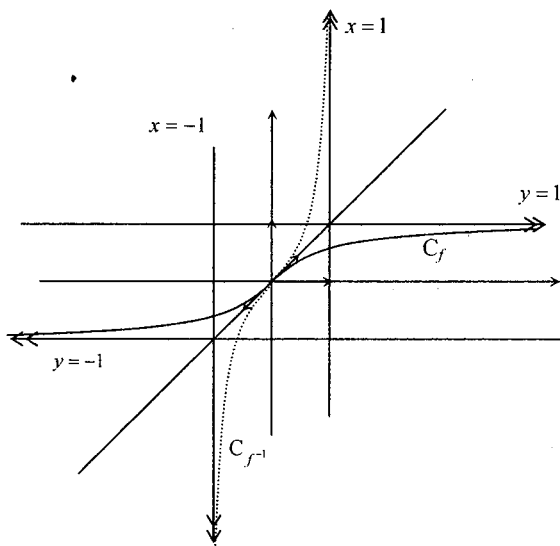
x		0	
$h'(x)$	-	0	-
$h(x)$	(+)	0	(-)

d'où C_f est au dessus de (T) sur $] -\infty, 0]$

C_f est au dessous de (T) sur $[0, +\infty [$

C_f coupe (T) en un seul point $O(0, 0)$

6°/



- $y=1$ et $y=-1$ sont des asymptotes horizontales à C_f .
- C_f^{-1} est le symétrique de C_f par rapport à la première bissectrice

$y=x$.

Solution 4 :

A) 1°/ h est continue, dérivable sur $\mathbf{R}$.

$\forall x \in \mathbf{R}, h'(x) = e^x - 1$

• $h'(x) = 0 \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = \ln 1 = 0$

$$\bullet h'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow x > \ln 1 = 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - x - 1 = +\infty \quad (\text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - 1 - \frac{1}{x} \right) = +\infty \quad (\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty)$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$h'(x)$	$-$	0	$+$
$h(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

2°/ D'après le tableau de variations de h on a : $h(\mathbf{R}) = \mathbf{R}_+$ d'où $\forall x \in \mathbf{R}$, $h(x) \geq 0$ et par conséquent $\forall x \in \mathbf{R}$, $e^x \geq x + 1$.

B) 1°/ • $x \mapsto e^x - 1$ est continue sur $\mathbf{R}$

• $x \mapsto x \cdot e^{2x}$ est continue sur $\mathbf{R}$

d'où g est continue sur $\mathbf{R}_+^*$ (quotient de deux fonctions continues)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x} \cdot \frac{1}{e^{2x}} = 1 = g(0)$$

d'où g est continue en $x_0 = 0$.

Conclusion : g est continue sur $\mathbf{R}_+$.

$$2^\circ/ e^{-2x} - g(x) = e^{-2x} - \frac{e^x - 1}{x \cdot e^{2x}} = \frac{e^{-2x}(xe^{2x}) - (e^x - 1)}{xe^{2x}} = \frac{x - e^x + 1}{xe^{2x}} = \frac{-h(x)}{xe^{2x}}$$

or $\forall x > 0$, $xe^{2x} > 0$ et $h(x) > 0$ d'où $\forall x > 0$ on a : $e^{-2x} - g(x) < 0$.

Conclusion : $\forall x > 0$, $e^{-2x} < g(x)$.

$$3^\circ/a) \forall x > 0, g'(x) = \frac{e^x(xe^{2x}) - (e^x - 1)(e^{2x} + 2xe^{2x})}{(xe^{2x})^2}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{xe^{3x} - e^{2x}(1+2x)(e^x - 1)}{x^2 e^{4x}} = \frac{e^{2x}[xe^x - (1+2x)(e^x - 1)]}{x^2 e^{4x}} \\
 &= \frac{xe^x - e^x + 1 - 2xe^x + 2x}{x^2 e^{2x}} = \frac{-xe^x - e^x + 1 + 2x}{x^2 e^{2x}} = \frac{1 + 2x - e^x(1+x)}{x^2 e^{2x}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{b) } g'(x) + e^{-2x} &= \frac{1 + 2x - e^x(1+x)}{x^2 e^{2x}} + e^{-2x} \\
 &= \frac{1 + 2x - e^x(1+x) + x^2 e^{2x} e^{-2x}}{x^2 e^{2x}} \\
 &= \frac{(x+1)^2 - e^x(x+1)}{x^2 e^{2x}} = \frac{(x+1)(x+1-e^x)}{x^2 e^{2x}} = \frac{-(x+1)h(x)}{x^2 e^{2x}}
 \end{aligned}$$

or $\forall x > 0$, $x+1 > 0$ et $h(x) > 0$ d'où $\forall x > 0$, $g'(x) < -e^{-2x}$.

