

 Exercice 1

- 1- Soit (E) l'équation différentielle $y' + 2y = 0$ où y est une fonction numérique définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.
 - a) Résoudre l'équation (E).
 - b) Déterminer la solution f de (E) telle que $f(0) = 1$.
- 2- a) Calculer la valeur moyenne de f sur $[0 ; 10]$.
 b) Déterminer, en fonction de n , la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[n ; n + 1]$.
- 3- Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}) e^{-2n}$ pour tout n entier naturel positif ou nul.
 - a) Calculer la valeur exacte de u_0, u_1 et u_2 .
 - b) Démontrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.
 - c) Déterminer la valeur exacte de la somme $u_0 + u_1 + \dots + u_9$.

 Exercice 2

On considère l'équation différentielle (E): $y' - y = -(x - 1)^2$.

- 1- Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = ax^2 + bx + c$.
 Déterminer les réels a, b et c pour que g soit une solution de l'équation (E).
- 2- Déterminer les solutions de l'équation différentielle (E_0) : $y' - y = 0$.
- 3- Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $(f - g)$ est une solution de (E_0) .
- 4- Déterminer alors les solutions de (E).

 Exercice 3

On se propose de résoudre l'équation différentielle (E): $y' - y = \frac{e^{2x}}{1 + e^x}$.

- 1- Déterminer la solution de l'équation $y' - y = 0$ qui prend la valeur 1 en 0.
- 2- Soit f et g deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$ tel que $f(0) = \ln 2$ et $f(x) = e^x g(x)$.
 - a) Calculer $g(0)$.
 - b) Calculer $f'(x)$ en fonction de $g'(x)$ et de $g(x)$.
- 3- a) Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $g'(x) = \frac{e^x}{1 + e^x}$.
 b) En déduire l'expression de g puis celle de f de telle sorte que f soit solution de (E).

 Exercice 4

On considère les équations différentielles (E_0) : $(1 + e^x)y' - y = 0$ et (E): $(1 + e^x)y' - y = e^{2x}$.

- 1- Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \frac{e^{2x}}{1 + e^x}$. Montrer que g est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$.
- 2- Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
 Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $(f - g)$ est une solution de (E_0) .
- 3- On pose $z = (1 + e^x)y$.
 - a) Montrer que si y est une solution de (E) sur $\mathbb{R}$ alors z est une solution d'une équation différentielle (E') que l'on précisera.
 - b) En déduire que les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions f définies par :

$$f(x) = \frac{ke^x + e^{2x}}{1 + e^x}; k \in \mathbb{R}$$

- 4- Soit la fonction f définie par : $f(x) = \frac{e^{2x} - 3e^x}{1 + e^x}$. Étudier les variations de f .
- 5- Soit h la restriction de f à l'intervalle $[0, +\infty[$.
 - a) Montrer que h réalise une bijection de $[0, +\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.
 - b) Soit h^{-1} la fonction réciproque de h . Expliciter $h^{-1}(x)$ pour tout $x \in J$.
- 6- a) Tracer dans le même repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ les courbes de f et de h^{-1} .
 b) Calculer $\int_{-1}^0 \ln(3+x + \sqrt{x^2 + 10x + 9}) dx$.

Exercice 5

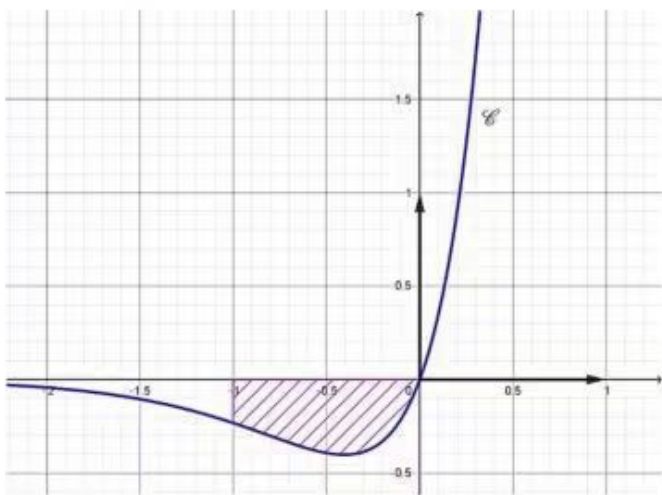
Soit l'équation différentielle $(E): y' - y = 4 \cos x$.

- 1- Résoudre l'équation différentielle $(E'): y' - y = 0$.
- 2- Soit $g(x) = a \cos x + b \sin x$. Déterminer les réels a et b tel que g soit solution de (E) .
- 3- Montrer que f est solution de (E) si et seulement si $(f - g)$ est solution de (E') .
- 4- En déduire les solutions de (E) .

Exercice 6

On considère les équations différentielles $(E_0): y' - 3y = 0$ et $(E): y' - 3y = e^{2x+1}$ et la courbe ζ ci-contre d'une solution f de (E) définie sur $\mathbb{R}$.

- 1- Résoudre l'équation (E_0) .
- 2- Vérifier que la fonction g définie par $g(x) = -e^{2x+1}$ est une solution de (E) .
- 3- Montrer que f est une solution de (E) si et seulement si $(f - g)$ est une solution de (E_0) .
- 4- En déduire les solutions de (E) .
- 5- a) Expliciter alors $f(x)$.
 b) Calculer l'aire de la partie du plan hachurée sur la figure.



Exercice 7

- 1- Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$.
- 2- Soit E l'ensemble des fonctions définies et deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) + f\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = 0$.
 - a) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = \cos x$. Vérifier que g est un élément de E .
 - b) Soit f un élément de E . vérifier que $f''(x) = f'\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.
 - c) En déduire que si f est un élément de E alors f est une solution de l'équation différentielle $y'' + y = 0$.
 - d) Déterminer alors l'ensemble E .

