Sujets Baccalauréat Tunisie

Matière: Mathématiques
Section: Economie
Session principale+Contrôle+Corrigé
2020-2015

Télécharger
Sujets Bac 209-2011 toutes sections

http://bit.ly/2Mrz8Ly

Télécharger ce document +autres titres
section economie

http://bit.ly/3dOTSYR

Bac economie gestion

Page No.

math **I**

1 sp2020 2
2 sp2019 5
3 sp-c2019 9
4 sc2019 14
5 sc-c2019 17
6 sp2018 21
7 sp-c2018 24
8 sc2018 30
9 sc-c2018 34
10 sp2017 39
11 sp-c2017 42
12 sc2017 45
13 sc-c2017 48
14 sp2016 50
15 sp-c2016 53
16 sc2016 58
17 sc-c2016 62
18 sp2015 67
19 sp-c2015 70
20 sc2015 75
21 sc-c2015 77

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2020	**Session principale**	
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Économie et Gestion**
	Durée : **2h**	Coefficient de l'épreuve: **2**

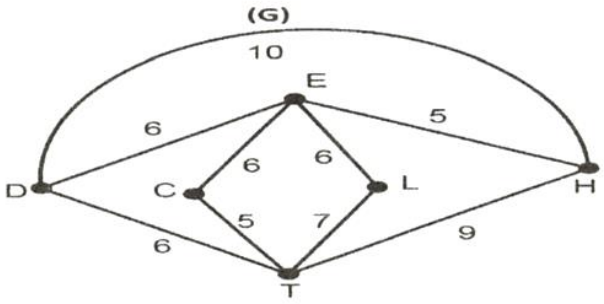
ꕥ ꕥ ꕥ ꕥ ꕥ ꕥ

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.

Exercice 1: (5 points)

Un médecin part quotidiennement de son domicile **D** pour amener ses deux filles ; l'une à son école **E** et l'autre au collège **C**, son enfant au lycée **L** et sa femme à son lieu de travail **T** avant de rejoindre son travail à l'hôpital **H** à 8 heures du matin.

Le graphe pondéré **(G)** ci-dessous représente le réseau routier tenant compte du temps de parcours (**en minutes**).



1) Justifier que le graphe **(G)** est connexe.

2) a) Recopier et compléter le tableau suivant :

sommet	C	D	E	H	L	T
degré						

b) Montrer que le graphe **(G)** n'admet pas un cycle eulérien.

c) Prouver que **(G)** admet une chaine eulérienne et donner un exemple.

3) Déterminer la matrice associée au graphe **(G)** en respectant l'ordre **C-D-E-H-L-T.**

4) Si le médecin part de son domicile à 7heures et 25 minutes, en empruntant chaque route de son parcours une seule fois , peut-il arriver à l'heure à son travail ? Expliquer.

Exercice 2 : (5 points)

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 7 \\ 3 & 3 & 5 \\ 6 & 5 & 9 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & -10 & 4 \\ 3 & -6 & 1 \\ -3 & 10 & -3 \end{pmatrix}$.

1) a) Calculer le déterminant de la matrice A et déduire qu'elle est inversible.

b) Déterminer la matrice A x B, en déduire la matrice A^{-1} inverse de A.

2) Un menuisier fabrique des argentières suivant trois modèles.

La conception de chaque modèle nécessite le passage par trois postes de travail.

Les coûts unitaires de fabrication sont : 500 dinars pour le modèle1, 350 dinars pour le modèle2 et 650 dinars pour le modèle3.

Le tableau suivant indique le nombre d'heures nécessaires par poste pour la fabrication d'une argentière de chaque modèle.

Poste / Modèle	Poste p_1	Poste p_2	Poste p_3
Modèle1	8 heures	10 heures	14 heures
Modèle2	6 heures	6 heures	10 heures
Modèle3	12 heures	10 heures	18 heures

Soient x, y et z les coûts horaires respectifs par postes p_1, p_2 et p_3.

a) Montrer que la situation se traduit par le système (S) : $\begin{cases} 4x+5y+7z=250 \\ 3x+3y+5z=175 \\ 6x+5y+9z=325 \end{cases}$

b) Donner l'écriture matricielle de (*S*).

c) Résoudre alors le système (S).

Exercice3 : (4 points)

On considère la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{3u_n+2}{u_n+4} ; n \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1) a) Vérifier que pour tout entier naturel n on a : $u_{n+1} - 1 = \dfrac{2(u_n-1)}{u_n+4}$.

b) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n *on a* : $0 \le u_n \le 1$.

c) Vérifier que : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{(u_n+2)(1-u_n)}{u_n+4}$ et déduire que la suite (u_n) est Croissante.

d) Justifier que la suite (u_n) est convergente.

2) Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $v_n = \dfrac{(u_n-1)}{u_n+2}$, pour tout entier naturel n.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{5}$.

b) Exprimer v_n en fonction de n et prouver que pour tout entier naturel n, on a :

$$u_n = \frac{2 - 2(\frac{2}{5})^n}{2 + (\frac{2}{5})^n}$$

c) Calculer alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice n°4 : (6 points)

Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par : $f(x) = (x + 1)e^{-x}$

1) a) Montrer que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, on a : $f(x) = \frac{x}{e^x} + \frac{1}{e^x}$

b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) a) Montrer que, pour tout $x \in [0, +\infty[$, $f'(x) = -xe^{-x}$

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que l'équation $f(x) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution $\alpha \in [0, +\infty[$.

(On prendra α =1,7).

3) On note g la fonction définie sur $[0, +\infty[$, par: $g(x) = -(x + 2)e^{-x}$.

a) Montrer que g est une primitive de f sur $[0, +\infty[$.

b) montrer que valeur moyenne de la fonction f sur l'intervalle $[1,4]$ est $\overline{f} = \frac{e^3 - 2}{e^4}$.

4) Une entreprise produit chaque jour x milliers de pièces avec $x \in [1,4]$.

Le prix de revient d'une pièce, en dinars, est égal à $f(x)$.

a) Calculer le prix de revient moyen à 10^{-3} prés d'une pièce pour une production entre 1000 et 4000 pièces.

b) A-partir de quelle quantité de pièces produites, le prix de revient d'une pièce est inférieur à 0,5 dinars?

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE **MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION** **EXAMEN DU BACCALAURÉAT** SESSION **2019**	**Session principale**	
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Économie et Gestion**
	Durée : **2h**	Coefficient de l'épreuve: **2**

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

La page 4 / 4 est à rendre avec la copie

Exercice 1 :(4,5 points)

On donne les matrices $A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $I_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1) a) Calculer le déterminant de A et déduire que la matrice A est inversible.

b) Calculer la matrice A x $(B-2I_3)$ puis déduire la matrice inverse de A.

2) Soit dans $\mathbb{R}^3$ le système (S) : $\begin{cases} 4x-2y+6z=1 \\ 3x-y+5z=2 \\ -x+y-3z=1 \end{cases}$

a) Existe-t-il un réel α pour que le triplet (α, α,0) soit une solution de (S) ? Justifier votre réponse.

b) Montrer que :

(a,b,c) est solution de (S) si et seulement si $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) Résoudre alors dans $\mathbb{R}^3$ le système (S).

Exercice 2 : (4,5 points)

Dans le tableau suivant on donne l'évolution du prix moyen (**en millimes**) d'un litre d'essence sans plomb entre les années 2009 et 2017.

année	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Prix moyen y_i	1270	1320	1370	1420	1490	1570	1640	1670	1750

1) a) Représenter le nuage de points de la série statistique $(x_i ; y_i)$ dans l'annexe ci-jointe.

b) Justifier que ce nuage permet d'envisager un ajustement affine.

c) Calculer les coordonnées du point moyen G de ce nuage et le placer.

2) a) Déterminer par la méthode des moindres carrées une équation cartésienne de la droite de régression D de y en x.

b) Tracer la droite D.

c) En utilisant cet ajustement, estimer le prix moyen d'un litre d'essence sans plomb pour l'année 2023.

Exercice 3 : (6 points)

Soit la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=(x-1)\ln x$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis vérifier que $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

2) Justifier que f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que $f'(x)=\ln x+\dfrac{x-1}{x}$ pour tout $x\in]0,+\infty[$.

3) a) Montrer que $\ln x$ et $\dfrac{x-1}{x}$ sont de même signe sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

b) Dresser alors le tableau de variations de f.

4) Tracer la courbe (C).

5) Soit la fonction F définie sur $]0,+\infty[$ par $F(x)=(\dfrac{x^2}{2}-x)\ln x-\dfrac{x^2}{4}+x$.

a) Montrer que F est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

b) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=1$ et $x=e$.

Exercice 4 : (5points)

Soit la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 0, \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{1+u_n} \text{ pour tout n} \in \mathbb{N}. \end{cases}$

1) a) Calculer u_1 et u_2 et en déduire que la suite (u_n) n'est pas monotone.

b) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_n \leq 2$.

2) Soit la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est géométrique de raison $-\dfrac{1}{2}$ et déterminer $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \dfrac{1+2v_n}{1-v_n}$.

c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.

Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....

Nom et Prénom : .....

Date et lieu de naissance : .....

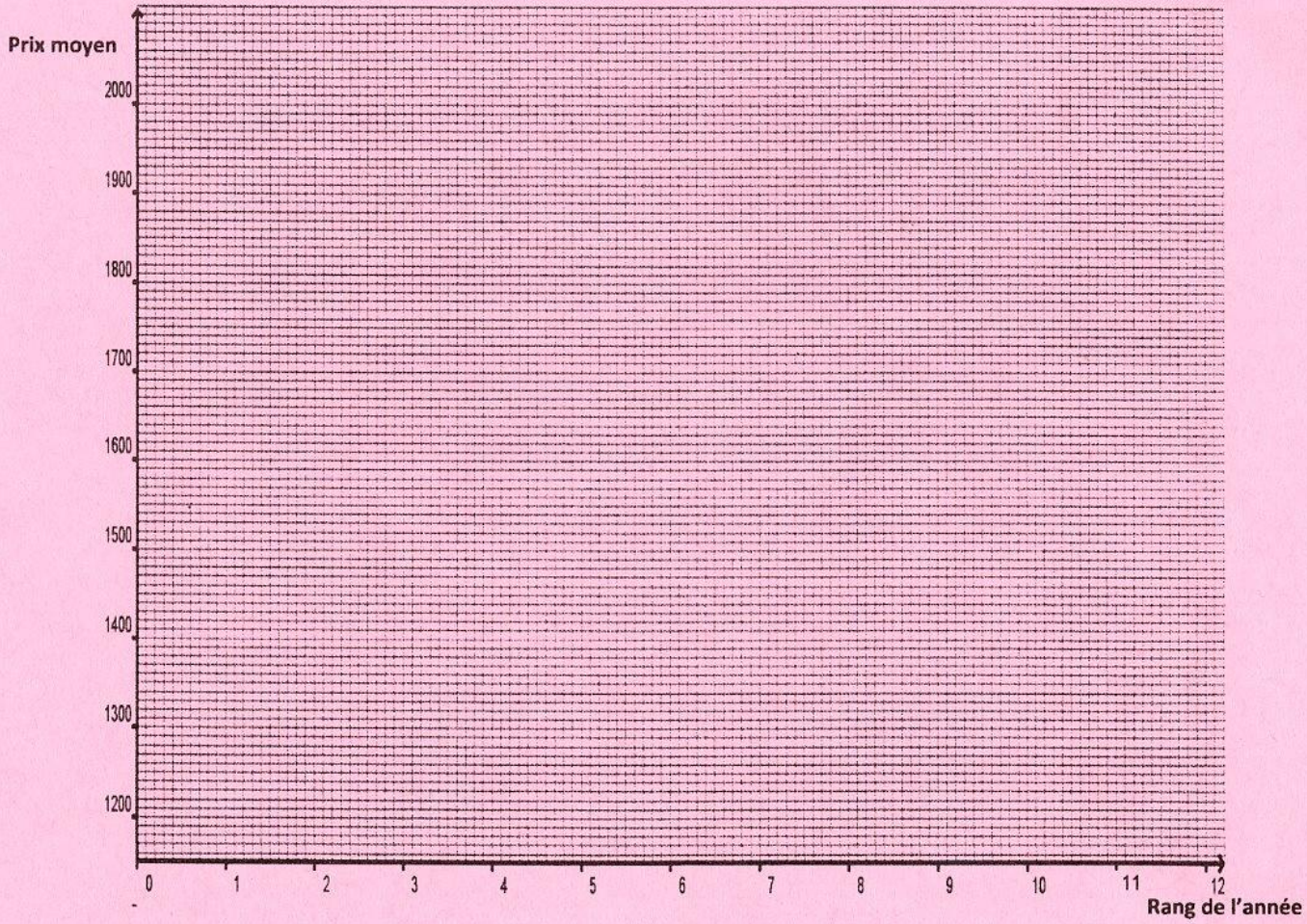
Signatures des surveillants

.....

.....

Épreuve: Mathématiques - Section : Économie et Gestion
Session principale (2019)

Annexe à rendre avec la copie



Exercice 1 : **(4,5 points)**

1) a) $det(A) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 4\begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} - (-2)\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -3 \end{vmatrix} + 6\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}$

$= 4 \times (-2) + 2 \times (-4) + 6 \times 2$

$= -4$

Comme $det(A) \neq 0$, alors la matrice A est inversible.

b)$B - 2I_3 = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 2 \\ -2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$A(B - 2I_3) = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 2I_3$

$A(B - 2I_3) = 2I_3 \Leftrightarrow A \times \frac{1}{2}(B - 2I_3) = I_3$

Donc $A^{-1} = \frac{1}{2}(B - 2I_3) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$

2) a) $(\alpha, \alpha, 0)$ est une solution de $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 4\alpha - 2\alpha = 1 \\ 3\alpha - \alpha = 2 \\ -\alpha + \alpha = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = \frac{1}{2} \\ \alpha = 1 \\ 0 = 1 \end{cases}$ ce qui est impossible.

Donc il n'existe aucun réel α pour lequel $(\alpha, \alpha, 0)$ soit une solution de (S).

b) (a, b, c) est une solution de $(S) \Leftrightarrow \begin{cases} 4a - 2b + 6c = 1 \\ 3a - b + 5c = 2 \\ -a + b - 3c = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 4 & -2 & 6 \\ 3 & -1 & 5 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow A \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^{-1} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

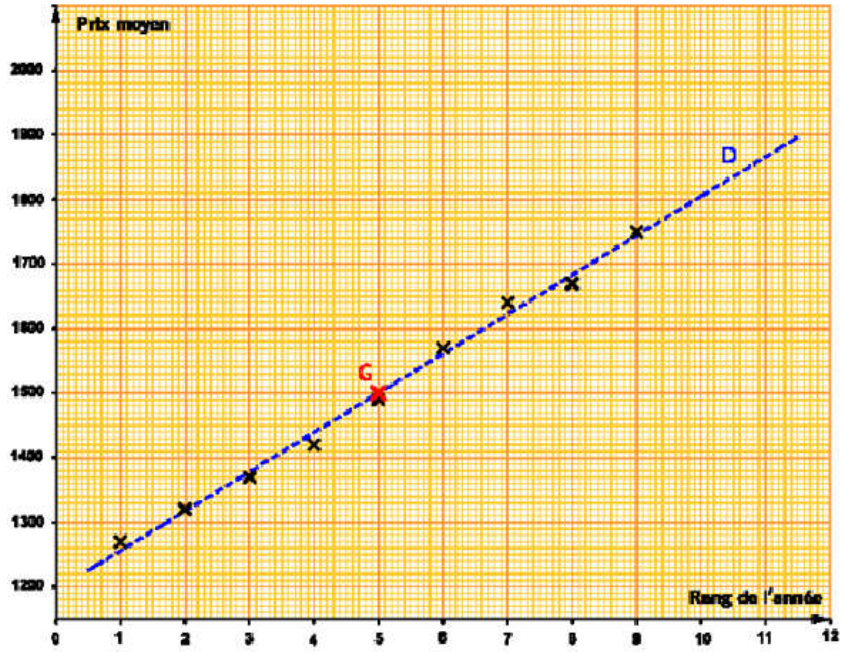
$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 1 \\ -1 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

$S_{\mathbb{R}^3} = \left\{\left(\frac{3}{2}, \frac{5}{2}, 0\right)\right\}$

Exercice 2 : (4,5 points)

1) a) Le nuage :



b) Le nuage a une forme allongée, donc un ajustement affine est possible.

c) $\bar{x} = 5$; $\bar{y} = 1500$; $G(5,1500)$

2) a) Une équation de la droite D de régression de x en y est :

$y = ax + b$

Avec $a = 61$ et $b = 1195$

Donc $D: y = 61x + 1195$

b) 2023 correspond à $x = 15$

On estime le prix moyen d'un litre d'essence sans plomb en 2023 à :

$y = 61 \times 15 + 1195 = 2110\ dinars$.

Exercice 3 : (6 points)

1) a) $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (x-1)\ln x = +\infty$ car $\lim_{x \to 0^+} x - 1 = -1$ et $\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty$.

$\Longrightarrow$ La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à la courbe (C).

b) • $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} (x-1)\ln x = +\infty$ car $\lim_{x \to +\infty} x - 1 = +\infty$ et $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

• $\lim_{x \to +\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x} \ln x = +\infty$ car $\lim_{x \to +\infty} \frac{x-1}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{x}{x} = 1$

et $\lim_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$.

$\Longrightarrow$ La courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$de direction celle de l'axe des ordonnées.

2) • La fonction $x \longmapsto x-1$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $]0,+\infty[$.

• La fonction $x \longmapsto ln\, x$ est dérivable sur $]0,+\infty[$.

Donc f est dérivable sur $]0,+\infty[$.

$f'(x) = ln\, x + (x-1)\frac{1}{x} = ln\, x + \frac{x-1}{x}$.

3) a)

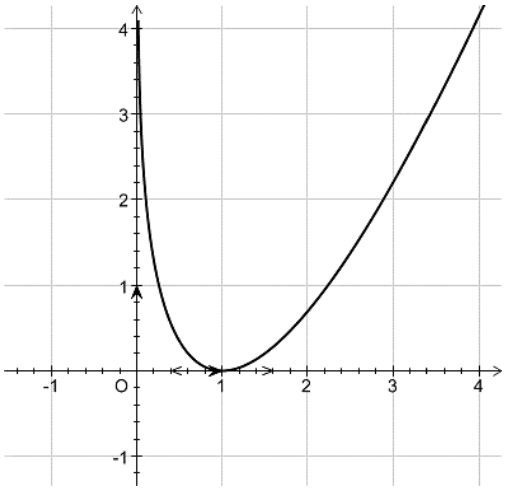
x	0		1		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$	
x	0	$+$		$+$	
$\frac{x-1}{x}$		$-$	0	$+$	
$\ln x$		$-$	0	$+$	

Donc $ln\, x$ et $\frac{x-1}{x}$ sont de même signe sur chacun des intervalles $]0,1[$ et $]1,+\infty[$.

b) Tableau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

4)



5) a) F est dérivable sur $]0,+\infty[$.

$$F'(x) = \left(\frac{2x}{2}-1\right) ln\, x + \left(\frac{x^2}{2}-x\right)\frac{1}{x} - \frac{2x}{4} + 1$$

$$= (x-1)\, ln\, x + \left(\frac{x^2}{2}-x\right)\frac{1}{x} - \frac{x}{2} + 1$$

$$= (x-1)\, ln\, x + \frac{x^2}{2}\frac{1}{x} - x\frac{1}{x} - \frac{x}{2} + 1$$

$$= (x-1)\, ln\, x + \frac{x}{2} - 1 - \frac{x}{2} + 1 = (x-1)\, ln\, x = f(x)$$

Donc F est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

b) L'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$ est :

$$\mathcal{A} = \int_1^e |f(x)|\, dx$$

$= \int_1^e f(x)\, dx$ car $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in [1, e]$

$= [F(x)]_1^e$

$= F(e) - F(1)$

$= \left(\frac{e^2}{2} - e\right) ln\, e - \frac{e^2}{4} + e - \left(\left(\frac{1^2}{2} - 1\right) ln\, 1 - \frac{1^2}{4} + 1\right)$

$= \frac{e^2}{2} - e - \frac{e^2}{4} + e - \left(-\frac{1}{4} + 1\right)$

$= \frac{e^2}{4} - \frac{3}{4} \times (ua)$

Exercice 4 : (5 points)

1) a) • $u_1 = \frac{2}{1+u_0} = \frac{2}{1+0} = 2$

• $u_2 = \frac{2}{1+u_1} = \frac{2}{1+2} = \frac{2}{3}$

• Comme $u_0 < u_2 < u_1$, alors la suite (u_n) n'est pas monotone.

b) • $0 \leq u_0 = 0 \leq 2$ vrai

• Supposons que $0 \leq u_n \leq 2$ et montres que $0 \leq u_{n+1} \leq 2$.

$$0 \leq u_n \leq 2 \Leftrightarrow 1 \leq 1 + u_n \leq 3$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{3} \leq \frac{1}{1+u_n} \leq 1$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq \frac{2}{1+u_n} \leq 2$$
$$\Leftrightarrow \frac{2}{3} \leq u_{n+1} \leq 2$$

Donc $0 \leq \frac{2}{3} \leq u_{n+1} \leq 2$

Conclusion : $0 \leq u_n \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2) a) $v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}$

$$v_{n+1} = \frac{u_{n+1} - 1}{u_{n+1} + 2}$$
$$= \frac{\frac{2}{1+u_n} - 1}{\frac{2}{1+u_n} + 2}$$

$$= \frac{\frac{2-1-u_n}{1+u_n}}{\frac{2+2+2u_n}{1+u_n}}$$

$$= \frac{1-u_n}{4+4u_n}$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{u_n-1}{u_n+2}$$

$$= -\frac{1}{2}v_n$$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2}$.

(v_n) est une suite géométrique de raison $q = -\frac{1}{2} \in]-1,1[$, alors $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

b) $v_n = \frac{u_n-1}{u_n+2} \Leftrightarrow v_n(u_n+2) = u_n - 1$

$$\Leftrightarrow v_n u_n + 2v_n = u_n - 1$$

$$\Leftrightarrow u_n - v_n u_n = 1 + 2v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n(1-v_n) = 1 + 2v_n$$

$$\Leftrightarrow u_n = \frac{1+2v_n}{1-v_n}$$

c) $\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+2v_n}{1-v_n} = 1$ car $\lim_{n\to+\infty} v_n = 0$.

Donc (u_n) converge vers 1.

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE **MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION** **EXAMEN DU BACCALAURÉAT** SESSION **2019**	**Session de contrôle**	
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Économie et Gestion**
	Durée : **2h**	Coefficient de l'épreuve: **2**

ꕥ ꕥ ꕥ ꕥ ꕥ

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.

Exercice 1 :(5points)

On donne les matrices $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\2&4&5\\5&6&8\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}2&-2&1\\9&3&-3\\-8&-1&2\end{pmatrix}$

1) a) Calculer $A \times B$.

b) En déduire la matrice inverse de A.