$$4^\circ/\text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x(1-e^{-x})}{xe^{2x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1-e^{-x}}{xe^x}$$

or $\lim_{x \rightarrow +\infty} 1-e^{-x} = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} xe^x = +\infty$ d'où $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.

b) On a : $\forall x > 0$, $g'(x) < -e^{-2x} < 0$ (car $\forall x \in \mathbf{R}$, $e^{-2x} > 0$)

x	0	$+\infty$
$g'(x)$		-
$g(x)$	1	0

5°/ g est continue, strictement décroissante sur $\mathbf{R}_+$ donc g est une bijection de $\mathbf{R}_+$ sur $g(\mathbf{R}_+) =]0, 1]$.

Solution 5 :

$$1^\circ/\bullet \quad x \leq 0 \Rightarrow -x \geq 0 \Rightarrow 1-x \geq 1$$

d'où $\ln(1-x)$ est définie pour $x \leq 0$.

• $xe^{\frac{-1}{x}}$ est définie pour tout $x > 0$ d'où $D_f = \mathbf{R}$.

$$2^\circ/\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} xe^{\frac{-1}{x}} = 0 \quad (\text{car } \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{-1}{x}} = \lim_{X \rightarrow -\infty} e^X = 0)$$

$$\bullet \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \ln(1-x) = \ln 1 = 0$$

D'où : $\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 0 = f(0)$ d'où f est continue en $x_0 = 0$.

$$3^\circ/a) \bullet \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x e^{\frac{-1}{x}}}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} e^{\frac{-1}{x}} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{\ln(1-x)}{x} = \lim_{X \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+X)}{-X} = -1$$

(Soit $X = -x$, lorsque x tend vers 0, X tend vers 0^+)

d'où f n'est pas dérivable en 0 et en plus $f'_d(0) = 0$ et $f'_g(0) = -1$

b) C_f admet au point $O(0,0)$ deux demi-tangentes :

$$T_1 : \begin{cases} y = f'_g(0) \cdot (x-0) + f(0) \\ x \leq 0 \end{cases} \Rightarrow T_1 : \begin{cases} y = -x \\ x \leq 0 \end{cases}$$

$$T_2 : \begin{cases} y = f'_d(0) \cdot (x-0) + f(0) \\ x \geq 0 \end{cases} \Rightarrow T_2 : \begin{cases} y = 0 \\ x \geq 0 \end{cases}$$

$$4^\circ/a) \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{\frac{-1}{x}} = e^0 = 1$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x e^{\frac{-1}{x}} - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x(e^{\frac{-1}{x}} - 1) \text{ on pose } X = \frac{-1}{x}$$

$$= \lim_{X \rightarrow 0^-} \frac{-(e^X - 1)}{X} = -1$$

d'où $D : y = x - 1$ est une asymptote oblique à C_f au voisinage de $+\infty$.

$$b) \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1-x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1-x)}{(1-x)} \cdot \frac{(1-x)}{x} = 0$$

$$(\text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\ln(1-x)}{1-x} = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} = 0)$$

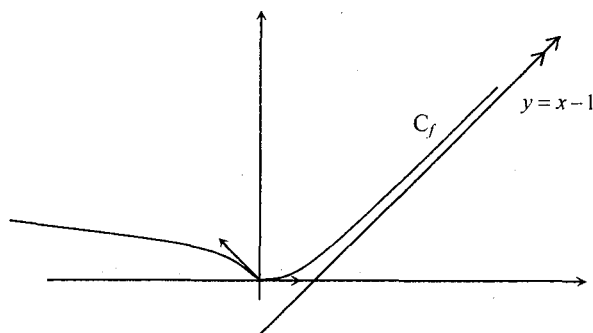
d'où C_f admet au voisinage de $-\infty$ une branche parabolique de direction $(x'Ox)$.