 Exercice 8

- 1- Résoudre l'équation différentielle : $(E) \ 9y'' + \pi^2 y = 0$
- 2- On désigne par f la solution particulière de (E) dont la courbe représentative, dans un plan muni d'un repère orthonormé, passe par le point $P(1, -\sqrt{2})$ et admet en ce point une tangente parallèle à l'axe des abscisses. Déterminer f .
- 3- Vérifier que, pour tout nombre réel x , $f(x) = \sqrt{2} \cos\left[\frac{\pi}{3}(x+2)\right]$
- 4- Calculer la valeur moyenne de f sur l'intervalle $[-2, -1]$

 Exercice 9

- 1- Résoudre les équations différentielles $(E): y' + y \ln 2 = \ln 2$ et $(E'): y'' + \pi^2 y = 0$.
- 2- On donne ci-dessous les représentations graphiques de deux fonctions f et g solutions des équations (E) et (E') . Expliciter $f(x)$ et $g(x)$.
- 3- Calculer l'aire de la partie du plan colorée sur la figure 1.

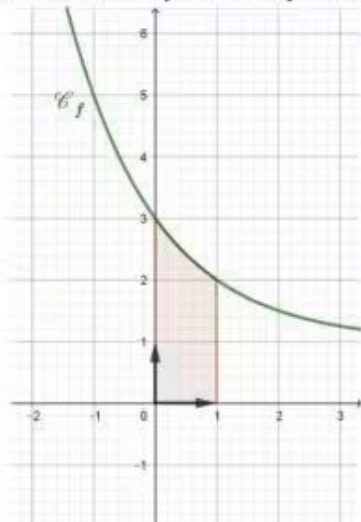


Figure 1

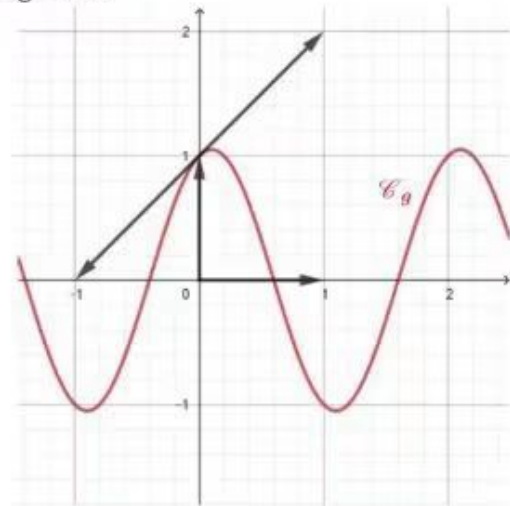


Figure 2

 Exercice 10

- 1- a) Résoudre l'équation différentielle $y'' + y = 0$.
b) Déterminer la solution particulière f qui vérifie $f(0) = 1$ et $f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$.
- 2- Dans le plan rapporté au repère orthonormé $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère le domaine D limité par la courbe de f , l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite parallèle à l'axe des ordonnées passant par le point de coordonnées $\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$.
a) Montrer que pour tout réel x , on a : $[f(x)]^2 = 1 + \sin 2x$.
b) Calculer le volume V , engendré par la rotation au tour de l'axe des abscisses du domaine D .

 Problème

I- On donne un entier naturel n strictement positif, et on considère l'équation différentielle :

$$(E_n): y' + y = \frac{x^n}{n!} e^{-x}$$

1- Soit deux fonctions g et h , définies et dérivables sur $\mathbb{R}$ et vérifient pour tout réel x :
 $g(x) = h(x)e^{-x}$.

a) Montrer que g est solution de (E_n) si et seulement si, pour tout réel x , $h'(x) = \frac{x^n}{n!}$.

b) En déduire la fonction h associée à une solution g de (E_n) , sachant que $h(0) = 0$.
 Quelle est alors la fonction g ?

2- Soit φ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que φ est une solution de (E_n) si et seulement si $(\varphi - g)$ est solution de l'équation $(F): y' + y = 0$

b) Résoudre (F) .

c) Déterminer la solution générale φ de l'équation (E_n) .

d) Déterminer la solution f de l'équation (E_n) vérifiant $f(0) = 0$.

II-

1- On pose, pour tout réel x , $f_0(x) = e^{-x}$ et $f_1(x) = xe^{-x}$.

a) Vérifier que f_1 est solution de l'équation différentielle $y' + y = f_0$.

b) Pour tout entier strictement positif n , on définit la fonction f_n comme la solution de l'équation différentielle $y' + y = f_{n-1}$ vérifiant $f_n(0) = 0$.

En utilisant la partie I, montrer par récurrence que, pour tout réel x et pour tout entier

$$n \geq 1 : f_n(x) = \frac{x^n}{n!} e^{-x}.$$

2- Pour tout entier naturel n , on pose $I_n = \int_0^1 f_n(x) dx$ (on ne cherchera pas à calculer I_n).

a) Montrer, pour tout entier naturel n et pour tout $x \in [0, 1] : 0 \leq f_n(x) \leq \frac{x^n}{n!}$.

En déduire que $0 \leq I_n \leq \frac{1}{(n+1)!}$, puis déterminer $\lim I_n$.

b) Montrer, pour tout entier naturel k non nul : $I_k - I_{k-1} = \frac{-1}{k!} e^{-1}$.

c) Calculer I_0 et déduire de ce qui précède que $I_n = 1 - \sum_{k=0}^n \frac{e^{-1}}{k!}$.

d) En déduire : $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} = e$.