2) Un atelier de couture confectionne 400 pantalons, en trois modèles P_1, P_2 et P_3.

Il dispose d'un tissu de longueur 492 mètres (ayant une largeur fixe) pour la couture de ces pantalons avec un coût total de 5680 dinars.

La longueur du tissu et le coût de couture d'un pantalon de chaque modèle sont donnés Dans le tableau suivant:

Type de pantalon	P_1	P_2	P_3
Le coût de couture d'un pantalon (en dinars)	8	16	20
Longueur du tissu (en mètres)	1	1,2	1,6

On se propose de déterminer le nombre de pantalons coudés de chaque modèle.

a) Montrer que la situation se traduit par le système $(S):\begin{cases}x+y+z=400\\2x+4y+5z=1420\\5x+6y+8z=2460\end{cases}$

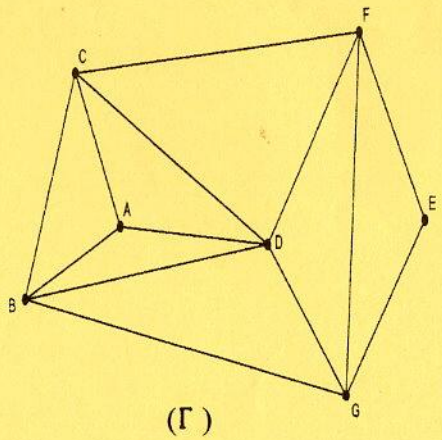
b) Donner l'écriture matricielle de (S).

c) Déterminer alors le nombre de pantalons coudés de chaque modèle.

Exercice 2 :(5 points)

On considère le graphe (Γ) Ci-contre dont les sommets

Sont A, B, C, D, E, F et G.



(Γ)

1) a) Compléter le tableau suivant :

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
degré							

b) Justifier que le graphe (Γ) admet une chaine eulérienne.

c) Le graphe (Γ) admet-il un cycle eulérien ? Expliquer.

2) Donner la matrice M associée à ce graphe en respectant l'ordre alphabétique.

3) a) L'une des matrices suivantes P et Q est la matrice M^3.

Indiquer laquelle en justifiant votre réponse.

$$P = \begin{pmatrix} 6 & 9 & 9 & 11 & 4 & 6 & 6 \\ 9 & 8 & 12 & 12 & 4 & 7 & 11 \\ 9 & 12 & 8 & 12 & 4 & 11 & 7 \\ 11 & 12 & 12 & 12 & 4 & 12 & 12 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 2 & 6 & 6 \\ 6 & 7 & 11 & 12 & 6 & 6 & 10 \\ 6 & 11 & 7 & 12 & 6 & 10 & 6 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 9 & 9 & 11 & 4 & 6 & 6 \\ 9 & 8 & 12 & 12 & 4 & 7 & 11 \\ 9 & 12 & 8 & 12 & 4 & 11 & 7 \\ 11 & 12 & 12 & 12 & 4 & 12 & 12 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 2 & 6 & 6 \\ 6 & 7 & 11 & 12 & 6 & 6 & 10 \\ 6 & 11 & 7 & 12 & 6 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

b) Déterminer le nombre de chaines de longueur 3 joignant le sommet F au sommet G.

Exercice 3 :(5 points)

Soit f la fonction réelle définie sur IR par $f(x) = e^x - e^{-x} + x$.

On désigne par **(C)** sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Montrer que la fonction f est impaire.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis vérifier que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$ et interpréter graphiquement ce résultat.

b) Justifier que f est dérivable sur IR et que $f'(x) > 0$ pour tout réel x.

c) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Montrer que O est un point d'inflexion pour la courbe **(C)**.

b) Montrer que la tangente T à la courbe **(C)** au point O a pour équation $y = 3x$.

4) a) Montrer que f réalise une bijection de IR sur IR.

(On notera dans la suite par f^{-1} la fonction réciproque de f et on désignera par **(C')** sa courbe représentative dans le repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

b) Monter que f^{-1} est dérivable en 0 et déterminer $(f^{-1})'(0)$.

5) Tracer (T) , **(C)** et **(C')**.

Exercice 4 : (5 points)

Une petite entreprise commercialise des tapis et des lustres.

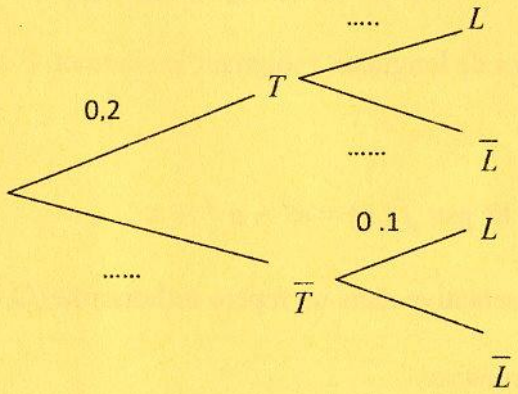
Un client quelconque se présente, il achète au plus un tapis et un lustre.

- la probabilité pour que ce client achète un tapis est 0,2.
- la probabilité pour que ce client achète un lustre sachant qu'il a acheté un tapis est 0,7.
- la probabilité pour que ce client achète un lustre sachant qu'il n'a pas acheté un tapis est 0,1.

On note par : T l'événement « le client achète un tapis »

L l'événement « le client achète un lustre ».

1) a) Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant:



b) Calculer la probabilité de l'événement $T \cap L$.

c) Montrer que la probabilité de l'événement L est égale à 0,22.

d) Calculer la probabilité pour que le client achète un tapis ou un lustre.

2) Le prix d'un tapis est 150 dinars et celui d'un lustre est 50 dinars.

Soit X la variable aléatoire prenant pour valeur la dépense d'un client.

a)Recopier et compléter le tableau suivant donnant la loi de probabilité de X:

x_i : Dépense (en dinars)	0	50	150	200
P_i : probabilité				

b) Calculer l'espérance mathématique de X et donner une interprétation de la valeur ainsi trouvée.

Exercice 1

1) a) $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 9 & 3 & -3 \\ -8 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I_3$.

b) $A \times B = 3I_3 \Leftrightarrow A \times \frac{1}{3}B = I_3$.

Donc A est inversible et sa matrice inverse est :$A^{-1} = \frac{1}{3}B = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 & -1 \\ -\frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

2) a) On désigne par : x : le nombre de pantalons coudés de type P_1.

y : le nombre de pantalons coudés de type P_2.

z : le nombre de pantalons coudés de type P_3.

- L'atelier confectionne 400 pantalons, donc : $\boldsymbol{x + y + z = 400}$.
- Le coût de couture d'un pantalon de type P_1 est égal à 8 $dinars$, le coût de couture d'un pantalon de type P_2 est égal à 16 $dinars$, le coût de couture d'un pantalon de type P_3 est égal à 20 $dinars$ et le coût total pour la couture de ces pantalons est égal à 5680 $dinars$, donc :

  $8x + 16y + 20z = 5680$ soit $\boldsymbol{2x + 4y + 5z = 1420}$
- La longueur du tissu d'un pantalon de type P_1 est égal à 1 m, la longueur du tissu d'un pantalon de type P_2 est égal à 1,2 m, la longueur du tissu d'un pantalon de type P_3 est égal à 1,6 m et la longueur total du tissu pour confectionner ces pantalons est égal à 492 m, donc :

  $x + 1{,}2y + 1{,}6z = 492$ soit $\boldsymbol{5x + 6y + 8z = 2460}$

Ainsi la situation se traduit par le système (S): $\begin{cases} x + y + z = 400 \\ 2x + 4y + 5z = 1420 \\ 5x + 6y + 8z = 2460 \end{cases}$

b) • La matrice du système : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}$

• La matrice des inconnues : $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

• La matrices des constantes : $C = \begin{pmatrix} 400 \\ 1420 \\ 2460 \end{pmatrix}$

L'écriture matricielle du système (S) : $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 400 \\ 1420 \\ 2460 \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = C$.

c) $AX = C \Leftrightarrow X = A^{-1}C \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 3 & 1 & -1 \\ -\frac{8}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 400 \\ 1420 \\ 2460 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 140 \\ 160 \\ 100 \end{pmatrix}$.

On en déduit que :

Le nombre de pantalons coudés de type P_1 est 140.

Le nombre de pantalons coudés de type P_2 est 160.

Le nombre de pantalons coudés de type P_3 est 100.

Exercice 2

1) a)

Sommet	A	B	C	D	E	F	G
Degré	3	4	4	5	2	4	4

b) Le graphe (Γ) est connexe et seulement deux de ses sommets sont de degré impair, donc il admet une chaîne eulérienne.

c) Le graphe (Γ) est connexe mais ses sommets ne sont pas tous de degré pair, donc il n'admet pas un cycle eulérien.

2) La matrice associée à ce graphe : $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

3) a) Il y a 6 chaînes de longueur 3 joignant le sommet A à lui-même, donc $M^3 = P$.

b) Il y a 10 chaînes de longueur 3 joignant le sommet F au sommet G.

Exercice 3

1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a :

• $-x \in \mathbb{R}$

• $f(-x) = e^{-x} - e^{x} - x = -(e^{x} - e^{-x} + x) = -f(x)$

Donc la fonction f est impaire.

2) a) • $\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} e^{x} - e^{-x} + x = \lim_{x\to+\infty} e^{x} - \frac{1}{e^{x}} + x = +\infty$.

Car $\lim_{x\to+\infty} e^{x} = \lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{e^{x}} = 0$.

• $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}-e^{-x}+x}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x} - \frac{1}{xe^{x}} + 1 = +\infty$

Car $\lim_{x\to+\infty} \frac{e^{x}}{x}$ et $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{xe^{x}} = 0$.

Interprétation graphique : la courbe (C) admet une branche parabolique au voisinage de $+\infty$ de direction elle de l'axe $(O, \vec{j})$

b) Les fonctions $x \mapsto e^{x}$, $x \mapsto e^{-x}$ et $x \mapsto x$sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f et dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

$f'(x) = e^{x} + e^{-x} + 1 > 0$ car $e^{x} > 0$ et $e^{-x} > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

c) f est impaire et $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, alors $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

3) a) $f'(x) = e^x + e^{-x} + 1, x \in \mathbb{R}$.

Les fonctions $x \mapsto e^x$et $x \mapsto e^{-x}$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$, donc f' et dérivable sur $\mathbb{R}$ et donc f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ et pour tout réel x on a :

$f"(x) = e^x - e^{-x}$.

$f"(x) = 0 \Leftrightarrow e^x - e^{-x} = 0 \Leftrightarrow e^x = e^{-x} \Leftrightarrow x = -x \Leftrightarrow x = 0$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f''(x)$		$-$	0	$+$	

$f(0) = 0$.

$f"$ s'annule en 0 et change de signe, donc O est un point d'inflexion pour la courbe (C).

b) Une équation de la tangente T à la courbe (C) au point O est :

$y = f'(0) \cdot (x - 0) + f(0) = 3x$.

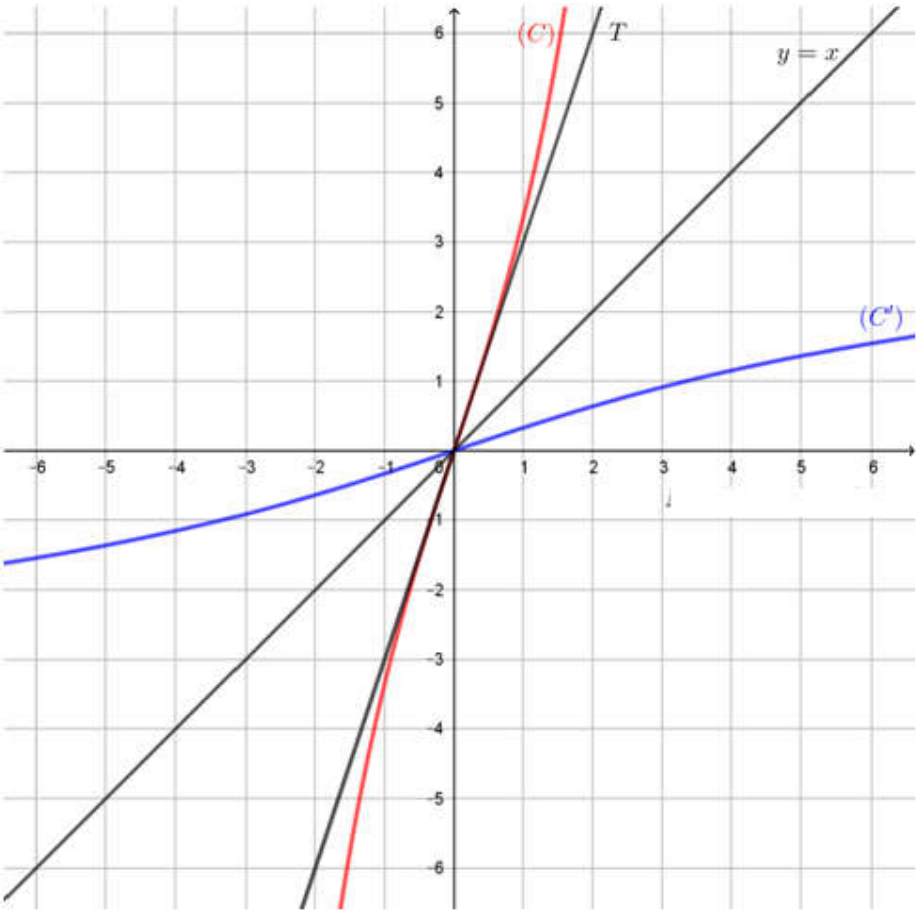
4) a) f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, donc elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$sur $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$

b) $f(0) = 0$.

f est dérivable en 0 et $f'(0) = 3 \neq 0$, alors f^{-1} est dérivable en 0.

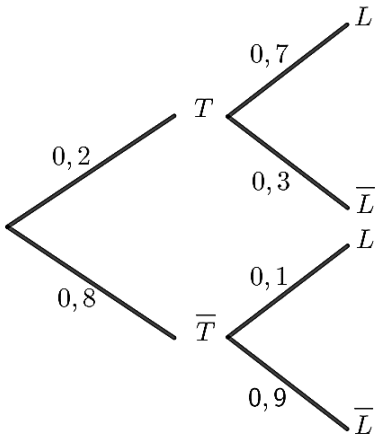
$$(f^{-1})'(0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(0))} = \frac{1}{f'(0)} = \frac{1}{3}$$

5) Les courbes (C) et (C') sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$.



Exercice 4

1) a) L'arbre pondéré :



b) $p(T \cap L) = p(L/T) \times p(T) = 0{,}7 \times 0{,}2 = 0{,}14$.

c) Appliquons la formule des probabilités totales :

$p(L) = p(L \cap T) + p(L \cap \overline{T}) = 0{,}14 + p(L/\overline{T}) \times p(\overline{T}) = 0{,}14 + 0{,}1 \times 0{,}8 = 0{,}22$.

d) La probabilité pour que le client achète un tapis ou un lustre :

$p(L \cup T) = p(L) + p(T) - p(L \cap T) = 0{,}22 + 0{,}2 - 0{,}14 = 0{,}28$.

2) a) Un client achète au plus un tapis et un lustre.

Dépense (en dinars) : x_i	0	50	150	200
$p(X = x_i) = p_i$	0,72	0,08	0,06	0,14

• $p_1 = p(X = 0) = p(\overline{L} \cap \overline{T}) = 0{,}9 \times 0{,}8 = 0{,}72$.

• $p_2 = p(X = 50) = p(L \cap \overline{T}) = 0{,}1 \times 0{,}8 = 0{,}08$.

• $p_3 = p(X = 150) = p(\overline{L} \cap T) = 0{,}3 \times 0{,}2 = 0{,}06$.

• $p_4 = p(X = 200) = p(L \cap T) = 0{,}14$.

b) L'espérance mathématique de X :

$E(X) = 0 \times 0{,}72 + 50 \times 0{,}08 + 150 \times 0{,}06 + 200 \times 0{,}14 = 41$.

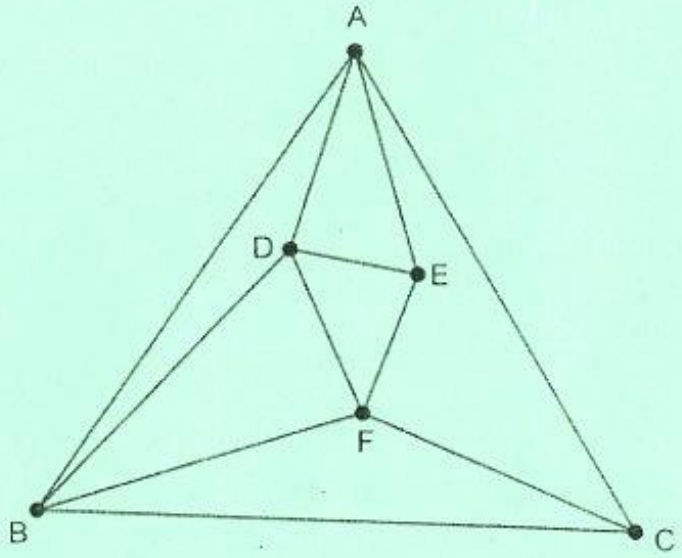
41désigne la dépense moyenne d'un client en dinars.

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ●●●●● **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION **2018**	***Session principale***	
	Epreuve : **Mathématiques**	Section : ***Economie et Gestion***
	Durée : **2h** ◆	Coefficient de l'épreuve : **2**

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.

Exercice 1 :(5 points)

On considère le graphe G ci- contre, dont les sommets sont A, B, C, D, E et F pris dans cet ordre.



1) Justifier que le graphe G est connexe.
2) Justifier que le graphe G admet au moins une chaîne eulérienne et donner un exemple.
3) a) Justifier que le graphe G n'admet pas de cycle eulérien.
   b) Quelle arrête peut-on alors ajouter pour obtenir un graphe contenant un cycle eulérien ?

4) Déterminer le nombre chromatique du graphe G en expliquant clairement la démarche.

5) Déterminer la matrice M associée à ce graphe (les sommets seront pris dans l'ordre alphabétique)

6) On donne $M^3 = \begin{pmatrix} 6 & 11 & 10 & 11 & 10 & 6 \\ 11 & 8 & 8 & 11 & 6 & 11 \\ 10 & 8 & 4 & 6 & 5 & 10 \\ 11 & 11 & 6 & 8 & 8 & 11 \\ 10 & 6 & 5 & 8 & 4 & 10 \\ 6 & 11 & 10 & 11 & 10 & 6 \end{pmatrix}$

Déterminer le nombre de chaînes de longueur 3 reliant les sommets C et E et citer toutes ces chaînes.

Exercice 2 :(5 points)

Soit (U_n) la suite réelle définie sur IN^* par $\begin{cases} U_1 = 800 \\ U_{n+1} = 0{,}7U_n + 300 \ ; \ n \in IN^* \end{cases}$

1) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel non nul n on a : $U_n \leq 1000$.

b) Montrer que la suite (U_n) est croissante.

c) En déduire que la suite (U_n) est convergente.

2) On considère la suite (V_n) définie sur IN^* par : $V_n = 1000 - U_n$

a) Prouver que (V_n) est une suite géométrique de raison q = 0,7.

b) Exprimer V_n en fonction de n pour tout entier naturel non nul n.

c) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, on a : $U_n = 200\left(5-(0,7)^{n-1}\right)$.

3) Lors du 1er mois de son ouverture, un magasin compte 800 clients.

Chaque mois, on note 300 nouveaux clients qui s'ajoutent à 70% des clients du mois précédent.

Quel est le rang du mois où le nombre de clients du magasin dépassera 990 ?

Exercice 3 :(4 points)

Le tableau suivant donne l'évolution de la population en Tunisie d'une décennie à autre en milieux urbains entre les années 1964 et 2014.

Année	1964	1974	1984	1994	2004	2014
Rang X_i	1	2	3	4	5	6
Effectifs Y_i (en millions)	1,8	2,7	3,6	5,4	6,4	7,4

(Source : I NS)

1) a) Représenter le nuage de points de la série statistique (X, Y) dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

b) Ce nuage permet-il d'envisager un ajustement affine ? Justifier votre réponse.

2) Calculer $\overline{X}$ et $\overline{Y}$, puis placer le point moyen $G(\overline{X}; \overline{Y})$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

3) On admet que la droite passant par le point moyen G et par le point P de coordonnées (5 ; 6,4) est une droite d'ajustement de ce nuage de points.

a) Tracer la droite (GP) dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

b) Déterminer une équation cartésienne de la droite (GP) **(On arrondira au centième les résultats des calculs)**.

c) Donner une estimation de la population de la Tunisie en milieux urbains en 2034.

Exercice 4: (6 points)

Soit g la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x) = 1 - x\,e^x$.

Le tableau suivant donne les variations de la fonction g sur $[0,+\infty[$.

x	0		α		$+\infty$
$g(x)$	1	↘	0	↘	$-\infty$

(α est l'unique solution dans $]0;+\infty[$ de l'équation $g(x)=0$).

1) Déterminer suivant les valeurs de x, le signe de $g(x)$ sur $[0,+\infty[$.

2) Soit f la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = x + (1-x)\,e^x$.

On désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

a) Montrer que pour tout $x \in [0;+\infty[$; on a : $f'(x) = g(x)$.

b) Vérifier que pour tout $x > 0$, on a : $f(x) = x\left[1 + (\frac{1}{x} - 1)e^x\right]$ puis déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2 - \alpha + 1}{\alpha}$.

3) Dresser le tableau de variations de f.

4) a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b) Déterminer une équation de la demi tangente T à $\mathscr{C}$ au point d'abscisse 0.

c) Tracer $\mathscr{C}$ et T dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

(On prendra $\alpha = 0{,}6$ et on arrondira $f(\alpha)$ à 10^{-1} près).

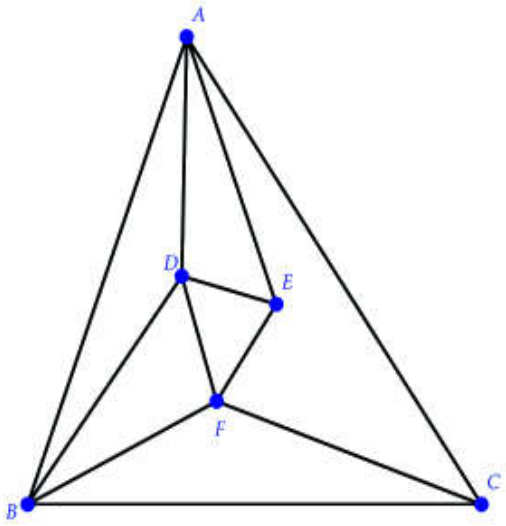
5) Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $F(x) = (2-x)\,e^x + \dfrac{x^2}{2}$.

a) Vérifier que F est une primitive de f sur $[0,+\infty[$.

b) En déduire en unités d'aires, l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathscr{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Corrigé de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat

Session principale 2018 Section : Economie et gestion



Exercice 1 (5 points)

On considère le graphe G ci -contre

dont les sommets sont A,B,C,D,E et F dans cet **ordre**

1) Le graphe G est connexe car il existe toujours une chaine reliant deux sommets distincts.