$$5^\circ/a) \bullet \forall x > 0, f'(x) = e^{\frac{-1}{x}} + x \cdot \left(\frac{1}{x^2}\right) e^{\frac{-1}{x}} = \left(1 + \frac{1}{x}\right) e^{\frac{-1}{x}} > 0$$

$$\bullet \forall x < 0, f'(x) = \frac{-1}{1-x} < 0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	$-$	$ $	$+$
$f(x)$	$+\infty$	0	$+\infty$

b)

**Solution 6 :**

1°/ • La fonction $x \rightarrow \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$ est continue sur $\mathbf{R}^*$ comme composée et quotient des fonctions continues sur $\mathbf{R}^*$.

• **Continuité de f en 0 :**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} f(x) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-\frac{1}{3x^2}}}{x} \right)^3 = \lim_{x \rightarrow 0} \left(-3x \cdot \left(\frac{-1}{3x^2} \right) \cdot e^{-\frac{1}{3x^2}} \right)^3 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (-3x)^3 \left(\left(\frac{-1}{3x^2} \right) \cdot e^{-\frac{1}{3x^2}} \right)^3 \end{aligned}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} (-3x)^3 = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0} \left(\left(\frac{-1}{3x^2} \right) \cdot e^{-\frac{1}{3x^2}} \right)^3 = \lim_{X \rightarrow -\infty} (X e^X)^3 = 0$$

$$(X = \frac{-1}{3x^2} ; \text{ si } x \rightarrow 0 \text{ alors } X \rightarrow -\infty)$$

d'où $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0 = f(0)$ et par suite f est continue en 0.

Conclusion : f est continue sur $\mathbf{R}$.

2°/ • La fonction $x \rightarrow \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3}$ est dérivable sur $\mathbf{R}^*$ comme composée et quotient des fonctions dérivables sur $\mathbf{R}^*$.

• **Dérivabilité de f en 0 :**

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^4} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{e^{-\frac{1}{4x^2}}}{x} \right)^4 \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} (-4x)^4 \left(-\frac{1}{4x^2} \cdot e^{-\frac{1}{4x^2}} \right)^4 = 0 \end{aligned}$$

car $\lim_{x \rightarrow 0} -\frac{1}{4x^2} \cdot e^{-\frac{1}{4x^2}} = \lim_{X \rightarrow -\infty} (X e^X) = 0$ et par suite f est dérivable en 0 et $f'(0) = 0$.

Conclusion : f est dérivable sur $\mathbf{R}$.

3°/ On remarque que f est une fonction impaire, il suffit de faire l'étude sur $]0, +\infty[$

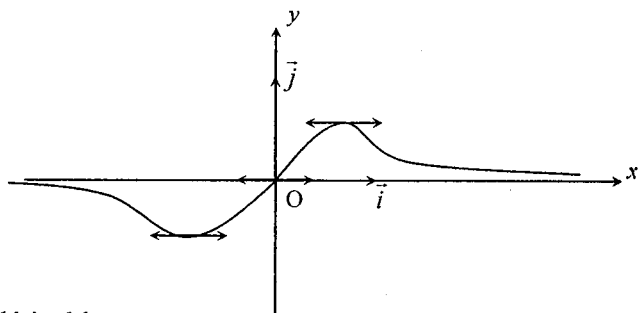
$$\forall x \in]0, +\infty[, f'(x) = \frac{\frac{2}{x^3} e^{-\frac{1}{x^2}} x^3 - 3x^2 e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^6} = \frac{e^{-\frac{1}{x^2}} (2 - 3x^2)}{x^6}$$

Le signe de $f'(x)$ est celui de $2 - 3x^2$.

x	0		$\sqrt{\frac{2}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$	0	+	0	-	
$f(x)$	0	↗ M ↘		↘ 0 ↗	

$$M = f\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{-\frac{1}{x^2}}}{x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = 0$$



4°/a) F est dérivable sur $[1, +\infty[$

$$\forall x \in [1, +\infty[, F'(x) = \frac{1}{x^3} \cdot e^{-\frac{1}{x^2}} = f(x)$$