La chaine A–B–C–F–E–D contient tous les sommets du graphe

2) Le graphe G est connexe et contient exactement deux sommets de degré impair E et C (d°E = d°C =3)

Donc le graphe G admet au moins une chaine eulérienne d'extrémités E et C

Sommets	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
Degré	**4**	**4**	**3**	**4**	**3**	**4**

Un exemple de chaine eulérienne C–B–F–D–B–A–C–F–E–D–A– E

3) a) On a d°C =3;impair; donc le graphe G n'admet pas un cycle eulérien.

b) Il suffit d'ajouter une arrête reliant les sommets E et C pour obtenir un graphe connexe contenant un cycle eulérien.

4) On note $\delta(G)$ le nombre chromatique du graphe G

Sommets	**A**	**B**	**C**	**D**	**E**	**F**
Degré	**4**	**4**	**3**	**4**	**3**	**4**
couleur	**C1**	**C2**	**C3**	**C1**	**C3**	**C2**

D'ou $\delta(G)=3$

5)

$$M=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

6)

$$M^3=\begin{pmatrix} 6 & 11 & 10 & 11 & 10 & 6 \\ 11 & 8 & 8 & 11 & 6 & 11 \\ 10 & 8 & 4 & 6 & 5 & 10 \\ 11 & 11 & 6 & 8 & 8 & 11 \\ 10 & 6 & 5 & 8 & 4 & 10 \\ 6 & 11 & 10 & 11 & 10 & 6 \end{pmatrix}$$

Il existe 5 chaines de longueur 3 reliant les sommets C à E

C–F–D–E ; C–A–D–E ; C–B–A–E ; C–B–F–E ; C–B–D–E

Exercice 2 (5 points)

Soit (U_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}^*$ par: $\begin{cases} U_1 = 800 \\ U_{n+1} = 0{,}7U_n + 300 \end{cases}$

1) a) Soit la propriété suivante P: " pour entier naturel non nul n on a : $U_n \leq 1000$ "

- Pour n=1 , on a $U_1 = 800 \leq 1000$ donc P est vraie à l'ordre 1.
- Soit n entier naturel fixé ,

  Supposons que P est vraie a l'ordre n et montrons que P est vraie à l'ordre n+1

  On a $U_n \leq 1000$ donc $0{,}7U_n + 300 \leq 0{,}7 \times 1000 + 300$

  donc $U_{n+1} \leq 1000$ D'ou P est vraie à l'ordre n+1

Donc pour tout entier naturel non nul n on a : $U_n \leq 1000$

b) $U_{n+1} - U_n = 0{,}7U_n + 300 - U_n = 0{,}7U_n - U_n + 300 = -0{,}3U_n + 300 = 0{,}3\underbrace{(1000 - U_n)}_{\substack{\geq 0 \\ \text{car } U_n \leq 1000}}$

$U_{n+1} - U_n \geq 0$ Donc la suite (U_n) est croissante.

c) On a la suite (U_n) est croissante et majorée par 1000. Donc la suite (U_n) est convergente ..

2) On considère la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $V_n = 1000 - U_n$

a) Pour tout entier naturel non nul n ; $V_{n+1} = 1000 - U_{n+1}$

$V_{n+1} = 1000 - (0{,}7U_n + 300)$

$= 1000 - 0{,}7U_n - 300$

$= 700 - 0{,}7U_n = 0{,}7(1000 - U_n) = 0{,}7.V_n$

Pour tout entier naturel non nul; $V_{n+1} = 0{,}7.V_n$

Donc (V_n) est une suite géométrique de raison q=0,7

b) (V_n) est une suite géométrique de raison q=0,7 et de premier terme $V_1 = 1000 - U_1$=200

Donc $V_n = q^{n-1}.V_1$= $200.(0,7)^{n-1}$

c) On a pour tout entier naturel non nul n

$V_n = 1000 - U_n$ équivaut à $U_n = 1000 - V_n$

équivaut à $U_n = 1000 - 200.(0,7)^{n-1}$

équivaut à U_n= $200.(5 - (0,7)^{n-1})$

Alors pour tout entier naturel non nul n U_n= $200.(5 - (0,7)^{n-1})$

3) On a U_n= $200.(5 - (0,7)^{n-1})$

le nombre de clients du magasin dépasse 990 Alors U_n= $200.(5 - (0,7)^{n-1}) \geq 990$

équivaut à $(5 - (0,7)^{n-1}) \geq \frac{990}{200}$

équivaut à $(0,7)^{n-1} \leq 5 - \frac{990}{200}$

équivaut à $(0,7)^{n-1} \leq 0,05$

équivaut à $\ln((0,7)^{n-1}) \leq \ln(0,05)$

équivaut à (n-1) $\ln(0,7) \leq \ln(0,05)$

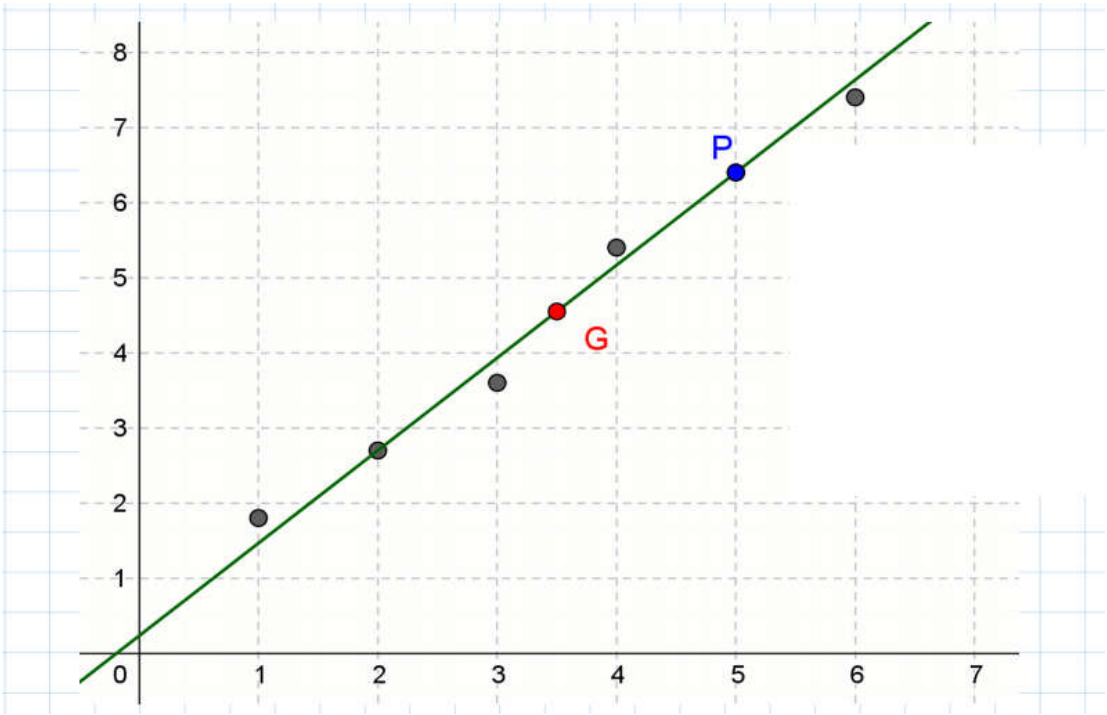
équivaut à (n-1) $\geq \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,7}$

équivaut à n $\geq 1 + \frac{\ln(0,05)}{\ln(0,7} \approx 9,399$

D'ou a partir 10ème mois le nombre de clients du magasin dépasse 990?

<u>Exercice 3</u> (4 points)

1) a)



b) Oui, car la forme allongée du nuage permet d'envisager un ajustement affine.

2) $\overline{X} = \sum \frac{x_i}{6} =$ 3,5 et $\overline{Y} = \sum \frac{y_i}{6} =$ = 4,55 D'ou G $(3{,}5\ ,\ 4{,}55)$

3) a) on a G $(3{,}5\ ,\ 4{,}55)$ et P $(5\ ,\ 6{,}4)$ voir graphique

b) (GP): y=ax+b

$a = \frac{y_P - y_G}{x_P - x_G} = \frac{6{,}4-4{,}53}{5-3{,}5} \approx 1{,}23$

Or G ∈ (GP) donc $y_G = a x_G + b$ alors 4,55=1,23× $3{,}5$ +b d'ou b= 4,55-1,23× $3{,}5 \approx 0{,}25$

D'ou (GP): y=1,23x+0,25

2004	2014	2024	2034
5	6	7	8

Pour x=8 y=1,23x8 +0,25 = 10,09

La population de la Tunisie e milieux urbains en 2034 est 10,09 millions.

<u>Exercice 4</u> (6 points)

1) Le signe de g(x) sur $[0, +\infty[$

x	0	∝	+∞
g(x)	+	0	-

2) Soit f la fonction définie sur $[0, +\infty[$ par $f(x) = x + 1(1 - x)e^x$ On Désigne par C sa courbe representative dans un réper orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

a) Montrer que pour tout x $[0, +\infty[$ on a :$f'(x) = g(x)$

On a pour tout $x\ de\ [0, +\infty[,\ f(x) = x + (1-x)e^x$

$f'(x) = 1 + (-1)e^x + (1-x)e^x$

$= 1 - e^x + e^x - xe^x = 1 - xe^x = g(x)$

b) pour x> 0 on a :$f(x) = x + (1-x)e^x = x\left[\frac{x}{x} + \frac{1-x}{x}e^x\right]$

$$= x\left[1 + \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{x}\right)e^x\right] = x\left[1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right)e^x\right]$$

On a :

$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x} - 1\right)e^x = -\infty$ $\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x} - 1 = -1$ et $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} x\left[1 + \left(\frac{1}{x} - 1\right)e^x\right] = -\infty$$

Donc $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

c) On a : $g(\propto) = 0\ donc\ 1-\propto e^{\propto} = 0\ \ donc\ \propto e^{\propto}$=1. Donc $\propto e^{\propto} = 1$.

Donc $e^{\propto} = \frac{1}{\propto}$

On a : $f(\propto) = \propto +(1-\propto)e^{\propto} = \propto +e^{\propto} - \propto e^{\propto} = \propto +\frac{1}{\propto} - 1 = \frac{\propto*\propto}{\propto} + \frac{1}{\propto} - \frac{\propto}{\propto}\frac{\propto^2+1-\propto}{\propto}$

d'où $f(x) = \frac{\propto^2-\propto+1}{\propto}$

3) On a $f'(x) = g(x)$ pour $x \in [0,+\infty[$ donc le signe de $f'(x)$ est celui de g(x)

x	0	$\propto$	$+\infty$
$f'(x)$	+	0	-
	1	f($\propto$) ↗	↘ $-\infty$

En effet : $f(0) = 0 + (1-0)e^0 = 1*1 = 1$

4/a)Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$ .Interpréter graphiquement le résultat obtenu

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x\left[1+\left(\frac{1}{x}-1\right)e^x\right]}{x} = \lim_{x\to+\infty} 1+\left(\frac{1}{x}-1\right)e^x$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$$

Donc la courbe C admet une branche parabolique de direction celle de la droite (O,$\vec{j}$) au voisinage de $+\infty$

b) Déterminer une équation de la demi- tangente T à C au point d'abscisse 0

$$T: y = f'(0)(x-0) + f(0)\ et\ x \geq 0$$

On a : $f'(0) = g(0) = 1 - 0 * e^0 = 1\ et\ f(0) = 1$

Donc $T: y = 1*x+1 = x+1\ et\ x \geq 0$

D'où $T = \begin{cases} y = x+1 \\ et \\ x \geq 0 \end{cases}$

c) Tracer C et T dans (O,$\vec{i}$,$\vec{j}$) (On prendra $a = 0{,}6$ et on arrondira f(a) à 10^{-1} prés)

$$\propto = 0{,}06 : f(x) \approx 1{,}2666\ \ à\ 10^{-1}\ f(\propto) = 1{,}3$$

5) Soit F la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par : $\mathrm{F(x)} = (2-\mathrm{x})\mathrm{e}^{\mathrm{x}} + \frac{\mathrm{x}^2}{2}$

a) Vérifier F est une primitive de f sur $[0,+\infty[$.

Pour $x \in [0,+\infty[$,on a :

$$F'(x) = (-1) + (2-x)e^x + \frac{2x}{2}$$
$$= -e^x + (2-x)e^x + x$$
$$= (-1+2-x)e^x + x$$
$$= (1-x)e^x + x$$
$$= x + (1-x)e^x$$
$$= f(x)$$

On a : $F'(x) = f(x)\ \ pour\ \ x \in [0,+\infty[$ Donc F est une primitive de f sur $[0,+\infty[$

b) En déduire en unités d'aires ,L'aire A de la partie du plan délimitée C à l'axe de abscisses et les droites d'équations $\mathrm{x} = 0$ et $\mathrm{x} = 1$

On a : $A = \int_0^1 |f(x)|dx$

On a $f(1) = 1 + (1-1)e^1 = 1$, $donc\ f(x) \geq 0$

Pour $x \in [0,1]$ $donc\ A = \int_0^1 f(x)dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = (2-1)e^1 + \frac{1^2}{2} - \left[(2-0)e^0 + \frac{0^2}{2}\right]$

D'où A $= e + \frac{1}{2} - 2 = e - \frac{3}{2}$ U.a

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ●●●●● **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION **2018**	***Session de contrôle***	
	Epreuve : **Mathématiques**	Section : ***Economie et Gestion***
	Durée : **2h** ◆	Coefficient de l'épreuve : **2**

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

Exercice 1: (4points)

On considère la suite réelle (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{4u_n}{1+u_n}, n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) a) Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel n, on a : $1 \leq u_n < 3$.

b) Vérifier que pour tout entier naturel n, on a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n(3-u_n)}{1+u_n}$.

c) En déduire le sens de variation de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

d) Montrer que la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.

2) Soit (V_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_n = \dfrac{3-u_n}{u_n}$; pour tout entier naturel n.

a) Montrer que $(V_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{4}$.

b) Vérifier que pour tout entier naturel n, on a : $u_n = \dfrac{3}{1+V_n}$.

c) Déterminer alors la limite de la suite $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 2: (5points)

On dispose de deux urnes U_1 et U_2 et d'une pièce de monnaie.

L'urne U_1 contient 3 boules blanches et 2 boules rouges.

L'urne U_2 contient une boule blanche et 4 boules rouges.

Toutes les boules sont indiscernables au toucher.

La pièce de monnaie est truquée de façon que lorsqu'elle est lancée, la probabilité d'obtenir " face" est égale à $\dfrac{3}{4}$.

On considère l'épreuve suivante : On lance la pièce de monnaie

- Si on obtient "pile», on tire une boule de l'urne U_1.
- Si on obtient «face», on tire une boule de l'urne U_2.

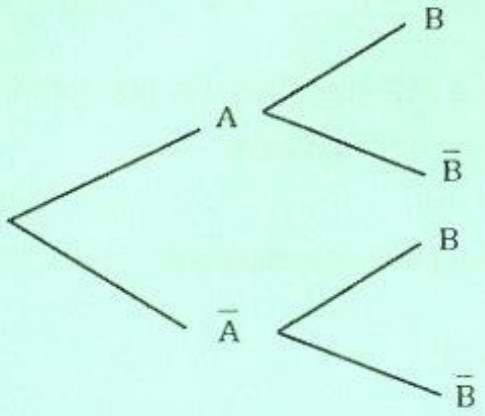
On désigne par A et B les événements suivants :

A : « Obtenir pile ».

B : « obtenir une boule blanche ».

1) a) Calculer P(A).

b) Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant décrivant la situation.



2) a) Montrer que $P(B) = \frac{3}{10}$.

b) Quelle est la probabilité d'obtenir" pile», sachant que la boule tirée est blanche ?

3) On répète l'épreuve précédente 5 fois de suite, en remettant à chaque fois, la boule tirée dans son urne d'origine.

On note par X la variable aléatoire prenant pour valeurs le nombre d'épreuves donnant une boule blanche.

a) Calculer la probabilité de l'événement (X= 4).

b) Calculer l'espérance mathématique et la variance de X.

Exercice 3: (5points)

On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 9,9 & 7,5 & 3,75 \\ 1030 & 780 & 385 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 7900 & -75 & -750 \\ -12900 & 123 & 1020 \\ 5000 & -48 & -60 \end{pmatrix}$.

1) a) Calculer le déterminant de A. En déduire que A est inversible.

b) Calculer $A \times B$.

c) En déduire la matrice inverse A^{-1} de A.

2) Un bijoutier fabrique des bagues de trois types B_1, B_2 et B_3 par l'alliage de l'or pur avec d'autres métaux. Chaque bague fabriquée pèse 5 grammes.
Le tableau suivant indique le pourcentage massique d'or pur et le prix d'une bague pour chaque type.

Type de bague	B_1	B_2	B_3
Pourcentage massique d'or pur	99%	75%	37,5%
Prix d'une bague (en dinars)	1030	780	385

Pendant un mois, le bijoutier a utilisé 312 grammes d'or pur pour fabriquer 100 bagues qu'il les vend avec un total de 64700 dinars.

a) Montrer que la situation se traduit par le système (S): $\begin{cases} 9,9x+7,5y+3,75z=624 \\ 1030x+780y+385z=64700 \\ x+y+z=100 \end{cases}$

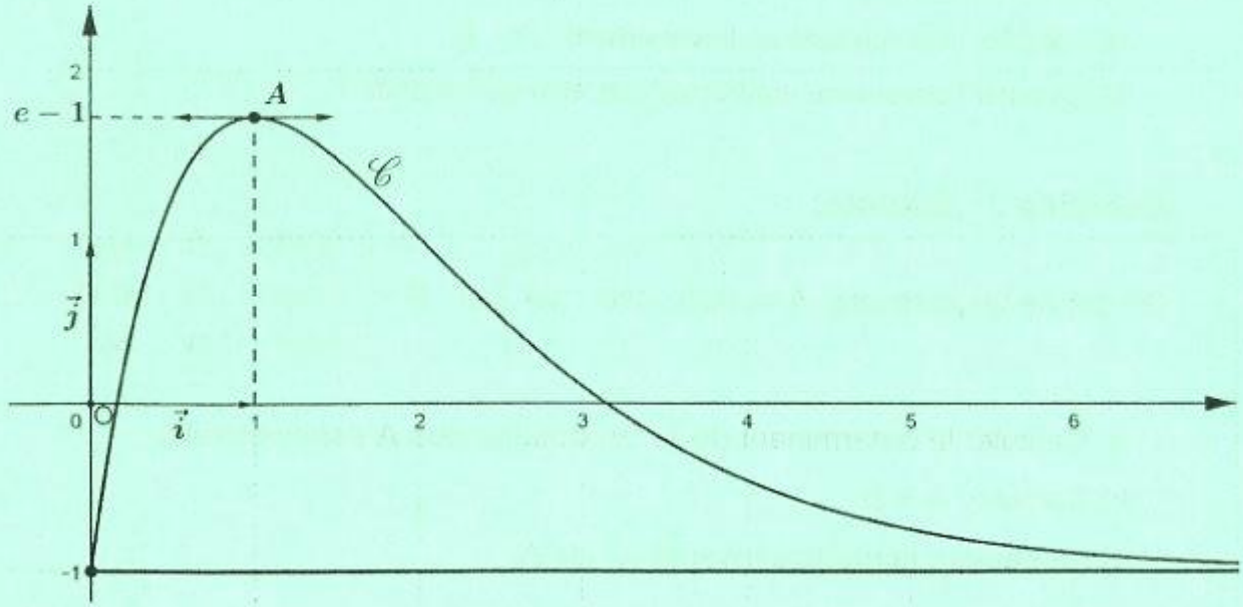
b) Donner l'écriture matricielle de (S).

c) Déterminer alors le nombre de bagues fabriquées de chaque type.

Exercice 4: (6 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
La courbe $\mathscr{C}$ ci- dessous est celle d'une fonction f définie et dérivable sur $[0,+\infty[$.

- $\mathscr{C}$ admet au point $A(1 ; e-1)$ une tangente parallèle à l'axe des abscisses.
- La droite d'équation $y=-1$ est une asymptote à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.



A) 1) En utilisant les données et le graphique, donner :

a) $f(1)$ et $f'(1)$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Le nombre de solutions dans $[0,+\infty[$ de l'équation $f(x)=0$.

d) Le tableau de variations de la fonction f sur $[0,+\infty[$.

2) On admet dans la suite que la fonction f est définie sur $[0,+\infty[$ par :

$f(x)= xe^{2-x}-1$

a) Montrer que la fonction F définie par : $F(x)= -(x+1)e^{2-x}-x$ est une primitive de f sur $[0,+\infty[$.

b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ en unités d'aires, de la région du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=\frac{1}{2}$ et $x=3$.

B) Une entreprise vend x en centaines de litres de peinture par jour $(0,5 \le x \le 3)$.

Le bénéfice réalisé en milliers de dinars est égal à $f(x)$.

1) Calculer le bénéfice en dinars réalisé pour la vente de 200 litres.

2) Déterminer la quantité du produit en litres à vendre par jour pour réaliser un bénéfice maximal et préciser ce bénéfice à un dinar près.

3) L'entreprise vend chaque jour une quantité de peinture qui varie entre 50 et 300 litres. Déterminer alors le bénéfice moyen de l'entreprise à un dinar près.

Corrigé de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat

Session de contrôle 2018 Section : Economie et gestion

Exercice 1 (4 points)

1- a- Soit la propriété suivante : $P_n : \forall n \in \mathbb{N}, 1 \le u_n < 3$.

- Pour n=0 on a : $1 \le u_0 = 1 < 3$ donc P_0 est vraie
- Supposons P_n est vraie jusqu'à l'ordre n $(1 \le u_n < 3)$ et montrons qu'elle est vraie pour l'ordre n+1 $(1 \le u_{n+1} < 3)$

- $u_{n+1} - 1 = \dfrac{4u_n}{1+u_n} - 1 = \dfrac{4u_n}{1+u_n} - \dfrac{1+u_n}{1+u_n} = \dfrac{4u_n - 1 - u_n}{1+u_n} = \dfrac{3u_n - 1}{1+u_n}$

on a $1 \le u_n < 3 \Leftrightarrow 3 \le 3u_n < 9$ donc $3u_n \ge 1$ d'ou $3u_n - 1 \ge 0$
et on a aussi $1 + u_n > 0$. Ainsi $u_{n+1} - 1 \ge 0$ d'ou $1 \le u_{n+1}$

- $u_{n+1} - 3 = \dfrac{4u_n}{1+u_n} - \dfrac{3(1+u_n)}{1+u_n} = \dfrac{4u_n - 3 - 3u_n}{1+u_n} = \dfrac{u_n - 3}{1+u_n} \in \mathbb{R}_-$. Alors $1 \le u_{n+1} < 3$.

En fin d'après le principe de récurrence la propriété P_n est vraie $\forall n \in \mathbb{N}$

b-

$$u_{n+1} - u_n = \frac{4u_n}{1+u_n} - u_n = \frac{4u_n}{1+u_n} - \frac{u_n(1+u_n)}{1+u_n} = \frac{4u_n - u_n - u_n^2}{1+u_n} = \frac{3u_n - u_n^2}{1+u_n} = \frac{u_n(3-u_n)}{1+u_n}$$

c- $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n(3-u_n)}{1+u_n} > 0$ d'où la suite (u_n) est croissante.

2 – a) $v_{n+1} = \dfrac{3 - u_{n+1}}{u_{n+1}} = \dfrac{3 - \dfrac{4u_n}{1+u_n}}{\dfrac{4u_n}{1+u_n}} = \dfrac{\dfrac{3 + 3u_n - 4u_n}{1+u_n}}{\dfrac{4u_n}{1+u_n}} = \dfrac{\dfrac{3-u_n}{1+u_n}}{\dfrac{4u_n}{1+u_n}}$

$= \dfrac{3-u_n}{1+u_n} \times \dfrac{1+u_n}{4u_n} = \dfrac{3-u_n}{4u_n} = \dfrac{1}{4}\dfrac{3-u_n}{u_n} = \dfrac{1}{4}v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{4}$

b- $v_n = \dfrac{3-u_n}{u_n} \Leftrightarrow u_n.v_n = 3 - u_n \Leftrightarrow u_n.v_n + u_n = 3 \Leftrightarrow u_n(v_n + 1) = 3 \Leftrightarrow u_n = \dfrac{3}{1+v_n}$

c- (v_n) est une suite géométrique de raison $q = \dfrac{1}{4}$

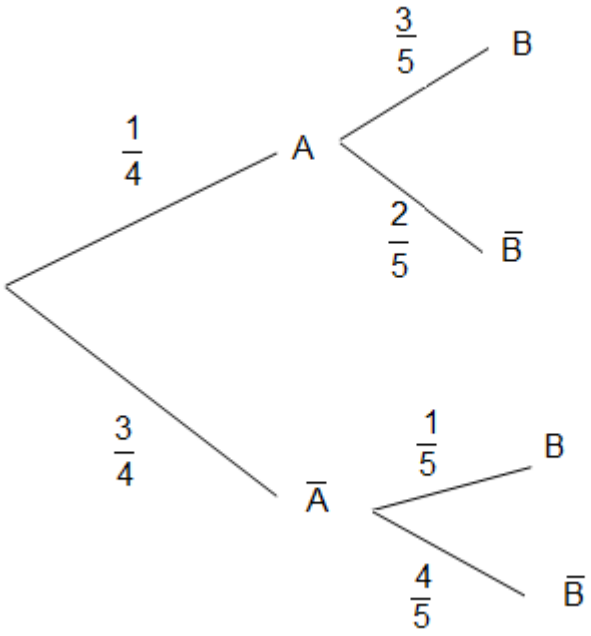
donc $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = 0$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$

Exercice 2 (5 points)

1) a) A « Obtenir Pile » donc $\overline{A}$ « Obtenir Face »

$P(A) = 1 - p(\overline{A}) = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}.$

b)



2) a) $p(B) = (B \cap A) + p(B \cap \overline{A}) = p(A)\, p(B/A) + p(\overline{A})\, p(B/\overline{A})$

Donc $p(B) = \frac{1}{4}.\frac{3}{5} + \frac{3}{4}.\frac{1}{5} = \frac{3}{10}$

b) $p(B/A) = \frac{p(B \cap A)}{p(B)} = \frac{\frac{1}{4}.\frac{3}{5}}{\frac{3}{10}} = \frac{1}{2}.$

3) a) X suit une loi binomiale de paramètres n et p = $p(B) = \frac{3}{10}$.

$P(X=4) = C_5^4 (\frac{3}{10})^4 .(\frac{7}{10})^1 = \frac{2835}{10^5} = 0{,}02835.$

b) $E(X) = n \,.\, p = 5 \times \frac{3}{10} = \frac{3}{2}.$

$V(X) = n \,.\, p \,.\, \overline{p} = \frac{21}{2}.$

Exercice 3 (5 points)

1) a)

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 9,9 & 7,5 & 3,75 \\ 1030 & 780 & 385 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9,9\begin{vmatrix} 780 & 385 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1030\begin{vmatrix} 7,5 & 3,75 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1.\begin{vmatrix} 7,5 & 3,75 \\ 780 & 385 \end{vmatrix}$$

$$= 9,9 \text{ x } 395 - 1030 \text{ x } 3,75 + 2887,5 - 2925 = 10,5$$

$\det(A) \neq 0$ donc A est inversible.

b) $A \text{ x } B = \begin{pmatrix} 210 & 0 & 0 \\ 0 & 210 & 0 \\ 0 & 0 & 210 \end{pmatrix} = 210 \text{ x} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 210 \ I_3$.

$A \text{ x } B = 210 \ I_3 \Leftrightarrow \frac{1}{210} A \text{ x } B = I_3$ d'où $A^{-1} = \frac{1}{210} B$.

2) a) On pose :

x = le nombre des bagues de types B_1

y = le nombre des bagues de types B_2

z = le nombre des bagues de types B_3.

Chaque bague pèse 5 grammes, le poids total d'or est :

$$\frac{9}{100}.5x + \frac{75}{100}.5y + \frac{37,5}{100}.5z = 312 \quad \Leftrightarrow 5(0,99x + 7,5y + 0,375\ z) = 312$$

$$\Leftrightarrow 9,9x + 7,5y + 0,375\ z = 624$$

Le bijoutier fabrique 100 bagues donc x + y + z = 100

Ainsi la situation se traduit par le système suivant :

$$\begin{cases} 9,9x + 7,5y + 3,75z = 624 \\ 1030x + 780\ y\ 385\ z = 64700 \\ x + y + z = 100 \end{cases}$$

b) $(S) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 9,9 & 7,5 & 3,75 \\ 1030 & 780 & 385 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 624 \\ 64700 \\ 100 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \quad A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 624 \\ 64700 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

c) $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 624 \\ 64700 \\ 100 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1}\begin{pmatrix} 624 \\ 64700 \\ 100 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{210} B \begin{pmatrix} 624 \\ 64700 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{210} \begin{pmatrix} 7900 & -73 & -750 \\ -12900 & 123 & 1020 \\ 5000 & -48 & 60 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 624 \\ 64700 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 \\ 50 \\ 40 \end{pmatrix}$$

Donc $x = 10$, $y = 50$ et $z = 40$.

Exercice 4 (6 points)

A) 1) Le point $A(1, e-1) \in C_f$ donc $f(1) = e-1$.

Au point A la tangente est horizontale donc $f'(1) = 0$.

b) la droite d'équation $y = -1$ est une asymptote à C_f au voisinage de $+\infty$ donc

$\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = -1$.

c) La courbe C_f coupe l'axe des abscisses en exactement deux points donc

l'équation $f(x) = 0$ possède exactement deux solutions.

d) tableau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
f'(x)		+	0	-	
f(x)	-1	↗	e-1	↘	-1

2) a) F est dérivable sur $[0, +\infty[$ et on a : $F'(x) = -e^{2-x}(x+1)e^{2-x} - 1) = x\, e^{2-x} - 1 = f(x)$.

Donc F est une primitive de f sur $[0, +\infty[$.

b) $A = \int_{\frac{1}{2}}^{3} |f(x)|\, dx$, or C_f est au-dessus de l'axe des abscisses sur $\left[\frac{1}{2}, 3\right]$

Donc $A = \int_{\frac{1}{2}}^{3} |f(x)|\, dx = \int_{\frac{1}{2}}^{3} f(x)\, dx = [F(x)]_{\frac{1}{2}}^{3} = F(3) - F(\frac{1}{2})$.

Donc $A = \left(-(3+1)\, e^{2-1} - 3\right) - \left(-(\frac{1}{2}+1)e^{2-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}e^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{e} - \frac{5}{2}$.

B) 1) $f(2) = 2\, e^{2-2} - 1 = 1$ donc pour 200 litres le bénéfice est 1000 dinars.

2) Le bénéfice est maximal si f atteint son maximum qui se réalise pour x = 1.

Donc pour obtenir le bénéfice maximal la quantité du produit est :

1 x 1000 = 1000 litres. Le bénéfice maximal est donc :

f(1) x 1000 = $\left(1.e^{2-1} - 1\right).1000 = 1000\, e - 1000 \approx 1718{,}28$ dinars.

3) le bénéfice moyen est $\bar{f} = \frac{1}{3 - 0{,}5} \int_{\frac{1}{2}}^{3} f(x)\, dx = \frac{1}{2{,}5} A = \frac{3}{5}e^{\frac{3}{2}} - \frac{8}{5e} - 1$.

Ainsi $\bar{f} \approx 1100$ dinars.

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ●●○●● **EXAMEN DU BACCALAURÉAT** SESSION **2017**	Épreuve : **Mathématiques** Section : **Economie et Gestion** Durée : 2h / Coefficient : 2 **Session principale**

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.

Exercice 1 (4,5 points)

Une chaine de production d'une usine fabrique des carreaux de céramique pour le carrelage de sols.

Une étude statistique a montré que :

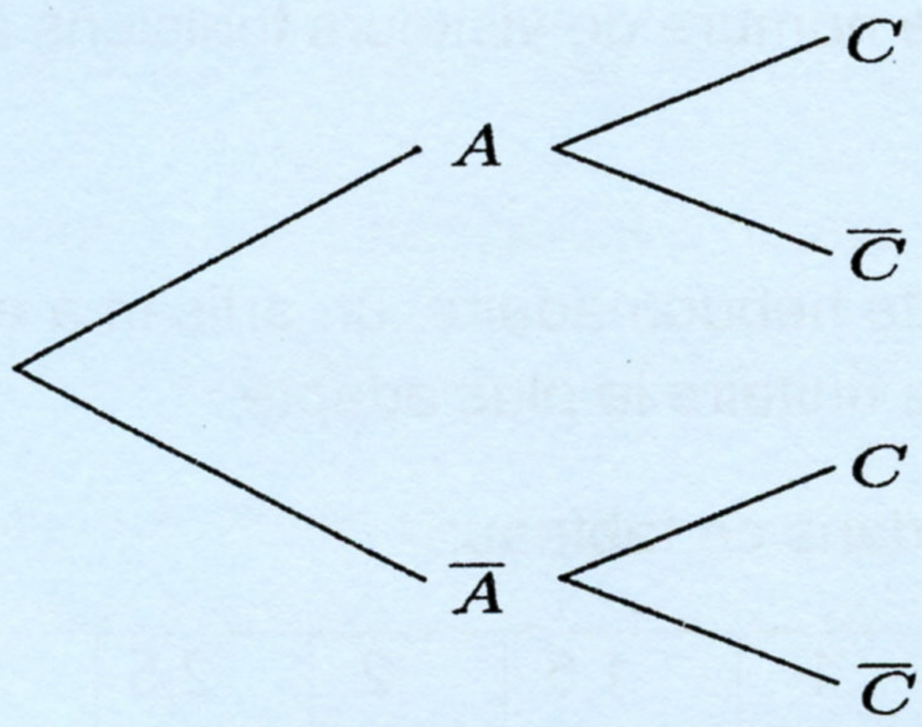
- 15 % des carreaux de céramique fabriqués ont un défaut d'aspect.
- Parmi les carreaux de céramique ayant un défaut d'aspect 20% ont un défaut de calibrage.
- Parmi les carreaux de céramique n'ayant pas un défaut d'aspect 8% présentent un défaut de calibrage.

On appelle A l'événement « le carreau de céramique fabriqué présente un défaut d'aspect ».

On appelle C l'événement « le carreau de céramique fabriqué présente un défaut de calibrage».

Le directeur de la qualité choisit au hasard un carreau de céramique dans un lot de carreaux produits.

1) Recopier et compléter l'arbre pondéré suivant :



2) a) Quelle est la probabilité pour que le carreau de céramique choisi ait un défaut d'aspect et un défaut de calibrage ?

b) Calculer p(C).

c) Les évenements A et C sont-ils indépendants ? Justifier.

3) Le directeur de l'usine affirme que 78% du produit fabriqué ne présente aucun défaut.

Cette affirmation est-elle correcte ? Expliquer.

Exercice 2 (5 points)

On donne les matrices: $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 3 & -1\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-5 & -1 & 4\\ 4 & 2 & -2\\ 7 & -1 & -2\end{pmatrix}$.

1) a) Calculer le déterminant de A. En déduire que A est inversible.
   b) Calculer $A \times B$.
   c) En déduire la matrice inverse A^{-1} de A.

2) Les tarifs d'entrée au musée du Bardo sont :
- 12 dinars pour les visiteurs étrangers.
- 8 dinars pour les tunisiens de moins de 60 ans.
- 4 dinars pour les tunisiens âgés de plus de 60 ans.

Les renseignements suivants concernent la visite du musée pendant une journée:
- Le nombre total de visiteurs est de 300 personnes.
- Le nombre de visiteurs tunisiens âgés de plus de 60 ans est égal au total du nombre de visiteurs étrangers augmenté du triple du nombre de visiteurs tunisiens de moins de 60 ans.
- La recette de la journée est de 2040 dinars.

a) Montrer que la situation se traduit par le système (S): $\begin{cases}x+y+z=300\\ x+3y-z=0\\ 3x+2y+z=510.\end{cases}$

b) Donner l'écriture matricielle de (S).

c) Déterminer alors Le nombre de visiteurs étrangers, le nombre de visiteurs tunisiens de moins de 60 ans et le nombre de visiteurs tunisiens âgés de plus de 60 ans.

Exercice 3 (4,5 points)

Afin de maximiser la recette hebdomadaire, un artisan a effectué une étude statistique pour établir le prix de vente unitaire le plus adapté.

Les résultats sont donnés dans ce tableau:

Prix de vente unitaire x_i (en dinars)	1	1,5	2	2,5	3,5	4	4,5	5
Nombre d'objets vendus y_i	123	110	90	80	68	50	39	21

1) a) Représenter le nuage de points de la série statistique double (x_i , y_i) dans un repère orthogonal du plan.

b) Ce nuage permet-il d'envisager un ajustement affine? Justifier votre réponse.

2) Ecrire une équation cartésienne de la droite (D) de régression de y en x obtenue par la méthode des moindres carrées (les coefficients seront arrondis à l'unité).

3) On suppose que cet ajustement reste bien valable.

a) Montrer que la recette hebdomadaire en dinars est donnée par la fonction g définie par $g(x) = -24x^2 + 144x$, où x est le prix unitaire de vente en dinars.

b) Determiner alors le prix unitaire de vente qui permet de réaliser une recette maximale.

Exercice 4 (6 points)

Soit f la fonction définie sur [1 ,+∞[par $f(x) = (4-x)e^x - 5$.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

2) a) Montrer que pour tout $x \in [1 ,+\infty[$, $f'(x) = (3-x)e^x$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f.

3) a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet dans [1 ,+∞[une unique solution α et vérifier que $3,89 < \alpha < 3,90$.

b) Déterminer le signe de $f(x)$ sur [1 ,+∞[.

4) Soit F la fonction définie sur [1 ,+∞[par $F(x) = (5-x)e^x - 5x$ et $I = \int_1^4 f(x)dx$.

Vérifier que F est une primitive de f sur [1 ,+∞[. En déduire la valeur de I.

5) Une entreprise produit chaque jour x centaines d'objets ($1 \leq x \leq 5$).

Le bénéfice réalisé en milliers de dinars est égal à $f(x)$.

a) Combien d'objets l'entreprise doit-elle produire par jour pour réaliser un bénéfice maximal ? Préciser alors ce bénéfice à un dinar près.

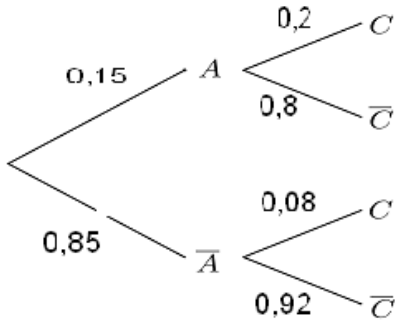
b) Quel est le nombre maximal d'objets produits par jour pour ne pas perdre ?

c) L'entreprise envisage une production journalière entre100 et 400 objets. Déterminer alors la valeur moyenne du bénifice (on donnera le résultat à un dinar près).

Corrigé de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat
Session principale 2017 Section : ***Economie et Gestion***

Exercice 1

1)



2) a) P(A∩C)=0.15x0.2=0.03

b) P(C)= P(A∩C) + P ($\overline{A}$∩C)=0.03+0.85x0.08=0.098

c) P(A) x P(C)=0.15x0.098=0.0147

P (A∩C) $\neq$ P (A) x P(C) alors A et C sont dépendent.

3) P ($\overline{A} \cap \overline{C}$) =0.85x0.92=0.782.

Exercice 2

1) a) On trouve dét(A)= -6.

dét(A) est non nul alors la matrice A est inversible.

b) On trouve $A \times B = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 6 \times I.$

c) $A \times B = 6 \times I$ alors $A^{-1} = \frac{1}{6} B.$

2) a) notons : x le nombre de visiteurs étrangers.

y le nombre de visiteurs tunisiens de moins de 60 ans.

z le nombre de visiteurs tunisiens âgés de plus de 60 ans.

- Le nombre total de visiteurs est de 300 personnes se traduit par : $x + y + z = 300$
- Le nombre de visiteurs tunisiens âgés de plus de 60 ans est égal au total du nombre de visiteurs étrangers augmenté du triple du nombre de visiteurs tunisiens de moins de 60 ans se traduit par : $z = x + 3y$ c'est-à-dire $x + 3y - z = 0$.
- La recette de la journée est de 2040 dinars se traduit par : $12x + 6y + 4z = 2O40$ c'est-à-dire $3x + 2y + z = 510$.

Ainsi la situation se traduit par le système (*S*): $\begin{cases} x + y + z = 300 \\ x + 3y - z = 0 \\ 3x + 2y + z = 510. \end{cases}$

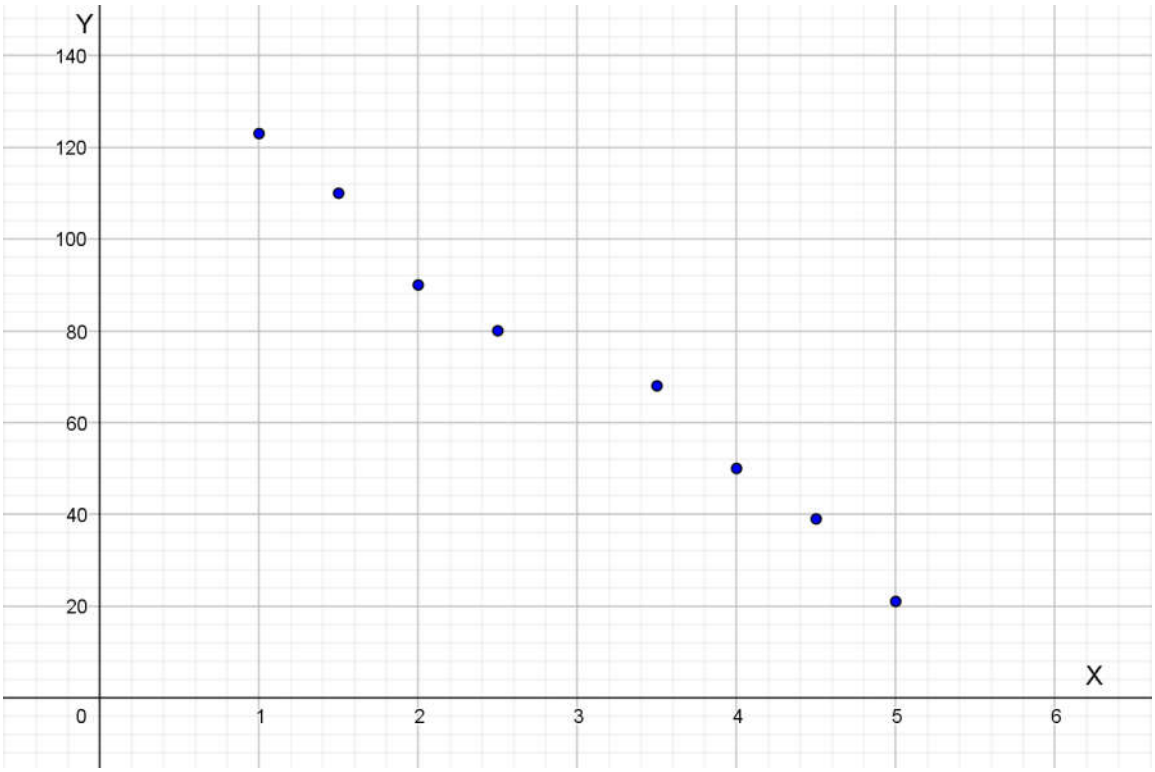
b) $A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 510 \end{pmatrix}$

c) $A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 500 \end{pmatrix}$ équivaut à $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A^{-1} . \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 500 \end{pmatrix}$ équivaut à $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -5 & -1 & 4 \\ 4 & 2 & -2 \\ 7 & -1 & -2 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 300 \\ 0 \\ 510 \end{pmatrix}$

On trouve x=90, y=30 et z=180

Exercice 3

1) a) Nuage de points de la série statistique double (x_i, y_i).



b) Les points du nuage semblent se répartir autour d'une droite.

2) On trouve $Y = -24x + 144$.

3) On suppose que cet ajustement reste bien valable.

a) $g(x) = (-24x + 144)x = -24x^2 + 144x$.

b) le prix unitaire de vente qui permet de réaliser une recette maximale est 3.

Il suffit d'étudier les variations de la fonction g pour x positif.

$g'(x) = -48x + 144 = 48(3 - x)$.

x	0		3		$+\infty$
g'(x)		+	0	–	
g		↗	g(3)	↘	

Exercice 4

1) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \left[(4 - x)e^x - 5\right] = -\infty$. Car $\lim\limits_{x \to +\infty} (4 - x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$.

2) a) Pour tout $x \in [1, +\infty[$, $f'(x) = -e^x + (4 - x)e^x = (-1 + 4 - x)e^x = (3 - x)e^x$.

b) Tableau de variation de f

x	1		3		$+\infty$
$f'(x)$		+	0	-	
$f(x)$	3e-5	↗	$f(3)$	↘	$-\infty$

3) a) *La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[1,3]$ alors elle réalise une bijection de l'intervalle $[1,3]$ sur l'intervalle $f([1,3]) = [2e - 5, f(3)]$ et $0 \notin [2e - 5, f(3)]$

Car $2e - 5 > 0$ alors l'équation $f(x) = 0$ n'admet pas de solution dans $[1,3]$.

* La fonction f est continue et strictement croissante sur l'intervalle $[3, +\infty[$ alors elle réalise

une bijection de $[3,+\infty[$ sur $f([3,+\infty[)=\left]\lim_{x\to+\infty} f(x), f(3)\right]=\left]-\infty, e^3-5\right]$.

$0\in\left]-\infty, e^3-5\right]$ alors l'équation $f(x)=0$ admet dans $[3,+\infty[$ une solution unique α.