• Soit $x \geq 1$; F est continue sur $[x, x+1]$ et dérivable sur $]x, x+1[$ donc d'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]x, x+1[$ tel que :

$$F'(c) = \frac{F(x+1) - F(x)}{x+1 - x} = F(x+1) - F(x) \Rightarrow f(c) = F(x+1) - F(x)$$

d'autre part on a : $x < c < x+1 \Rightarrow f(x+1) < f(c) < f(x)$ car f est strictement décroissante sur $[1, +\infty[$

d'où $f(x+1) \leq F(x+1) - F(x) \leq f(x)$

b) Pour tout entier $k \geq 1$ on a : d'après (*)

$$f(k+1) \leq F(k+1) - F(k) \leq f(k)$$

$$\forall n \in \mathbb{N}^* , \sum_{k=1}^n f(k+1) \leq \sum_{k=1}^n F(k+1) - \sum_{k=1}^n F(k) \leq \sum_{k=1}^n f(k) ;$$

$$\sum_{k=1}^n f(k+1) = f(2) + f(3) + \dots + f(n+1) = \sum_{k=2}^{n+1} f(k)$$

$$\text{d'où } \sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leq \sum_{k=2}^{n+1} F(k) - \sum_{k=1}^n F(k) \leq \sum_{k=1}^n f(k)$$

$$\text{Or } \sum_{k=2}^{n+1} F(k) - \sum_{k=1}^n F(k) = F(n+1) + \sum_{k=2}^n F(k) - F(1) - \sum_{k=2}^n F(k)$$

$$= F(n+1) - F(1) = \frac{e^{\frac{1}{(n+1)^2}} - e^{-1}}{2}$$

$$\text{d'où } \forall n \in \mathbf{N}^*, \sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leq \frac{e^{\frac{1}{(n+1)^2}} - e^{-1}}{2} \leq \sum_{k=1}^n f(k)$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbf{N}^* \quad \frac{e^{\frac{1}{(n+1)^2}} - e^{-1}}{2} \leq \sum_{k=1}^n f(k) \Rightarrow \frac{e^{\frac{1}{(n+1)^2}} - e^{-1}}{2n} \leq U_n$$

$$\bullet \text{ Montrons que } \forall n \in \mathbf{N}^* : U_n \leq \frac{e^{\frac{1}{n^2}} - e^{-1}}{2n}$$

$$\text{On a : } \forall n \in \mathbf{N}^*, \sum_{k=2}^{n+1} f(k) \leq \frac{e^{\frac{1}{(n+1)^2}} - e^{-1}}{2} \Rightarrow$$

$$\sum_{k=2}^n f(k) + f(n+1) \leq \frac{e^{\frac{1}{(n+1)^2}} + e^{-1}}{2}$$

$$\Rightarrow \forall n \in \mathbf{N}^*, \sum_{k=2}^n f(k) \leq \frac{e^{\frac{1}{n^2}} - e^{-1}}{2} \quad \text{car } f(n+1) > 0$$

$$\Rightarrow f(1) + \sum_{k=2}^n f(k) \leq \frac{e^{\frac{1}{n^2}} - e^{-1}}{2} + f(1)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^n f(k) \leq \frac{e^{\frac{1}{n^2}} - e^{-1}}{2} + e^{-1} \Rightarrow \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(k) \leq \frac{e^{\frac{1}{n^2}} + e^{-1}}{2n}$$

$$\text{d'où } \forall n \in \mathbf{N}^*, U_n \leq \frac{e^{\frac{1}{n^2}} + e^{-1}}{2n}.$$

$$\text{Conclusion : } \forall n \in \mathbf{N}^*, \frac{e^{\frac{1}{(n+1)^2}} - e^{-1}}{2n} \leq U_n \leq \frac{e^{\frac{1}{n^2}} + e^{-1}}{2n}.$$

• On a : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{-1}{(n+1)^2}} - e^{-1}}{2n} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} (e^{\frac{-1}{(n+1)^2}} - e^{-1}) = 0$

car $\lim_{n \rightarrow +\infty} e^{\frac{-1}{(n+1)^2}} = e^0 = 1$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2n} = 0$

de même $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{-1}{n^2}} - e^{-1}}{2n} = 0$ d'où $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$.