$f(3.89)\simeq 0.38>0$ et $f(3.90)\simeq -0.06<0$ alors $3.89<\alpha<3.90$.

b) Signe de f(x) sur $[1,+\infty[$:

x	1		α		+∞
$f(x)$		+	0	-	

4) Pour tout $x\in[1,+\infty[$, $F'(x)=-e^x+(5-x)e^x-5=(4-x)e^x-5=f(x)$.

Alors F est une primitive de f sur l'intervalle $[1,+\infty[$.

$I=\int_1^4 f(x)dx=F(4)-F(1)=e^4-4e-15$.

5) a) f admet un maximum en 3 alors le nombre d'objets à produire par jours pour réaliser un bénéfice maximal est 3x100=300.

$f(3)=e^3-5\simeq 15.086$. Alors le bénéfice maximal est de l'ordre de 15086 dinars.

b) On sait d'après 3 b) que $f(x)<0$ équivaut à $x>\alpha$. Comme $3.89<\alpha<3.90$

Alors le nombre d'objets à produire par jour, ne doit pas dépasser $3.89\times 100=389$.

c) le bénéfice moyen est $\left(\frac{1}{4-1}\int_1^4 f(x)dx\right)\times 100=\frac{300}{3}I\simeq 9575$ dinars.

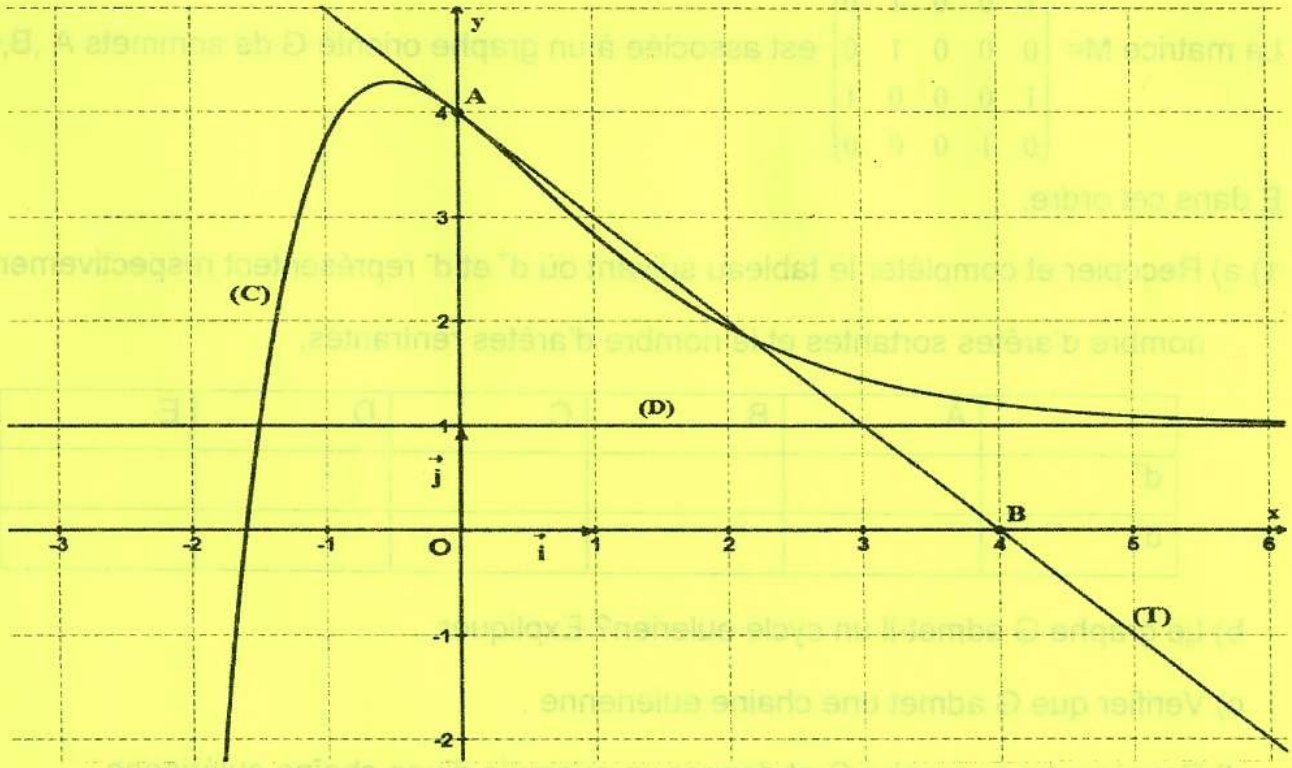
RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ●●○●● **EXAMEN DU BACCALAURÉAT** SESSION **2017**	Épreuve : **Mathématiques** Section : **Economie et Gestion** Durée : 2h | Coefficient : 2 **Session de contrôle**

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.

Exercice 1 (5 points)

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.
La courbe (C) ci-dessous est celle d'une fonction f définie et dérivable sur IR.

- La tangente T à la courbe (C) au point A(0,4) passe par le point B(4,0).
- La droite D d'équation y=1 est une asymptote horizontale à (C) au voisinage de $+\infty$.



1) En utilisant les données et le graphique, déterminer :

a) f(0) et f'(0),

b) Une équation de la tangente (T),

c) La limite de la fonction f en $+\infty$,

d) Un encadrement par deux entiers consécutifs de l'aire $\mathcal{A}$, de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = 2$.

2) On suppose dans la suite que la fonction f est définie sur IR par:

$f(x) = 1 + (ax + b)e^{-x}$, où a et b sont deux nombres réels.

a) Vérifier que $f'(x) = (-ax + a - b)e^{-x}$, pour tout réel x.

b) Montrer alors que $f(x) = 1 + (2x + 3)e^{-x}$, pour tout réel x.

c) Vérifier que la fonction F définie sur IR par $F(x)=x - (2x + 5)e^{-x}$

est une primitive de f sur IR.

d) Déterminer alors, en unité d'aire, la valeur exacte de $\mathcal{A}$.

Exercice 2 (5 points)

La matrice M= $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est associée à un graphe orienté G de sommets A ,B,C,D et E dans cet ordre.

1) a) Recopier et compléter le tableau suivant où d^+ et d^- représentent respectivement le nombre d'arêtes sortantes et le nombre d'arêtes rentrantes.

	A	B	C	D	E
d^+					
d^-					

b) Le graphe G admet-il un cycle eulerien? Expliquer.

c) Verifier que G admet une chaine eulerienne .

d) Représenter le graphe G et donner un exemple d'une chaîne eulérienne.

2) On donne $M^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Combien y a-t-il de chaines de longueur 2 reliant le sommet B au sommet E ?

Exercice 3 (5 points)

On donne les matrices A, B et C telles que:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -7 & \frac{29}{2} \\ \frac{-5}{2} & 1 & -11 \\ 2 & -5 & 9 \end{pmatrix} \qquad et\ C = A + B$$

1) Déterminer la matrice C.

2) a) Calculer le déterminant de la matrice A .En déduire que A est inversible.

b) Justifier que C est la matrice inverse de A.

3) Soit dans IR^3 le système (S): $\begin{cases} 2x + 2y - z + 4 = 0 \\ x + 6y + 4z - 8 = 0 \\ 2y + 2z - 6 = 0 \end{cases}$.

a) Le triplet $(-2, 1, 2)$ est-il solution de (S) ? Expliquer.

b) Montrer que:

(a, b, c) est une solution du système (S) si et seulement si $A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c) Résoudre alors le système (S).

Exercice 4 (5 points)

Soit la suite U définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 2e, \\ U_{n+1} = \frac{1}{2}(U_n + e), \text{pour tout } n \in IN. \end{cases}$

1) Calculer U_1 et U_2.

2) a) Montrer,par réccurence, que pour tout $n \in IN, U_n > e$.

b) Montrer que la suite U est décroissante.

c) En déduire que la suite U est convergente.

3) Soit la suite V définie sur IN par $V_n = U_n - e$.

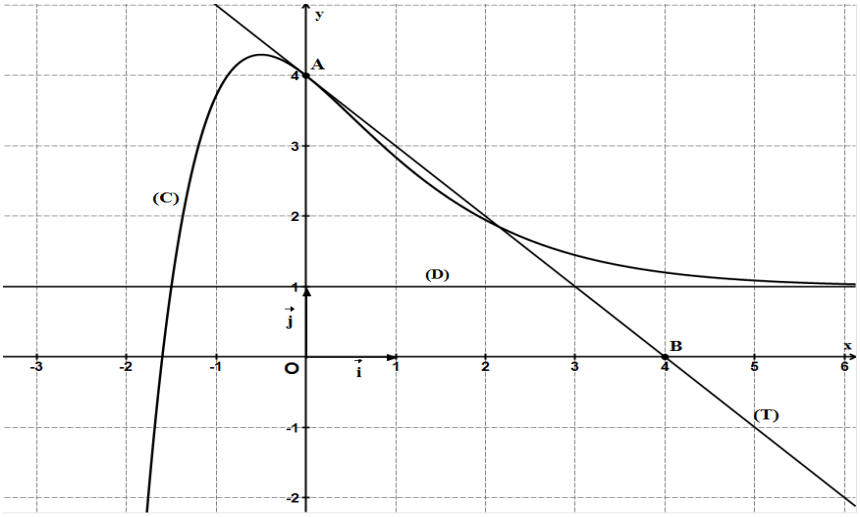
a) Montrer que V est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$.

b) Exprimer V_n puis U_n en fonction de n.

c) Déterminer alors la limite de U_n quand n tend vers $+\infty$.

Corrigé de l'épreuve de mathématiques du baccalauréat
Session de contrôle 2017 Section : Economie et Gestion

Exercice 1



1) a) f(0) =4 et f '(0)=-1.

b) (T) : y= -x+4.

c) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=1$.

d) 2<A<3.

2)a) $f'(x) = ae^{-x} - (ax+b)e^{-x} = (-ax+a-b)e^{-x}$.

b) $\begin{cases} f(0)=4 \\ f'(0)=-1 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} 1+b=4 \\ a-b=-1 \end{cases}$ *équivaut à* $\begin{cases} b=3 \\ a=2 \end{cases}$

équivaut à $f(x) = 1+(2x+3)e^{-x}$, pour tout réel x.

c) La fonction F est dérivable sur IR et F'(x)=$1-2e^{-x}+(2x+5)e^{-x} = f(x)$.
Alors F est une primitive de f sur IR.

d) $A = \int_1^2 f(x)dx = F(2)-F(1) = 1-9e^{-2}+7e^{-1}$.

Exercice 2

1) a) Nombre d'arêtes sortantes et le nombre d'arêtes rentrantes :

	A	B	C	D	E
d^+	2	2	1	2	1
d^-	2	1	1	2	2

b) $d^+ \neq d^-$ pour les sommets B et E donc G n'admet pas de cycle eulérien.

c) Pour les sommets A, C et D : $d^+ = d^-$.

Pour le sommet B : $d^+ = d^- + 1$.

Pour le sommet E on a $d^+ = d^- - 1$.

Donc G admet une chaine eulérienne.

d) Exemple de chaine eulérienne : B-D-A-C-D-E.

2) $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Il ya 2 chaines de longueur 2 reliant le sommet B à E.

Exercice 3

1) On trouve C=$\begin{pmatrix} 4 & -6 & 14 \\ -2 & 4 & -9 \\ 2 & -4 & 10 \end{pmatrix}$.

2) a) det(A)= $\frac{1}{4} \neq 0$. Alors la matrice A est inversible.

b) Il suffit de vérifier que AxC = $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3) $(-2) + 6x1 + 4x2 - 8 = 4 \neq 0$, ainsi le triplet $(-2, 1, 2)$ ne vérifie pas la deuxième équation du système, par la suite il n'est pas une solution de (S).

a) (a, b, c)est une solutiondu système (S) équivaut à

$\begin{cases} 2a + 2b - c = -4 \\ a + 6b + 4c = 8 \\ 2b + 2c = 6 \end{cases}$ équivaut à $\begin{cases} a + b - \frac{1}{2}c = -2 \\ \frac{1}{2}a + 3b + 2c = 4 \\ b + c = 3 \end{cases}$ équivaut à $A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

c) $A \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ équivaut à $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = A^{-1}.\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ On trouve *a=10 b= -7 c=10*

Exercice 4

1) $U_1 = \frac{1}{2}(U_0 + e) = \frac{3}{2}e$ et $U_2 = \frac{1}{2}(U_1 + e) = \frac{5}{4}e$.

2) a) $U_0 = 2e > e$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que $U_n > e$ et montrons que $U_{n+1} > e$.

En effet si $U_n > e$ alors $U_n + e > 2e$ d'où $\frac{1}{2}(U_n + e) > e$ c'est-à-dire $U_{n+1} > e$.

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > e$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{2}(U_n + e) - U_n = \frac{1}{2}(e - U_n) < 0$ car $e < U_n$.

c) La suite $\boldsymbol{U}$ est décroissante et minorée par e alors elle est convergente.

3) Soit la suite $\boldsymbol{V}$ est définie sur IN par $V_n = U_n - e$.

a) Soit $n \in \mathbb{N}$, $V_{n+1} = U_{n+1} - e = \frac{1}{2}(U_n + e) - e = \frac{1}{2}(U_n + e) - \frac{2}{2}e = \frac{1}{2}(U_n + e - 2e) = \frac{1}{2}(U_n - e) = \frac{1}{2}V_n$.

Alors $\boldsymbol{V}$ est une suite géomètrique de raison $\frac{1}{2}$.

b) $V_0 = U_0 - e = 2e - e = e$ d'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $V_n = e\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

De l'égalité $V_n = U_n - e$, on déduit que $U_n = e + e\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

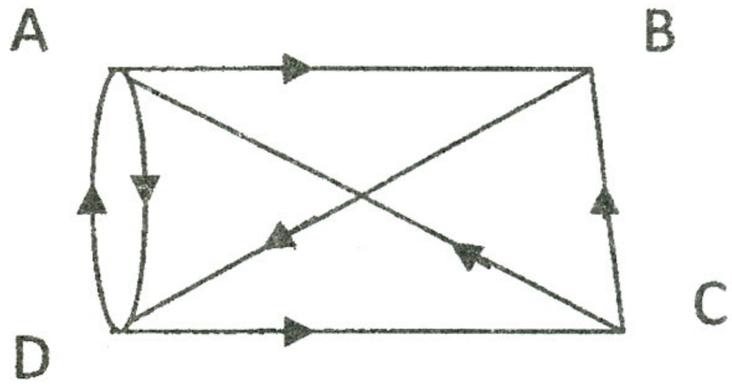
c) $\frac{1}{2} \in]-1,1[$ alors $\lim\limits_{n \to +\infty} e\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ par la suite $\lim\limits_{n \to +\infty} U_n = \lim\limits_{n \to +\infty} e + e\left(\frac{1}{2}\right)^n = e$.

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'ÉDUCATION ***** **EXAMEN DU BACCALAURÉAT**	Épreuve : **MATHÉMATIQUES**	
	Section : Économie et Gestion	
	Durée : 2H	Coefficient : 2
SESSION 2016	**Session principale**	

Le sujet comporte 3 pages.

Exercice 1 : (4,5 points)

On considère le graphe orienté (G) ci-contre



(G)

1) Recopier et compléter le tableau suivant :

	A	B	C	D
d^+	2			
d^-			1	

2) Répondre par « Vrai » ou « Faux », en justifiant la réponse à chacune des affirmations suivantes :

a) Le graphe (G) admet une chaine orientée eulérienne.

b) Le graphe (G) admet un cycle orienté eulérien.

c) La matrice associée au graphe (G) en considérant ses sommets dans l'ordre alphabétique est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 : (4,5 points)

Le tableau ci-dessous donne l'évolution du chiffre annuel (en milliards de dinars) de l'exportation de la Tunisie des produits électriques et mécaniques de l'année 2008 jusqu'à l'année 2014.

Année	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5	6	7
Chiffre annuel y_i (en milliards de dinars)	6,2	6	8 ,1	9,3	9,7	10,4	11,6

(Source : I N S)

1) Représenter, dans un repère orthogonal, le nuage des points de la série statistique (x_i, y_i).

Dans la suite, on arrondira au centième les résultats des calculs.

2) Calculer les coordonnées du point moyen G associé à la série (x_i,y_i) puis placer ce point sur le graphique.

3) Justifier que le nuage des points permet d'envisager un ajustement affine.

4) a) Déterminer par la méthode des moindres carrées une équation de la droite de régression de y en x.

b) En utilisant cet ajustement, estimer en milliards de dinars le chiffre de l'exportation de la Tunisie des produits électriques et mécaniques en l'année 2017.

<u>Exercice 3</u> : (5 points)

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix} 25 & 12 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1)a) Calculer le déterminant de la matrice A.

b) En déduire que A est inversible.

2) Soit la matrice $B=\begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ -2 & 17 & -18 \\ 1 & -13 & 27 \end{pmatrix}$.

Calculer AxB et en déduire la matrice A^{-1} inverse de A.

3) Un artisan fabrique trois types de jouets en bois : voitures, camions et bateaux.

Le tableau ci-dessous donne la quantité de bois en kilogrammes et le nombre d'heures de travail nécessaires pour la fabrication d'un jouet de chaque type.

Type de jouet	Voiture	Camion	Bateau
Quantité de bois(en kg)	2,5	1,2	0,8
Heures de travail pour la fabrication d'un jouet	4 heures	3 heures	2 heures

Après 204 heures de travail et en utilisant 96 kg de bois, l'artisan a fabriqué au total 76 jouets.

On se propose de déterminer le nombre de jouets fabriqués de chaque type.

a) Montrer que la situation se traduit par le système :

$$(S):\begin{cases} 2,5x + 1,2y + 0,8z = 96 \\ 4x + 3y + 2z = 204 \\ x + y + z = 76 \end{cases}$$

b) Montrer que le système (S) est équivalent à AU=V où $U=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $V=\begin{pmatrix} 960 \\ 204 \\ 76 \end{pmatrix}$.

c) Déterminer le nombre de voitures, le nombre de camions et le nombre de bateaux fabriqués.

Exercice 4 : (6 points)

Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x-1-\ln x$.

On désigne par (C) la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2)a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$.

b) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(f(x)-x\right)$ puis interpréter graphiquement le résultat obtenu.

3)a) Montrer que pour tout $x\in\ ]0;+\infty[$ $\quad f'(x)=\dfrac{x-1}{x}$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

4) Tracer la courbe (C).

5) Soit la fonction g définie sur $]0;+\infty[$ par $g(x)=x\ln x$.

a) Vérifier que pour tout $x\in\ ]0;+\infty[$ $\quad g'(x)=1+\ln x$.

b) Calculer l'aire $\mathcal{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations : x= 1 et x = e.

Examen du baccalauréat **Session principale**

Session de Juin 2016

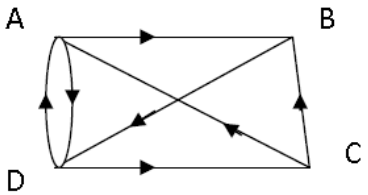
Section : Économie et gestion

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

1)

	A	B	C	D
d^+	2	1	2	2
d^-	2	2	1	2



(G)

2)a) Le graphe (G) admet une chaine orientée eulérienne (vrai)

Dans le graphe (G), on a $d^+(A) = d^-(A)$ et $d^+(D) = d^-(D)$ et pour les sommets B et C seulement on a $d^+(B) = d^-(B) - 1$ et $d^+(C) = d^-(C) + 1$, d'où le graphe (G) admet une chaine orientée eulérienne.

b) Le graphe (G) admet un cycle orienté eulérien (faux)

Dans le graphe (G) il y a des sommets tels que $d^+ \neq d^-$ (les sommets B et C), donc (G) n'admet pas de cycle orienté eulérien.

c) La matrice associée au graphe (G) en considérant ses sommets dans l'ordre alphabétique est $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ (faux)

On a $d^+(A)$ est la somme des termes de la première ligne de la matrice associée au graphe (G). On a $d^+(A) = 2$ et la somme des termes de la première ligne de cette matrice est 3, ainsi cette matrice n'est pas celle associée au graphe (G).

Exercice 2

Année	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Rang x_i de l'année	1	2	3	4	5	6	7
Chiffre annuel y_i (en milliards de dinars)	6,2	6	8 ,1	9,3	9,7	10,4	11,6

(Source : I N S)

1) Le nuage de points : Voir figure.

2) $G(\bar{x}, \bar{y})$; où $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont respectivement les moyennes arithmétiques des x_i et y_i.

G(4 ; 8,76).



3) Le nuage des points est allongé suivant une droite, donc un ajustement affine est envisagé.

4)a) Une équation de la droite de régression de y en x : $y = 0{,}95\ x\ +\ 4{,}96$.

b) Le rang de l'année 2017 est $x = 10$, d'où $y = 0{,}95 \times 10\ +\ 4{,}96 = 14{,}46$.

Ainsi le chiffre d'exportation de la Tunisie des produits électriques et mécaniques en l'année 2017 est estimé à 14,46 milliards de dinars.

Exercice 3

1)a) $A = \begin{pmatrix} 25 & 12 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 25 & 12 & 8 \\ 4 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 25 \times \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 4 \times \begin{vmatrix} 12 & 8 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 12 & 8 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 25 \times (3-2) - 4 \times (12-8) + (12 \times 2 - 3 \times 8)$$

$$= 25 - 16 + 0 = 9.$$

b) $\det(A) \neq 0$, d'où A est inversible.

2) $B=\begin{pmatrix}1 & -4 & 0\\ -2 & 17 & -18\\ 1 & -13 & 27\end{pmatrix}$

$$A\times B=\begin{pmatrix}25 & 12 & 8\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1 & -4 & 0\\ -2 & 17 & -18\\ 1 & -13 & 27\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9 & 0 & 0\\ 0 & 9 & 0\\ 0 & 0 & 9\end{pmatrix}=9.\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=9.I_3$$

$$A\times B=9.I_3 \Leftrightarrow A\times\left(\frac{1}{9}.B\right)=I_3 \Leftrightarrow A^{-1}=\frac{1}{9}.B$$

3)a) On note :

- x le nombre de jouets fabriqués de type voiture ;
- y le nombre de jouets fabriqués de type camion ;
- z le nombre de jouets fabriqués de type bateau.

Le nombre de jouets fabriqués est $x+y+z=76$.

Le nombre d'heures de travail est $4x+3y+2z=204$.

La quantité utilisée de bois (en Kg) est $2{,}5x+1{,}2\,y+0{,}8\,z=96$.