Conclusion : La suite (U_n) converge vers 0.

Solution 7 :

1°/a) f est définie, continue et dérivable sur $[0, 1]$

$$\forall x \in [0, 1], f'(x) = \frac{e^x(x+2) - e^x}{(x+2)^2} = \frac{e^x(x+1)}{(x+2)^2} > 0$$

x	0	1
$f'(x)$		+
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{e}{3}$

b) f' est dérivable sur $[0, 1]$ et $\forall x \in [0, 1]$,

$$\begin{aligned} f''(x) &= \frac{(x+2)^2 e^x(x+2) - 2(x+2)e^x(x+1)}{(x+2)^4} \\ &= \frac{e^x(x^2 + 2x + 2)}{(x+2)^3} > 0 \text{ pour tout } x \in [0, 1] \end{aligned}$$

donc f' est strictement croissante sur $[0, 1]$ et par suite

$$\forall x \in [0, 1], 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow f'(0) \leq f'(x) \leq f'(1)$$

$$f'(0) = \frac{1}{4} \text{ et } f'(1) = \frac{2e}{9} < \frac{2}{3}$$

Conclusion : $\forall x \in [0, 1], \frac{1}{4} \leq f'(x) \leq \frac{2}{3}$

2°/ $g(x) = f(x) - x$. Etudions les variations de g .

g est dérivable sur $[0, 1]$, $\forall x \in [0, 1]$, $g'(x) = f'(x) - 1$

or $\forall x \in [0, 1]$, $f'(x) \leq \frac{2}{3} \Rightarrow f'(x) - 1 \leq -\frac{1}{3}$ donc

$\forall x \in [0, 1]$, $g'(x) < 0$.

g est continue et strictement décroissante sur $[0, 1]$ donc g est une

bijection de $[0, 1]$ sur $g([0, 1]) = [g(1), g(0)] = [\frac{e}{3} - 1, \frac{1}{2}]$ d'où 0 admet

un seul antécédent $a \in [0, 1]$ par g .

Conclusion : L'équation $f(x) = x$ admet une seule solution $a \in [0, 1]$.

3°/a) Montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq U_n \leq 1$

• pour $n = 0$, $U_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow 0 \leq U_0 \leq 1$

• supposons que pour un entier donné n , $0 \leq U_n \leq 1$ et montrons que $0 \leq U_{n+1} \leq 1$. On a : $0 \leq U_n \leq 1 \Rightarrow f(0) \leq f(U_n) \leq f(1)$ car f est strictement croissante sur $[0, 1]$.

$f(0) = \frac{1}{2} > 0$ et $f(U_n) = U_{n+1}$ et $f(1) = \frac{e}{3} < 1$ d'où $0 \leq U_{n+1} \leq 1$.

Conclusion : $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leq U_n \leq 1$.

$$\text{b) } \begin{cases} f \text{ est dérivable sur } [0, 1] \\ \forall x \in [0, 1], |f'(x)| \leq \frac{2}{3} \\ \forall n \in \mathbb{N}, U_n \in [0, 1] \text{ et } a \in [0, 1] \end{cases}$$

donc d'après le théorème des inégalités des accroissements finis :

$$\forall n \in \mathbb{N}, |f(U_n) - f(a)| \leq \frac{2}{3} |U_n - a|$$

or $f(U_n) = U_{n+1}$ et $f(a) = a \Rightarrow |U_{n+1} - a| \leq \frac{2}{3} |U_n - a|$

$$\text{c) On a : } |U_1 - a| \leq \frac{2}{3} |U_0 - a|$$

$$|U_2 - a| \leq \frac{2}{3} |U_1 - a| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^2 |U_0 - a|$$

$$|U_3 - a| \leq \frac{2}{3} |U_2 - a| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^3 |U_0 - a|$$

On constate alors que pour $n \in \mathbf{N}$, $|U_n - a| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |U_0 - a|$

Montrons ce résultat par récurrence :

• pour $n = 0$, $|U_0 - a| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^0 |U_0 - a|$

• supposons que pour un entier n donné, $|U_n - a| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |U_0 - a|$ et

montrons que $|U_{n+1} - a| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} |U_0 - a|$

On a : $|U_{n+1} - a| \leq \frac{2}{3} |U_n - a| \leq \left(\frac{2}{3}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^n |U_0 - a| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} |U_0 - a|$

D'où $\forall n \in \mathbf{N}$, $|U_n - a| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |U_0 - a|$ et comme $-1 < \frac{2}{3} < 1$ alors

$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n |U_0 - a| = 0$ ce qui prouve que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = a$.

d) On a : $\forall n \in \mathbf{N}$, $|U_n - a| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n |U_0 - a| \leq \left(\frac{2}{3}\right)^n$

car $|U_0 - a| = \left|\frac{1}{2} - a\right| < 1$ ($a \in [0, 1]$) donc il suffit de trouver le plus petit

entier n_0 tel que $\forall n \geq n_0$, $\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 10^{-3}$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq 10^{-3} \Rightarrow \ln\left(\frac{2}{3}\right)^n \leq \ln(10^{-3}) \Rightarrow n \ln\left(\frac{2}{3}\right) \leq \ln(10^{-3})$$

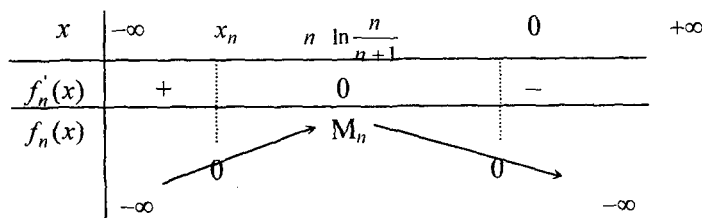
$$\Rightarrow n \geq \frac{\ln(10^{-3})}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)} \quad (\text{car } \ln\left(\frac{2}{3}\right) < 0) \quad \text{d'où } n_0 = E\left(\frac{\ln(10^{-3})}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}\right) + 1 = 18.$$

Solution 8 :

A) 1°/ a) Pour tout entier $n \geq 2$, f_n est définie, continue et dérivable sur $\mathbf{R}$.

$$\forall x \in \mathbf{R}, f'_n(x) = \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n} e^{\frac{x}{n}}$$

$$f'_n(x) \geq 0 \Leftrightarrow \frac{1}{n+1} \geq \frac{1}{n} e^{\frac{x}{n}} \Leftrightarrow \frac{n}{n+1} \geq e^{\frac{x}{n}} \Leftrightarrow \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) \geq \frac{x}{n} \Leftrightarrow n \ln \frac{n}{n+1} \geq x$$



$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{x}{n+1} + e^{\frac{x}{n}} = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\frac{x}{n}} = 0$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{x}{n+1} - e^{\frac{x}{n}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{x}{n} \left(\frac{n}{n+1} - \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} \right) = -\infty$$

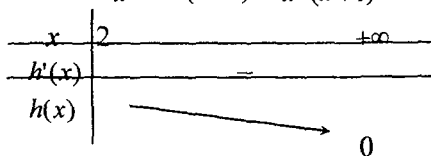
$$\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{n} = +\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\frac{x}{n}}}{\frac{x}{n}} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{X} = +\infty \quad (X = \frac{x}{n})$$

b) D'après le tableau des variations de f_n , $M_n = f_n\left(n \ln\left(\frac{n}{n+1}\right)\right)$ est un maximum de f_n .

$$\begin{aligned} f_n\left(n \ln \frac{n}{n+1}\right) &= 1 + \frac{n}{n+1} \ln \frac{n}{n+1} - e^{\ln \frac{n}{n+1}} \\ &= 1 + \frac{n}{n+1} \ln\left(\frac{n}{n+1}\right) - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1} \ln \frac{n}{n+1} \\ &= \frac{n}{n+1} \left(\frac{1}{n} + \ln \frac{n}{n+1} \right) \end{aligned}$$

Montrons que $\forall n \geq 2$, $\frac{1}{n} + \ln \frac{n}{n+1} > 0$. Soit $h(x) = \frac{1}{x} + \ln \frac{x}{x+1}$

$$h'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x(x+1)} = \frac{-1}{x^2(x+1)} < 0$$



d'après le tableau des variations de h , $\forall x \in [2, +\infty[$, $h(x) > 0$

d'où $\forall n \geq 2$, $\frac{1}{n} + \ln \frac{n}{n+1} > 0$ et par suite $f_n(n \ln(\frac{n}{n+1})) > 0$.