Ainsi la situation est traduite par le système suivant :

$$(S):\begin{cases}2{,}5x+1{,}2\,y+0{,}8\,z=96\\ 4x+3y+2z=204\\ x+y+z=76\end{cases}$$

$$\text{b) } (S):\begin{cases}2{,}5x+1{,}2\,y+0{,}8\,z=96\\ 4x+3y+2z=204\\ x+y+z=76\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}25x+12\,y+8\,z=960\\ 4x+3y+2z=204\\ x+y+z=76\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}25 & 12 & 8\\ 4 & 3 & 2\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}960\\ 204\\ 76\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow A\times U=V$$

$$\text{c) } A\times U=V\Leftrightarrow\left(\frac{1}{9}.B\right)A\times U=\left(\frac{1}{9}.B\right)\times V$$

$$\Leftrightarrow U=\left(\frac{1}{9}.B\right)\times V$$

$$\Leftrightarrow U=\frac{1}{9}.\begin{pmatrix}1 & -4 & 0\\ -2 & 17 & -18\\ 1 & -13 & 27\end{pmatrix}\begin{pmatrix}960\\ 204\\ 76\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow U=\frac{1}{9}.\begin{pmatrix}144\\ 180\\ 360\end{pmatrix}\Leftrightarrow U=\begin{pmatrix}16\\ 20\\ 40\end{pmatrix}.$$

Ainsi l'artisan a fabriqué 16 voitures, 20 camions et 40 bateaux.

Exercice 4

$f(x)=x-1-\ln x \ ; \ x\in]0,+\infty[$.

1) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x-1-\ln x=+\infty$, car $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$.

D'où la droite d'équation $x=0$ est asymptote oblique pour la courbe (C).

2)a) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x-1-\ln x=\lim\limits_{x\to+\infty} x(1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x})=+\infty$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-1-\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty} 1-\frac{1}{x}-\frac{\ln x}{x}=1$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=\lim\limits_{x\to+\infty} -1-\ln x=-\infty$.

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)-x=-\infty$, d'où la courbe (C) admet une branche parabolique de direction la droite d'équation $y=x$.

3)a) $f(x)=x-1-\ln x \ ; \ x\in]0,+\infty[$. $f'(x)=1-\frac{1}{x}=\frac{x-1}{x} \ ; \ x\in]0,+\infty[$.

b) $f'(x)=0 \Leftrightarrow \frac{x-1}{x}=0 \ ; \ x\in]0,+\infty[$

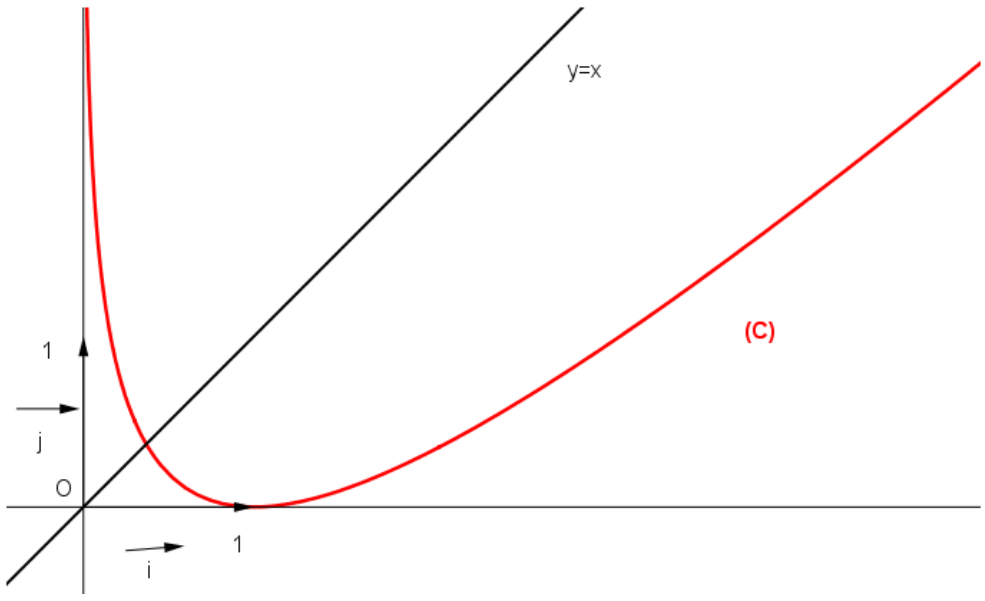
$\Leftrightarrow x=1$

$f(1)=0$.

Le tableau de variation de f :

x	0		1		$+\infty$
f'(x)	‖	−	0	+	
f	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

4) La courbe (C) de f :



5) $g(x) = x \ln x \ ; \ x \in 0, +\infty$.

a) $g'(x) = \left(x \ln x \right)' = \ln x + x \dfrac{1}{x} = 1 + \ln x \ ; \ x \in 0, +\infty$.

b) A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 1$ et $x = e$.

$$A = \int_1^e f(x)\,dx = \int_1^e x - 1 - \ln x \ dx = \int_1^e x - g'(x) \ dx = \left[\frac{1}{2}x^2 - g(x) \right]_1^e$$

$$= \left(\frac{1}{2}e^2 - g(e) \right) - \left(\frac{1}{2} - g(1) \right) = \frac{1}{2}e^2 - e - \frac{1}{2} \text{ u.a.}$$

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ***** **EXAMEN DU BACCALAURÉAT**	Épreuve : **MATHÉMATIQUES**	
	Section : Économie et Gestion	
	Durée : 2H	Coefficient : 2
SESSION 2016	**Session de contrôle**	

Le sujet comporte 4 pages. La page 4 /4 est à rendre avec la copie.

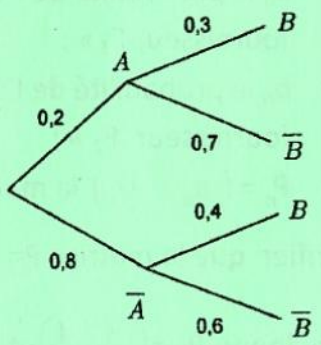
Exercice 1 (4 points):

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est correcte.

Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondant à la réponse choisie.

Aucune justification n'est demandée.

I) Une expérience aléatoire est modélisée par l'arbre pondéré ci-contre où A et B sont deux événements et $\overline{A}$ et $\overline{B}$ leurs événements contraires respectifs.



1) La probabilité de l'événement $A \cap B$ est égale à :

a) 0,06 b) 0,5 c) 0,3

2) La probabilité de l'événement $\overline{B}$ est égale à :

a) 0,14 b) 0,48 c) 0,62

II) X est une variable aléatoire qui suit une loi binomiale de paramètres 5 et 0,3

1) L'espérance mathématique de X est égale à :

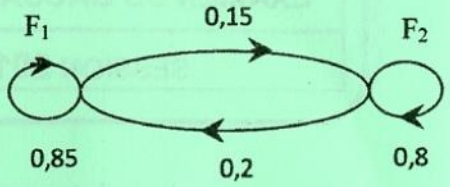
a) 2,1 b) 1,5 c) 1,05

2) La variance de X est égale à :

a) 1,05 b) 1,5 c) 0,45

Exercice 2 (5 points) :

Un commerçant commande chaque semaine ses besoins auprès de l'un de deux fournisseurs F_1 et F_2. Le choix de l'un de deux fournisseurs d'une semaine à l'autre est modélisé par le graphe probabiliste (G) ci-contre où :



(G)

- Le sommet F_1 désigne l'état : « La commande est passée auprès du fournisseur F_1 » .
- Le sommet F_2 désigne l'état : « La commande est passée auprès du fournisseur F_2 ».

1) a) Lorsque la commande est passée auprès du fournisseur F_1, quelle est la probabilité qu'elle le soit encore la semaine suivante ?

b) Recopier et compléter la matrice de transition $M = \begin{pmatrix} 0,85 & \dots \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$ de ce graphe en prenant les sommets F_1 et F_2 dans cet ordre.

2) Pour tout entier naturel non nul n, on désigne par :

- a_n la probabilité de l'évènement : « la semaine n la commande est passée auprès du fournisseur F_1 » ;
- b_n la probabilité de l'évènement : « la semaine n la commande est passée auprès du fournisseur F_2 » ;
- $P_n = (a_n \quad b_n)$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste pour la semaine n.

Vérifier que la matrice $P = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix}$ traduit l'état stable de la situation.

3) On donne $P_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$ et on admet que pour tout entier naturel non nul n :

$$M^n = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4+3(0,65)^n & 3-3(0,65)^n \\ 4-4(0,65)^n & 3+4(0,65)^n \end{pmatrix}.$$

a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n , $7P_1M^{n-1} = \begin{pmatrix} 4-(0,65)^{n-1} & 3+(0,65)^{n-1} \end{pmatrix}$.

b) En déduire que pour tout entier naturel non nul n , $a_n - b_n = \frac{1-2(0,65)^{n-1}}{7}$.

c) Déterminer le rang de la semaine où, pour la première fois, la probabilité que le commerçant commande ses fournitures auprès du fournisseur F_1 dépasse la probabilité que le commerçant commande ses fournitures auprès du fournisseur F_2.

Exercice 3 (6 points) :

Dans la feuille annexe jointe (à rendre avec la copie), (C) est la courbe représentative dans un repère orthonormé $(o,\vec{i},\vec{j})$ d'une fonction f définie et dérivable sur IR.

L'axe des abscisses est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $-\infty$.

La courbe (C) admet une branche parabolique de direction celle de l'axe des ordonnées au voisinage de $+\infty$.

La courbe (C) admet une unique tangente horizontale et ce au point A (0,-1).

1) a) Donner f(0), f '(0), $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

2) Soit g la restriction de f à l'intervalle $[0;+\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $[0;+\infty[$ sur un intervalle que l'on précisera (On notera g^{-1} la fonction réciproque de g).

b) Tracer dans le même repère de la feuille annexe la courbe (C') de la fonction g^{-1}.

3) On admet que pour tout réel x de $[0;+\infty[$ $g(x)= (x-1)e^x$.

a) Montrer que pour tout $x \in [0;+\infty[$ $g(x) = g'(x) - e^x$ où g' est la fonction dérivée de g.

b) Montrer que $\int_0^1 g(x)dx = 2-e$.

4) a) Hachurer la partie (S) du plan limitée par la courbe(C), l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation x=1.

b) Calculer l'aire de (S).

<u>Exercice 4</u> (5points) :

On considère la suite (U_n) définie sur IN par : $\begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2 \; ; \; n \in IN \end{cases}$

1) a) Calculer U_1 et U_2.

b) Montrer que (U_n) n'est ni arithmétique ni géométrique.

2) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n > 3$.

3) Soit la suite (V_n) définie sur IN par $V_n = \ln(U_n - 3)$.

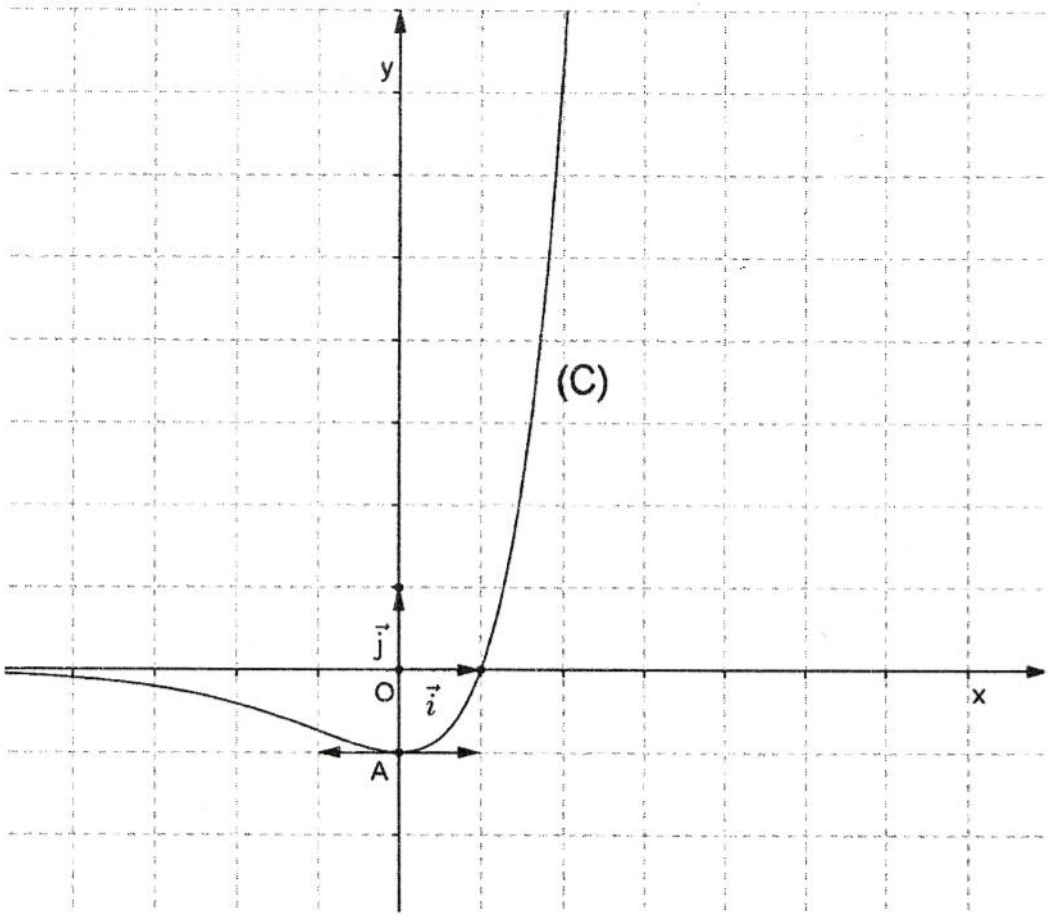
a) Montrer que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} = V_n - \ln 3$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $V_n = \ln 2 - n \ln 3$

c) Montrer que pour tout entier naturel n, $U_n = 3 + \frac{2}{3^n}$.

d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n$.

Annexe (à rendre avec la copie)



Examen du baccalauréat **Session de contrôle**

Session de Juin 2016

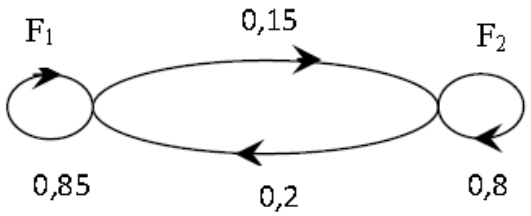
Section : Économie et gestion

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

	I)		II)	
Question	1)	2)	1)	2)
Réponse	a	c	b	a

Exercice 2



1)a) La probabilité est passée auprès du fournisseur F_1. La probabilité qu'elle le soit encore la semaine suivante est $p(F_1 / F_1) = 0{,}85$.

b) La matrice de transition du graphe $M = \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix}$.

2) Pour tout entier naturel non n, on désigne par :

- a_n la probabilité de l'évènement : « la semaine n la commande est auprès du fournisseur F_1 ».
- b_n la probabilité de l'évènement : « la semaine n la commande est auprès du fournisseur F_2».
- $P_n = a_n \quad b_n$ la matrice ligne décrivant l'état probabiliste pour la semaine n.

$$P \times M = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0{,}85 & 0{,}15 \\ 0{,}2 & 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} \times 0{,}85 + \frac{3}{7} \times 0{,}2 & \frac{4}{7} \times 0{,}15 + \frac{3}{7} \times 0{,}8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{4}{7} & \frac{3}{7} \end{pmatrix} = P.$$

$P \times M = P$, d'où la matrice P traduit l'état stable de la situation.

3) $P_1 = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix}$; $M^n = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 4 + 3(0{,}65)^n & 3 - 3(0{,}65)^n \\ 4 - 4(0{,}65)^n & 3 + 4(0{,}65)^n \end{pmatrix}$.

a) $7P_1M^{n-1} = \begin{pmatrix} \frac{3}{7} & \frac{4}{7} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 + 3(0{,}65)^{n-1} & 3 - 3(0{,}65)^{n-1} \\ 4 - 4(0{,}65)^{n-1} & 3 + 4(0{,}65)^{n-1} \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} \frac{3}{7}\ 4 + 3(0{,}65)^{n-1} + \frac{4}{7}\ 4 - 4(0{,}65)^{n-1} & \frac{3}{7}\ 3 - 3(0{,}65)^{n-1} + \frac{4}{7}\ 3 + 4(0{,}65)^{n-1} \end{pmatrix}$$

$$= \ 4 - (0{,}65)^{n-1} \qquad 3 + 4(0{,}65)^{n-1}$$

b) $P_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n \end{pmatrix} = P_1 M^{n-1} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4-(0,65)^{n-1} & 3+(0,65)^{n-1} \end{pmatrix}$

D'où $\begin{cases} a_n = \frac{1}{7}\left(4-(0,65)^{n-1}\right) \\ b_n = \frac{1}{7}\left(3+(0,65)^{n-1}\right) \end{cases}$

$$a_n - b_n = \frac{1}{7}\left(4-(0,65)^{n-1}\right) - \frac{1}{7}\left(3+(0,65)^{n-1}\right) = \frac{1}{7}\left(1-2(0,65)^{n-1}\right) = \frac{1-2(0,65)^{n-1}}{7}.$$

c) Le rang de la semaine où, pour la première fois, la probabilité que le commerçant commande auprès du fournisseur F_1 dépasse la probabilité que le commerçant commande auprès du fournisseur F_2 :

$$\begin{aligned} a_n > b_n &\Leftrightarrow a_n - b_n > 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{1-2(0,65)^{n-1}}{7} > 0 \\ &\Leftrightarrow 1-2(0,65)^{n-1} > 0 \\ &\Leftrightarrow 2(0,65)^{n-1} < 1 \\ &\Leftrightarrow (0,65)^{n-1} < \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow (n-1)\ln(0,65) < \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\ &\Leftrightarrow (n-1)\ln(0,65) < -\ln 2 \\ &\Leftrightarrow (n-1)\ln(0,65) < -\ln 2 \\ &\Leftrightarrow n-1 > -\frac{\ln 2}{\ln(0,65)} \\ &\Leftrightarrow n > 1-\frac{\ln 2}{\ln(0,65)} \simeq 2,61 \end{aligned}$$

D'où le rang $n = 3$.

Exercice 3

1)a) $f(0) = -1$; $f'(0) = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

b) Le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f	0	↘	-1	↗	$+\infty$

2)a) La fonction g est continue et strictement croissante sur $]0, +\infty[$, d'où g réalise une bijection de $]0, +\infty[$ sur $g(]0, +\infty[) =]-1, +\infty[$.

b) Voir figure.

3)a) $g(x) = (x-1)e^x$; $x \in]0, +\infty[$.

$g'(x) = (x-1)e^x)' \; ; \; x \in]0, +\infty[$

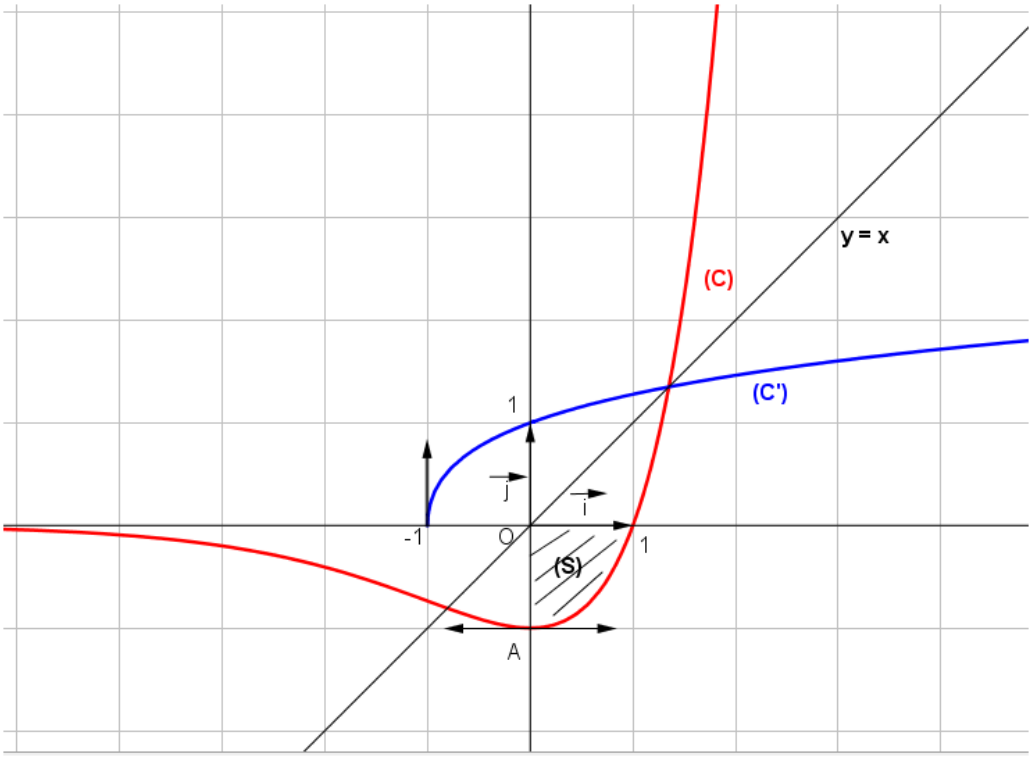
$= e^x + (x-1)e^x = e^x + g(x)$

D'où $g(x) = g'(x) - e^x$; pour tout $x \in]0, +\infty[$.

b) $\int_0^1 g(x)\,dx = \int_0^1 g'(x) - e^x \,dx = \left[g(x) - e^x\right]_0^1 = g(1) - e - g(0) - 1 = -e + 2 = 2 - e.$

4)a) (S) la partie du plan limitée par la courbe (C) de f, l'axe des abscisses, l'axe des ordonnées et la droite d'équation $x = 1$. Voir figure.

b) aire $S = \int_0^1 -g(x)\,dx = -\int_0^1 g(x)\,dx = e - 2$ u.a.



Exercice 4

$$(U_n) : \begin{cases} U_0 = 5 \\ U_{n+1} = \frac{1}{3}U_n + 2 \; ; \; n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1)a) $U_1 = \frac{1}{3}U_0 + 2 = \frac{1}{3} \times 5 + 2 = \frac{5}{3} + \frac{6}{3} = \frac{11}{3}.$

$U_2 = \frac{1}{3}U_1 + 2 = \frac{1}{3} \times \frac{11}{3} + 2 = \frac{11}{9} + \frac{18}{9} = \frac{29}{9}$

b) $U_2 - U_1 = \frac{29}{9} - \frac{11}{3} = \frac{29}{9} - \frac{33}{9} = -\frac{4}{9}$; $U_1 - U_0 = \frac{11}{3} - 5 = \frac{11}{3} - \frac{15}{3} = -\frac{4}{3}$.

$U_2 - U_1 \neq U_1 - U_0$; d'où (U_n) n'est pas une suite arithmétique.

$\frac{U_1}{U_0} = \frac{\frac{11}{3}}{5} = \frac{11}{15}$; $\frac{U_2}{U_1} = \frac{\frac{29}{9}}{\frac{11}{3}} = \frac{29}{9} \times \frac{3}{11} = \frac{29}{33}$

$\frac{U_2}{U_1} \neq \frac{U_1}{U_0}$; d'où (U_n) n'est pas une suite géométrique.

2) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n > 3$.

- $U_0 = 5 > 3$, d'où l'inégalité est vérifiée pour $n = 0$.
- Soit $n \in IN$ supposons que l'inégalité est vraie pour n, c'est-à-dire $U_n > 3$.
- Montrons que l'inégalité est vraie pour $n+1$.

$U_n > 3 \Rightarrow \frac{1}{3}U_n > 1$

$\Rightarrow \frac{1}{3}U_n + 2 > 3$

$\Rightarrow U_{n+1} > 3$; d'où l'inégalité est vraie pour $n+1$.

D'après le principe de raisonnement par récurrence, $U_n > 3$, pour tout $n \in IN$.

3) $V_n = \ln U_n - 3$; $n \in IN$

a) $V_{n+1} = \ln U_{n+1} - 3 = \ln\left(\frac{1}{3}U_n - 1\right)$

$= \ln\left(\frac{1}{3}(U_n - 3)\right) = \ln\left(\frac{1}{3}\right) + \ln U_n - 3 = V_n - \ln 3$

Ainsi $V_{n+1} = V_n - \ln 3$; pour tout $n \in IN$

b) On a : $V_{n+1} = V_n - \ln 3$; pour tout $n \in IN$.

$V_1 = V_0 - \ln 3$
$V_2 = V_1 - \ln 3$
$\oplus$ . . .
. . .
$V_{n-1} = V_{n-2} - \ln 3$
$V_n = V_{n-1} - \ln 3$

$V_1 + V_2 + ... + V_{n-1} + V_n = V_0 + V_1 + V_2 + ... + V_{n-2} + V_{n-1} - n\ln 3$

$\Leftrightarrow V_n = V_0 - n\ln 3 = \ln U_0 - 3 - n\ln 3 = \ln 2 - n\ln 3$

c) On a : $V_n = \ln 2 - n\ln 3$; pour tout $n \in IN$

$V_n = \ln 2 - n\ln 3 = \ln 2 - \ln 3^n = \ln\left(\frac{2}{3^n}\right)$; d'autre part $V_n = \ln U_n - 3$; $n \in IN$

D'où $\ln U_n - 3 = \ln\left(\frac{2}{3^n}\right) \Leftrightarrow U_n - 3 = \frac{2}{3^n}$

$\Leftrightarrow U_n = 3 + \frac{2}{3^n}$; pour tout $n \in IN$

d) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(3 + \frac{2}{3^n}\right) = 3.$

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◇◇◇◇ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION **2015**	Epreuve : **MATHEMATIQUES**
	Durée : 2 H
	Coefficient : 2
Section : Economie et Gestion	**Session principale**

Exercice 1 (4 points)

Soit (U_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1+2U_n} \quad ; n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) a- Calculer U_1 et U_2.

   b- Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n > 0$.

2) a- Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_{n+1} - U_n = \dfrac{-2U_n^{\,2}}{1+2U_n}$.

   b- En déduire que la suite (U_n) est décroissante.

   c- Prouver alors, que la suite (U_n) est convergente.

3) a- Calculer le réel ℓ tel que, $\ell = \dfrac{\ell}{1+2\ell}$.

   b- En déduire la limite de la suite (U_n).

Exercice 2 (4 points)

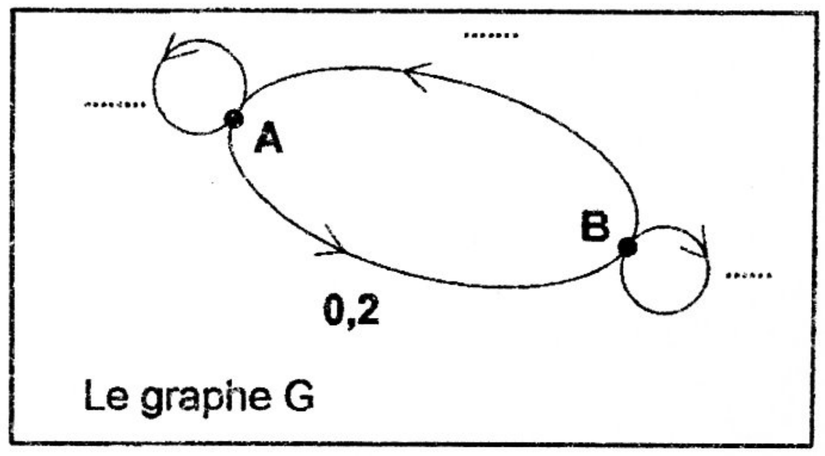
Une compagnie d'assurance propose deux formules A et B d'assurance autos.

Une personne désirant s'affiler à cette compagnie choisit **une seule** de ces deux formules.

- Au bout d'une année, chaque affilé peut garder la même formule ou changer de formule l'année suivante.
- La probabilité qu'un affilé à la formule A change de formule, vers la formule B, l'année suivante est égale 0,2.

Le graphe G ci-contre est le graphe probabiliste décrivant l'évolution du choix de l'affilé d'une année à l'autre.

Soit $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$ la matrice de transition associée au graphe G.



Le graphe G

1) Recopier et compléter le graphe G.
2) Donner :
   a) La probabilité qu'un affilé à la formule B garde la même formule B l'année suivante.
   b) La probabilité qu'un affilé à la formule B change de formule, vers la formule A, l'année suivante.
3) Soit $P_0 = (0,3 \quad 0,7)$ la matrice ligne qui décrit l'état initial. Donner la matrice ligne P_1 décrivant l'état probabiliste après une année.
4) Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ traduit l'état stable de la situation.

Exercice 3 (6 points)

On considère les matrices $M=\begin{pmatrix}1 & 4 & 2\\ 3 & 2 & 3\\ 2 & 1 & 2\end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix}-1 & 6 & -8\\ 0 & 2 & -3\\ 1 & -7 & 10\end{pmatrix}$

1) a- Calculer le déterminant de M, en déduire que M est inversible.

   b- Calculer la matrice $M\times N$, en déduire la matrice inverse M^{-1} de M.

   c- Résoudre, dans $\mathbb{R}^3$, le système (S) : $\begin{cases}x+4y+2z=110\\ 3x+2y+3z=120\\ 2x+y+2z=75\end{cases}$

2) Un atelier fabrique trois sortes de pièces mécaniques A, B et C.

- Les bénéfices unitaires sont : 60 Dinars pour A, 50 Dinars pour B et 40 Dinars pour C.
- L'atelier utilise trois machines X, Y et Z pour fabriquer les pièces A, B et C.
- Le temps unitaire (exprimé en heures) de passage de chaque pièce sur ces machines est donné par le tableau suivant :

Pièce / Machine	A	B	C
X	1	4	2
Y	3	2	3
Z	2	1	2

- Les capacités hebdomadaires, exprimées en heures, des machines X, Y et Z sont respectivement : 110, 120 et 75 (ce qui correspond au cas où les machines X, Y et Z travaillent à plein temps).
- On note respectivement a, b et c les nombres hebdomadaires (exprimés en dizaines) de pièces A, B et C fabriquées quand les trois machines X, Y et Z travaillent à plein temps.

a- Montrer que le triplet (a , b , c) vérifie le système (S) donné en 1) c).

b- Déterminer alors a, b et c.

c- Déterminer le bénéfice hebdomadaire gagné par l'entreprise quand les trois machines X, Y et Z travaillent à plein temps.

Exercice 4 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{-2}{1+e^x}$ et (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a-Calculer $f(0)$.

   b- Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ puis interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) a- Montrer que pour tout réel x, $f'(x)=\dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2}$.

   b- Dresser le tableau de variation de f.

   c- Donner une équation de la tangente (T) à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

   d- Tracer, dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, la tangente (T) et la courbe (C).

3) a- Montrer que f réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle J que l'on précisera.

   b- Tracer, dans le repère $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$, la courbe (Γ) représentative de la fonction réciproque f^{-1} de f.

4) a- Montrer que $I=\int_0^{ln2}\dfrac{e^x}{1+e^x}dx=\ln\dfrac{3}{2}$.

   b- Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{2e^x}{1+e^x}-2$.

   c- Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C) de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\ln 2$.

Examen du baccalauréat **Session principale**

Session de Juin 2015

Section : Économie et gestion

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

On a la suite (u_n) définie par : $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+2u_n}$.

1)a) $u_1 = \dfrac{u_0}{1+2u_0} = \dfrac{1}{3}$; $u_2 = \dfrac{u_1}{1+2u_1} = \dfrac{\frac{1}{3}}{1+2\times\frac{1}{3}} = \dfrac{1}{5}$.

b) Montrons par récurrence que $u_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

- $u_0 = 1 > 0$ d'où l'inégalité est vérifiée pour $n = 0$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons que l'inégalité est vraie pour n. C'est-à-dire $u_n > 0$.
- Montrons que l'inégalité est vraie pour $n+1$.

  On a $u_n > 0 \Rightarrow 1+2u_n > 0$

  $\Rightarrow \dfrac{u_n}{1+2u_n} > 0$

  $\Rightarrow u_{n+1} > 0$.

  D'où l'inégalité est vraie pour n+1.

Ainsi d'après le principe de raisonnement par récurrence, $u_n > 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2)a) $u_{n+1} - u_n = \dfrac{u_n}{1+2u_n} - u_n = \dfrac{u_n - u_n(1+2u_n)}{1+2u_n} = \dfrac{u_n - u_n - 2u_n^2}{1+2u_n} = \dfrac{-2u_n^2}{1+2u_n}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

b) On a $u_n > 0 \Rightarrow 1+2u_n > 0$ et $-2u_n^2 < 0$

$\Rightarrow \dfrac{-2u_n^2}{1+2u_n} < 0$

$\Rightarrow u_{n+1} - u_n < 0$

$\Rightarrow u_{n+1} < u_n$

$u_{n+1} < u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. D'où la suite (u_n) est décroissante.

c) La suite (u_n) est minorée par (-1) puisque $u_n > -1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$.

La suite (u_n) est décroissante et minorée, donc elle converge.

3)a) Soit $\ell \in \mathbb{R}$.

$\ell = \dfrac{\ell}{1+2\ell} \Leftrightarrow \ell(1+2\ell) = \ell \ ; \ \ell \neq -\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2\ell^2 = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$

b) On a $u_0 = 1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+2u_n}$

D'où pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ où f est la fonction définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{x}{1+2x}$.

La suite (u_n) est convergente. Soit ℓ sa limite.

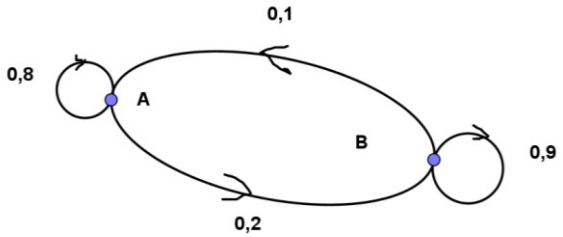
La fonction f est continue sur $[0,+\infty[$, d'où $f(\ell)=\ell$.

$f(\ell)=\ell \Leftrightarrow \ell = \dfrac{\ell}{1+2\ell} \Leftrightarrow \ell = 0.$ (d'après 3)a)). Ainsi la suite (u_n) converge vers 0.

Exercice 2

La matrice de transition associée au graphe G est $M = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$.

1) Le graphe G.



2)a) La probabilité qu'un affilé à la formule B garde la même formule l'année suivante est 0,9.

b) La probabilité qu'un affilé à la formule B change de formule, vers la formule A, l'année suivante est 0,1.

3) Soit $P_0 = (0,3 \;\; 0,7)$ la matrice ligne qui décrit l'état initial.

On a $P_1 = P_0 \times M = (0,3 \;\; 0,7)\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix}$

$= (0,3\times 0,8 + 0,7\times 0,1 \quad 0,3\times 0,2 + 0,7\times 0,9) = (0,31 \;\; 0,69).$

4) Pour montrer que $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ est la matrice qui traduit l'état stable, il suffit de montrer que $P \times M = P$.

$P \times M = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,1 & 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\times 0,8 + \frac{2}{3}\times 0,1 & \frac{1}{3}\times 0,2 + \frac{2}{3}\times 0,9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = P.$

D'où la matrice $P = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$ traduit l'état stable de la situation.

Exercice 3

On considère les matrices $M=\begin{pmatrix}1&4&2\\3&2&3\\2&1&2\end{pmatrix}$ et $N=\begin{pmatrix}-1&6&-8\\0&2&-3\\1&-7&10\end{pmatrix}$.

1)a) $\det(M)=\begin{vmatrix}1&4&2\\3&2&3\\2&1&2\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}2&3\\1&2\end{vmatrix}-3\times\begin{vmatrix}4&2\\1&2\end{vmatrix}+2\times\begin{vmatrix}4&2\\2&3\end{vmatrix}=1-3\times4+2\times8=5.$

$\det(M)\neq0$, d'où la matrice M est inversible.

b) $M\times N=\begin{pmatrix}1&4&2\\3&2&3\\2&1&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1&6&-8\\0&2&-3\\1&-7&10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=I_3$

$M\times N=I_3$, d'où $M^{-1}=N$. L'inverse de M est N.

c) $(S):\begin{cases}x+4y+2z=110\\3x+2y+3z=120\\2x+y+2z=75\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&4&2\\3&2&3\\2&1&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}110\\120\\75\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1&6&-8\\0&2&-3\\1&-7&10\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&4&2\\3&2&3\\2&1&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&6&-8\\0&2&-3\\1&-7&10\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}110\\120\\75\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1&6&-8\\0&2&-3\\1&-7&10\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}110\\120\\75\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-110+6\times120-8\times75\\0\times110+2\times120-3\times75\\1\times110-7\times120+10\times75\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}10\\15\\20\end{pmatrix}.$$

D'où $S_{\mathbb{R}^3}=\{(10,15,20)\}$.

2)a) a, b et c les nombres (exprimés en dizaines) de pièces A, B et C fabriquées par les machines X, Y et Z travaillant en plein temps.

Le temps de passage des pièces A, B et C par la machine X est $a+4b+2c$ heures.

Le temps de passage des pièces A, B et C par la machine Y est $3a+3b+3c$ heures.

Le temps de passage des pièces A, B et C par la machine Z est $2a+b+2c$ heures.

D'autre part on a les capacités hebdomadaires, exprimés en heures, des machines X, Y et Z sont respectivement 110, 120 et 75.

Ainsi $\begin{cases}a+4b+2c=110\\3a+2b+3c=120\\2a+b+2c=75\end{cases}$. Ce qui prouve que le triplet (a,b,c) vérifie le système (S).

b) Le triplet (a,b,c) vérifie le système (S), d'où $(a,b,c)=(10,15,20)$.

Ainsi $a=10,\ b=15$ et $c=20$.

c) Le bénéfice hebdomadaire gagné par l'entreprise quand les trois machines X, Y et Z travaillent en plein temps est : $60a+50b+40c=60\times10+50\times15+40\times20=2150$ dinars.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\dfrac{-2}{1+e^x}$. (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1)a) $f(0)=\dfrac{-2}{1+e^0}=-1$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{-2}{1+e^x}=-2$, car $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x=0$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-2}{1+e^x}=0$, car $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x=+\infty$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-2$, d'où la courbe (C) de f admet une asymptote horizontale d'équation $y=-2$ au voisinage de $(-\infty)$.

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, d'où la courbe (C) de f admet une asymptote horizontale d'équation $y=0$ au voisinage de $(+\infty)$.

2)a) $f(x)=\dfrac{-2}{1+e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

$f'(x)=\dfrac{2(1+e^x)'}{(1+e^x)^2}=\dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2}$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

b) $f'(x)=\dfrac{2e^x}{(1+e^x)^2}>0$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f'(x)		+	
f	-2	↗ 0	

c) (T) la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0.

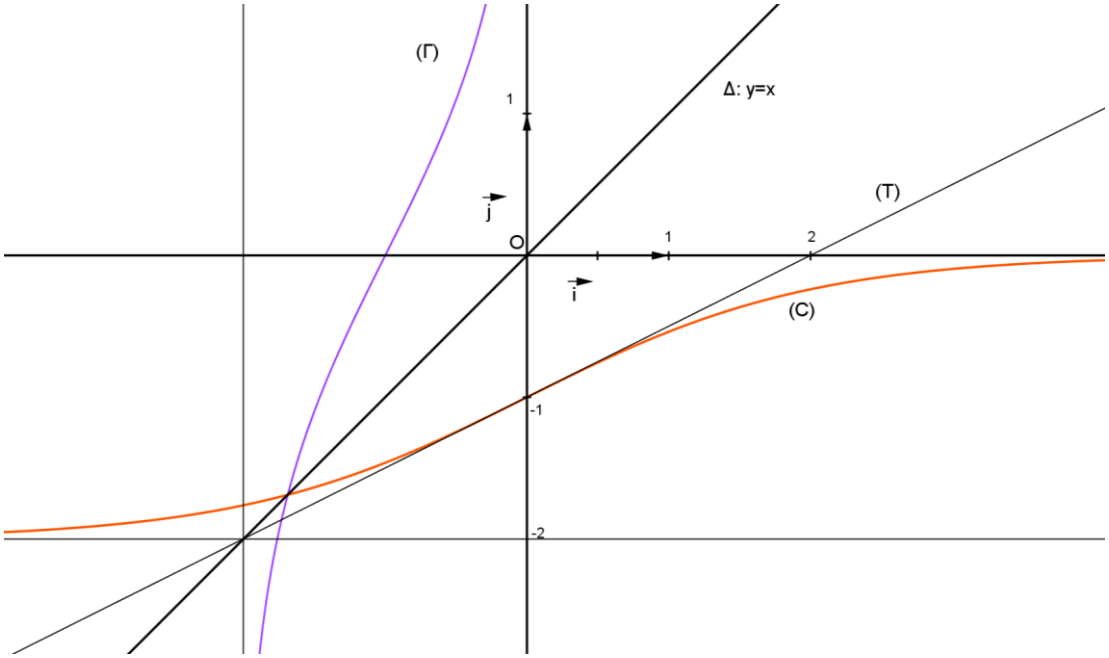
$(T): y=f'(0)(x-0+f(0)$

$(T): y=\dfrac{1}{2}x-1$.

d) Voir figure

3)a) La fonction f est continue et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, d'où elle réalise une bijection de $\mathbb{R}$ sur $f(\mathbb{R})=[-2,+\infty[$.

b) Voir figure.



4)a) $I=\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{1+e^x}dx=\left[\ln(1+e^x)\right]_0^{\ln 2}=\ln(1+e^{\ln 2})-\ln(1+e^0)=\ln 3-\ln 2=\ln\frac{3}{2}$.

b) $f(x)=\frac{-2}{1+e^x}$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

$\frac{2e^x}{1+e^x}-2=\frac{2e^x-2(1+e^x)}{1+e^x}=\frac{-2}{1+e^x}=f(x)$.

D'où $f(x)=\frac{2e^x}{1+e^x}-2$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

c) Soit A l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C) de f, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=\ln 2$.

$$A=\int_0^{\ln 2}-f(x)dx=-\int_0^{\ln 2}\left(\frac{2e^x}{1+e^x}-2\right)dx=-2\int_0^{\ln 2}\frac{e^x}{1+e^x}dx+\int_0^{\ln 2}2dx$$

$$=-2\ln\frac{3}{2}+\left[2x\right]_0^{\ln 2}=-2\ln\frac{3}{2}+2\ln 2=2\left(\ln\frac{2}{3}+\ln 2\right)=2\ln\frac{4}{3}\ \text{unité d'aire}.$$

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◈◈◈◈ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION **2015**	Épreuve : **MATHEMATIQUES**
	Durée : 2 H
	Coefficient : 2
Section : **Economie et Gestion**	**Session de contrôle**

Exercice 1 (4 points)

Pour chaque question une seule des trois réponses proposées est exacte. Recopier, chaque fois, sur votre copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse exacte. Aucune justification n'est demandée.

I- Soit G un graphe non orienté dont la matrice associée est $M=\begin{pmatrix}0&1&1&0&1\\1&0&1&1&1\\1&1&0&0&0\\0&1&0&0&0\\1&1&0&0&0\end{pmatrix}$.

1) L'ordre du graphe G est égal à

a) 5 b) 6 c) 12

2) Le graphe G :

a) est complet b) admet une chaine eulérienne c) admet un cycle eulérien.

II- Soit (u_n) la suite réelle définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n=-1+(0,9)^n$

1) La suite (u_n) est

a) croissante b) décroissante c) n'est pas monotone

2) La limite de u_n quand $n\to+\infty$ est égale à

a) -1 b) 0 c) $+\infty$

Exercice 2 (5 points)

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&2\\3&4&5\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}7&-6&1\\-4&2&0\\-1&2&-1\end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

1) Calculer le déterminant de la matrice A et en déduire qu'elle est inversible.

2) a) Montrer que $AB+2I=0$ où 0 désigne la matrice nulle d'ordre 3.

b) En déduire que $A^{-1}=-\frac{1}{2}B$ où A^{-1} désigne la matrice inverse de A.

3) Soit, dans IR^3, le système $(S):\begin{cases}x+2y+z=-2\\2x+3y+2z=4\\3x+4y+5z=8\end{cases}$

a) Donner l'écriture matricielle du système (S).

b) En déduire l'ensemble des solutions du système (S).

Exercice 3 (5 points)

Le tableau ci-dessous donne les pourcentages des chômeurs en Tunisie pendant neuf trimestres successifs à compter du premier trimestre de l'année 2012.

x_i : rang du trimestre	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y_i : pourcentage des chômeurs	18,1	17,6	17	16,7	16,5	15,9	15,7	15,3	15,2

Source : I.N.S

1) Représenter, dans un repère orthogonal, le nuage des points de la série statistique (x_i, y_i).
Dans la suite, les résultats seront donnés à 10^{-2} prés par excès.
2) a- Calculer le coefficient de corrélation linéaire entre x et y.
b- Justifier l'existence d'un ajustement affine entre x et y.
3) a- Donner une équation de la droite de régression de y en x par la méthode des moindres carrés.
b- Estimer le pourcentage des chômeurs en Tunisie pendant le deuxième trimestre de l'année 2015.

Exercice 4 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{1+\ln x}{x}$

On désigne par(C) sa courbe représentative dans un plan muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$.

1) a- Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat obtenu.

b- En remarquant que $f(x)=\dfrac{1}{x}+\dfrac{\ln x}{x}$, calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et interpréter graphiquement ce résultat.

2) a- Montrer que pour tout $x\in]0,+\infty[$, $f'(x)=-\dfrac{\ln x}{x^2}$ et calculer $f'(1)$.

b- Dresser alors le tableau de variation de f.

c- Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α que l'on précisera.

d-Tracer la courbe (C).

2) Soit F la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $F(x)=\dfrac{1}{2}(2+\ln x)\ln x$.

a- Montrer que F est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

b- Soit $\mathcal{R}$ la région du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=e^{-1}$ et $x=1$. Hachurer cette région et calculer son aire.

Examen du baccalauréat **Session de contrôle**

Session de Juin 2015

Section : Économie et gestion

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

I)		II)	
1)	2)	1)	2)
a	b	b	a

Exercice 2

On considère les matrices $A=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&2\\3&4&5\end{pmatrix}$ $B=\begin{pmatrix}7&-6&1\\-4&2&0\\-1&2&-1\end{pmatrix}$ et $I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$.