2°/a) On a : $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) - (1 + \frac{x}{n+1}) = \lim_{x \rightarrow -\infty} -e^{\frac{x}{n+1}} = 0$ donc la droite

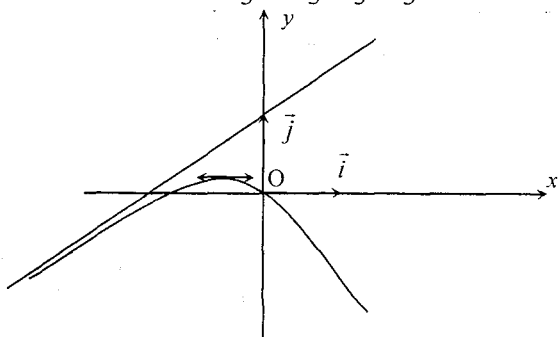
$D_n : y = \frac{1}{n+1}x + 1$ est une asymptote oblique à C_{f_n} au voisinage de $-\infty$.

b) On a $D_2 : y = \frac{1}{3}x + 1$ est une asymptote oblique à C_2 au voisinage de $-\infty$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f_2(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} + \frac{1}{3} - \frac{e^{\frac{x}{2}}}{x} = -\infty$$

donc la droite (yy') est une direction asymptotique à C_2 au voisinage de $+\infty$

Le maximum de f_2 est $f_2(2 \ln(\frac{2}{3})) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \ln \frac{2}{3}$



3°/a) f_n est continue et strictement croissante sur

$] -\infty, n \ln \frac{n}{n+1}]$ donc f_n réalise une bijection de

$] -\infty, n \ln \frac{n}{n+1}]$ sur $] -\infty, f_n(n \ln \frac{n}{n+1})]$

Or $f_n(n \ln \frac{1}{n+1}) > 0$

donc 0 admet un seul antécédent $x_n \in] -\infty, n \ln \frac{n}{n+1}]$ par f_n .

Montrons que l'équation $f_n(x) = 0$ n'admet pas de solution sur

$$\left[n \ln \frac{n}{n+1}, 0 \right].$$

On a pour tout $x \in \left[n \ln \frac{n}{n+1}, 0 \right]$, $n \ln \left(\frac{n}{n+1} \right) \leq x < 0 \Rightarrow$

$f_n(0) < f_n(x) \leq f_n\left(n \ln \left(\frac{n}{n+1} \right)\right)$ car f_n est strictement décroissante sur

$\left[\ln \frac{n}{n+1}, 0 \right]$. Or $f_n(0) = 0$ donc $f_n(x) > 0$.

Conclusion : L'équation $f_n(x) = 0$ admet une seule solution x_n dans $] -\infty, 0[$.

B) 1°/ φ est dérivable sur $]1, +\infty[$ et $\forall x \in]1, +\infty[$, on a :

$$\varphi'(x) = \frac{-2}{x^2} + \frac{2}{x^2 - 1} = \frac{2}{x^2(x^2 - 1)} > 0$$

x	1	$+\infty$
$\varphi'(x)$		+
$\varphi(x)$		0

d'après le tableau des variations de φ , on a : $\forall x > 1$, $\varphi(x) < 0$.

$$2^\circ/a) f_n(-2) = \frac{n-1}{n+1} - e^{\frac{-2}{n}}$$

$$\text{On a : } \forall n \geq 2, \varphi(n) < 0 \Rightarrow \frac{2}{n} + \ln \frac{n-1}{n+1} < 0 \Rightarrow \ln \frac{n-1}{n+1} < \frac{-2}{n}$$

$$\Rightarrow \frac{n-1}{n+1} < e^{\frac{-2}{n}} \Rightarrow \frac{n-1}{n+1} - e^{\frac{-2}{n}} < 0 \Rightarrow f_n(-2) < 0.$$

b) On a d'après le tableau des variations de f_n

x	x_n	0	$+\infty$
$f_n(x)$	-	0	-

$$\begin{cases} f_n(x) < 0 \\ x < 0 \end{cases} \Leftrightarrow x < x_n \text{ et comme } f_n(-2) < 0 \text{ donc } -2 < x_n.$$