1) $\text{dét}(A)=\begin{vmatrix}1&2&1\\2&3&2\\3&4&5\end{vmatrix}=1\times\begin{vmatrix}3&2\\4&5\end{vmatrix}-2\times\begin{vmatrix}2&1\\4&5\end{vmatrix}+3\times\begin{vmatrix}2&1\\3&2\end{vmatrix}=7-2\times6+3\times1=-2.$

$\text{dét}(A)\neq0$, d'où la matrice A est inversible.

2)a) $A\times B+2I=\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&2\\3&4&5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}7&-6&1\\-4&2&0\\-1&2&-1\end{pmatrix}+2.\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

$=\begin{pmatrix}-2&0&0\\0&-2&0\\0&0&-2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}.$

b) $A\times B+2I=0$, où 0 est la matrice nulle d'ordre 3.

$A\times B+2I=0 \Leftrightarrow A\times B=-2I$

$\Leftrightarrow A\times\left(-\frac{1}{2}B\right)=I$

D'où l'inverse de A est $A^{-1}=-\frac{1}{2}B$.

3)a) $(S):\begin{cases}x+2y+z=-2\\2x+3y+2z=4\\3x+4y+5z=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&2&1\\2&3&2\\3&4&5\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\\8\end{pmatrix}.$

b) $(S):\begin{cases} x+2y+z=-2 \\ 2x+3y+2z=4 \\ 3x+4y+5z=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{2}B \times A \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}B \times \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 7 & -6 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ -8 \\ -1 \end{pmatrix}$$

D'où $S_{\mathbb{R}^3} = \{(15, -8, -1)\}$.

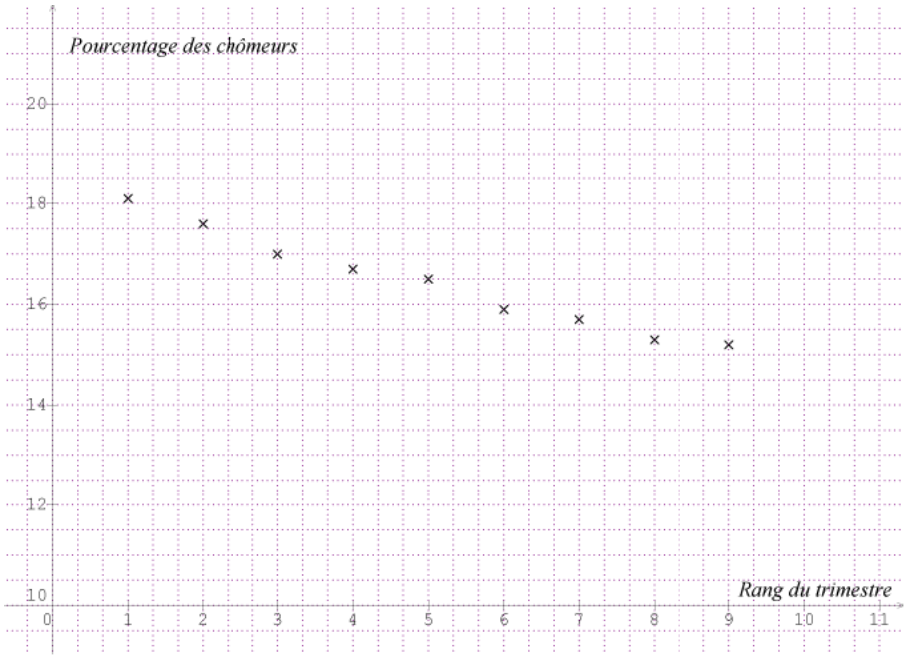
Exercice 3

Le tableau donne les pourcentages des chômeurs en Tunisie pendant neuf trimestres successifs à compter du premier trimestre de l'année 2012.

Rang du trimestre x_i	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Pourcentage des chômeurs y_i	18,1	17,6	17	16,7	16,5	15,9	15,7	15,3	15,2

Source : I.N.S

1) Le nuage des points de la série statistique (x_i, y_i).



2)a) $r(x, y) = -0,99$.

b) On peut remarquer que le nuage des points (x_i, y_i) est allongé suivant une droite.
Donc un ajustement affine entre x et y est justifié.

3)a) Une équation de la droite de régression de y en x est $y = -0{,}38x + 18{,}31$.

b) Le pourcentage des chômeurs en Tunisie pendant le deuxième trimestre de l'année 2015.
Le deuxième trimestre de l'année 2015 correspond à $x = 14$.
D'où $y = -0{,}38 \times 14 + 18{,}31 = 12{,}99 \simeq 13$.
Ainsi on estime le pourcentage des chômeurs en Tunisie pendant le deuxième trimestre de l'année 2015 à 13%.

Exercice 4

Soit f la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$. (C) sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1)a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1+\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x}(1+\ln x) = -\infty$, car $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} \ln x = -\infty$.

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = -\infty$, d'où l'axe des ordonnées est une asymptote à (C).

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1+\ln x}{x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} + \dfrac{\ln x}{x} = 0$, car $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$.

$\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$, d'où l'axe des abscisses est une asymptote horizontale pour (C).

2)a) $f(x) = \dfrac{1+\ln x}{x}$, $x \in]0, +\infty[$.

$$f'(x) = \frac{(1+\ln x)'x - (1+\ln x)}{x^2} = \frac{\frac{1}{x}.x - (1+\ln x)}{x^2} = \frac{-\ln x}{x^2},\ x \in]0, +\infty[.$$

$$f'(1) = \frac{-\ln 1}{1^2} = 0.$$

b) Le tableau de variation de f.

x	0		1		$+\infty$
f'(x)	‖	+	0	−	
f	‖ $-\infty$	↗	1	↘	0

c) On a $f([1, +\infty[) =]0, 1]$, d'où sur l'intervalle $[1, +\infty[$ f ne s'annule pas.

La fonction f est continue et strictement croissante sur $]0, 1]$, donc elle réalise une bijection de $]0, 1]$ sur $f(]0, 1]) =]-\infty, 1]$.

$0 \in]-\infty, 1]$, d'où il existe un unique réel $\alpha \in]0, 1]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

Ainsi l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α.

Soit $x \in]0,+\infty[$, $f(x)=0 \Leftrightarrow \dfrac{1+\ln x}{x}=0$

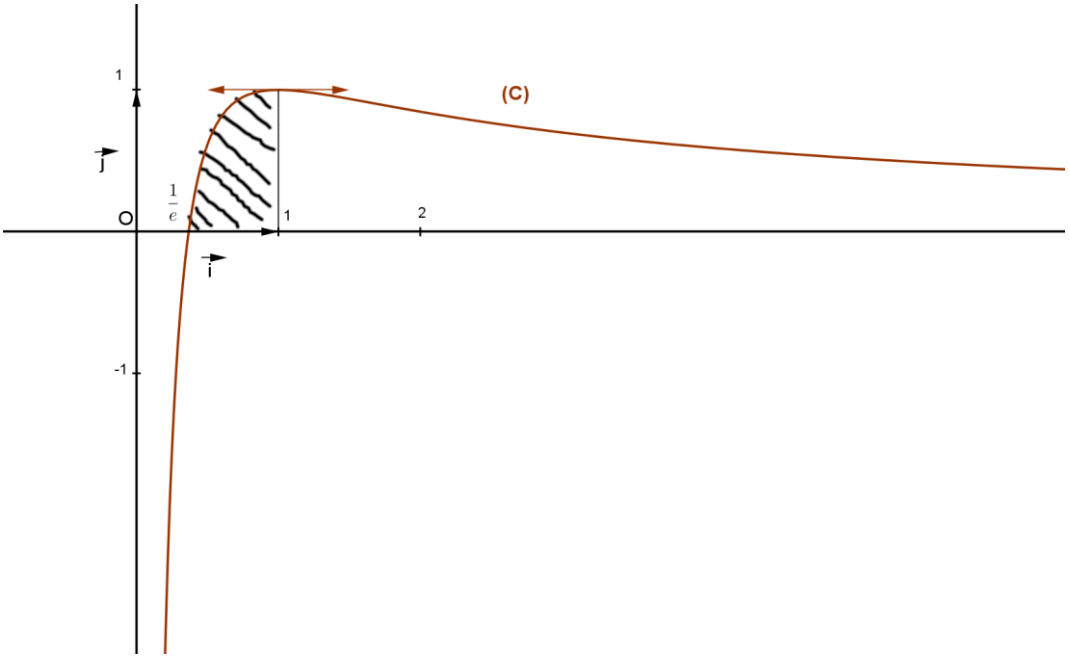
$\Leftrightarrow 1+\ln x=0$

$\Leftrightarrow \ln x=-1$

$\Leftrightarrow x=e^{-1}=\dfrac{1}{e}$.

Ainsi $\alpha=\dfrac{1}{e}$.

d) La courbe (C) de la fonction f :



3)a) Soit F la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $F(x)=\dfrac{1}{2}(2+\ln x)\ln x$.

La fonction $x \mapsto \ln x$ et la fonction $x \mapsto 2+\ln x$ sont dérivables sur $]0,+\infty[$, d'où F est dérivable sur $]0,+\infty[$.

$$F'(x)=\frac{1}{2}(2+\ln x)'\ln x+\frac{1}{2}(2+\ln x)(\ln x)'=\frac{1}{2}\frac{1}{x}\ln x+\frac{1}{2}(2+\ln x)\frac{1}{x}$$

$$=\frac{1}{2}\frac{1}{x}(2+2\ln x)=\frac{1+\ln x}{x}=f(x)$$

D'où F est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

b) R la région du plan délimitée par la courbe (C), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=e^{-1}$ et $x=1$. Soit A l'aire de cette région R.

$$A=\int_{e^{-1}}^{1} f(x)\,dx=[F(x)]_{e^{-1}}^{1}=F(1)-F(e^{-1})$$

$$=0-\frac{1}{2}(2+\ln e^{-1})\ln e^{-1}=-\frac{1}{2}(2+(-1))\times(-1)=\frac{1}{2}\text{ unité d'aire.}$$

Bac informatique

Page No.

math **I**

1 sp2020 2
2 sp2019 6
3 sp-c2019 10
4 sc2019 15
5 sc-c2019 19
6 sp2018 23
7 sp-c2018 27
8 sc2018 31
9 sc-c2018 34
10 sp2017 38
11 sp-c2017 41
12 sc2017 46
13 sc-c2017 49
14 sp2016 54
15 sp-c2016 57
16 sc2016 62
17 sc-c2016 65
18 sp2015 71
19 sp-c2015 73
20 sc2015 79
21 sc-c2015 81

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION EXAMEN DU BACCALAURÉAT SESSION 2020	**Session principale**	
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Sciences de l'informatique**
	Durée : **3h**	Coefficient de l'épreuve: **3**

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4 **(la page 4 /4 est à rendre avec la copie)**

Exercice 1 : (5 points)

On considère dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2-\left(3+3i\sqrt{3}\right)z-6+3i\sqrt{3}=0$.

1) a) Vérifier que $i\sqrt{3}$ est une solution de l'équation (E).

b) En déduire l'autre solution de l'équation (E).

2) Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O,\vec{u},\vec{v}\right)$. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A=i\sqrt{3}$, $z_B=3+2i\sqrt{3}$ et $z_C=3-2i\sqrt{3}$.

a) Calculer $\left(z_B-z_A\right)\left(\overline{z_C-z_A}\right)$.

b) En déduire que le triangle ABC est rectangle en A.

3) Dans la **figure** de l'annexe ci-jointe, on a placé le point A.

a) Soit D le point d'affixe $z_D=-3$. Montrer que le point A est le milieu du segment $[DB]$.

b) Placer les points D, B et C.

c) Montrer que l'aire du triangle DCB est égale à $12\sqrt{3}$.

Exercice 2 : (4,5 points)

Une enquête effectuée dans les laboratoires d'informatique d'un lycée équipés d'un lot d'ordinateurs de deux types D et L, achetés 5 ans plus tôt, montre que :

- 50% d'ordinateurs sont de type D.
- 59% d'ordinateurs de type D ont subi au moins une panne durant les 5 ans.
- 30% d'ordinateurs de type L n'ont subi aucune panne durant les 5 ans.

On choisit au hasard un ordinateur de ce lot et on considère les événements suivants :

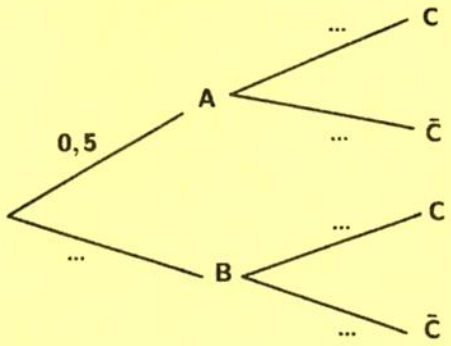
A : « L'ordinateur choisi est de type D ».

B : « L'ordinateur choisi est de type L ».

C : « L'ordinateur choisi a subi au moins une panne durant les 5 ans ».

1) Déterminer $p(C/A)$ et $p\left(\overline{C}/B\right)$.

2) Recopier et compléter l'arbre probabiliste ci-contre :



Dans la suite de l'exercice, on donnera les résultats arrondis à 10^{-2} près.

3) a) Montrer que la probabilité qu'un ordinateur n'a subi aucune panne durant les 5 ans est 0,36.

b) Déduire alors la probabilité que l'ordinateur choisi soit de type D sachant qu'il n'a subi aucune panne durant les 5 ans.

4) La durée de vie, exprimée en années, d'un ordinateur de type D (la durée de fonctionnement avant la première panne) est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0{,}18$.

a) Montrer que la probabilité qu'un ordinateur de type D ne subit aucune panne avant 6 ans est 0,34.

b) On veut équiper un nouveau laboratoire d'informatique d'un lot de 10 ordinateurs de type D. Quelle est la probabilité p que, dans ce lot, l'un au moins des ordinateurs ait une durée de vie supérieure à 6 ans ?

Exercice 3 : (6 points)

1) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1-(2x+1)e^{-2x}$.

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = 4xe^{-2x}$.

b) Etudier le sens de variation de g et déduire que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geq 0$.

2) Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x+1+(x+1)e^{-2x}$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ et montrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{f(x)}{x} = +\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

b) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ et que la droite $D : y = x+1$ est une asymptote à la courbe (C) au voisinage de $(+\infty)$.

c) Etudier la position relative de la courbe (C) par rapport à la droite D.

3) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = g(x)$ et dresser le tableau de variation de f.

4) a) Montrer que $A(0,2)$ est un point d'inflexion pour la courbe (C).

b) Déterminer une équation de la tangente T à la courbe (C) au point A.

c) Tracer D, T et (C).

5) Soit α un réel strictement supérieur à (-1).

On désigne par A_α l'aire, en unité d'aire, de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite D et les droites d'équations $x=-1$ et $x=\alpha$.

a) Par une intégration par parties, montrer que $A_\alpha = \frac{1}{4}e^2 - \left(\frac{1}{2}\alpha + \frac{3}{4}\right)e^{-2\alpha}$.

b) Calculer $\lim\limits_{\alpha \to +\infty} A_\alpha$.

Exercice 4 : (4,5 points)

On considère dans l'ensemble des entiers relatifs le système (S) : $\begin{cases} n \equiv 1[4] \\ n \equiv 3[5]. \end{cases}$

1) Vérifier que 13 est une solution de (S).

2) a) Montrer que si n est une solution de (S) alors $(n-13)$ est divisible par 4 et par 5.

b) Montrer que si un entier p est divisible par 4 et par 5 alors p est divisible par 20.

c) En déduire que si n est une solution de (S) alors $n-13 \equiv 0[20]$.

3) a) Vérifier que pour tous entiers relatifs n et k on a :

$n-13 = 20k$ si et seulement si $n-1 = 4(3+5k)$.

b) Montrer que si $n-13 \equiv 0[20]$ alors n est une solution du système (S).

c) En déduire l'ensemble des solutions du système (S).

4) Un puzzle contient N pièces, si on les range par 4 il en reste une seule pièce et si on les range par 5 il en reste 3 pièces.

Déterminer N sachant qu'il est compris entre 40 et 60.

Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....

Nom et Prénom : .....

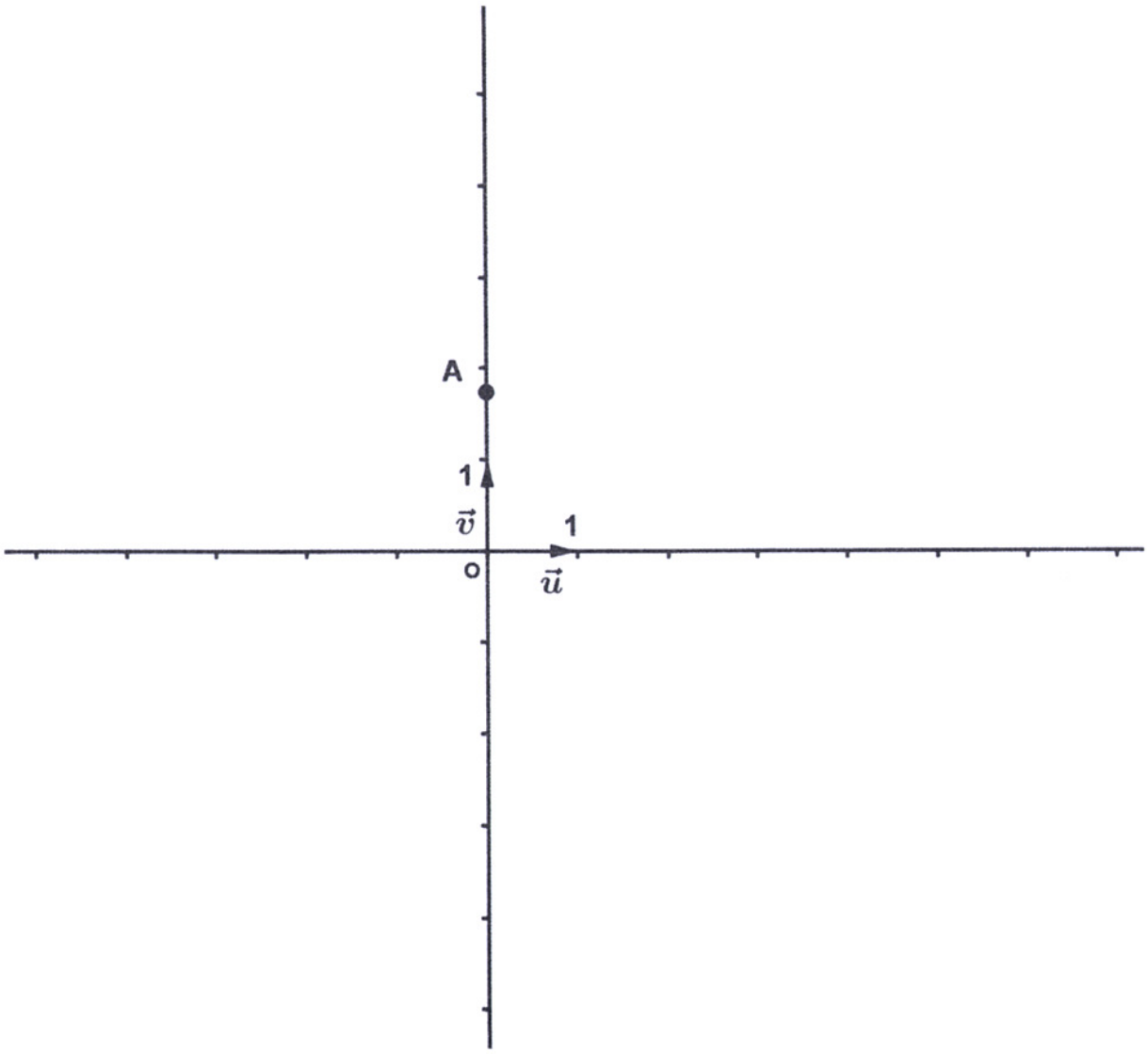
Date et lieu de naissance : .....

Signatures des surveillants

.....

.....

Épreuve: Mathématiques - Section : Sciences de l'informatique
Session principale (2020)
Annexe à rendre avec la copie



RÉPUBLIQUE TUNISIENNE **MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION** **EXAMEN DU BACCALAURÉAT** SESSION **2019**	**Session principale**	
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Sciences de l'informatique**
	Durée : **3h**	Coefficient de l'épreuve: **3**

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 :(6.5 points)

Soit la fonction f définie sur $[0,+\infty[$ par $f(x)=\ln(1+x^2)$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter graphiquement les résultats.

2) a) Calculer $f'(x)$, pour tout $x\geq 0$.

b) Montrer que pour tout $x\geq 0$, $f''(x)=\dfrac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$.

c) Déduire que le point $A(1,\ln 2)$ est un point d'inflexion de la courbe (C).

3) Dans l'annexe ci-jointe, on donne le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la courbe (C) et les points A, $E(0,\ln 2-1)$ et $K(1-\ln 2,0)$.

a) Soit T la tangente à (C) au point A. Montrer qu'une équation de T est $y=x-1+\ln 2$.

b) Montrer que T coupe l'axe des ordonnées au point E et l'axe des abscisses en K.

c) Tracer la tangente T dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4) Soit L l'aire du triangle OKE et S l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite T et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

a) Montrer que $L=\dfrac{(1-\ln 2)^2}{2}$.

b) Montrer que pour tout $x\in[0,1]$, $\ln(1+x^2)\leq\ln(1+x)$.

c) Montrer que pour tout $x\geq 0$, $\dfrac{x}{1+x}=1-\dfrac{1}{1+x}$.

d) En déduire que $\int_0^1 \ln(1+x)dx=2\ln 2-1$.

e) Montrer que $\dfrac{(1-\ln 2)^2}{2}\leq S\leq \ln 2-\dfrac{1}{2}$.

Exercice 2 :(4 points)

1) Pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $M_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & 2 \\ -2\alpha & -4 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que le déterminant de M_α est égal à $-4\alpha + 8$.

b) Pour quelle valeur de α, M_α est-elle non inversible ?

2) Dans cette question, on prend $\alpha = 2$ et on note $C = M_2$.

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$, le système (S) : $C\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

3) Dans cette question, on prend $\alpha = -2$ et on note $A = M_{-2}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

a) Montrer que $AxB = 4I_3$ où I_3 est la matrice unité d'ordre 3.

b) En déduire A^{-1} la matrice inverse de A.

c) Résoudre alors dans $\mathbb{R}^3$, le système (S') : $A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 :(4 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = 1, \\ u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} - 1. \end{cases}$

1) a) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 \le u_n \le 1$.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \sqrt{1+u_n}\left(1 - \sqrt{1+u_n}\right)$.

En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente et calculer sa limite.

2) On considère la suite (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = \ln\left(1+u_n\right)$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0 = \ln 2$.

b) Déterminer v_n puis u_n en fonction de n.

Exercice 4 :(5.5 points)

1) a) Vérifier que $(2 - 2i)^2 = -8i$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^2 - (2 + 8i)z - 15 + 10i = 0$.

2) Le plan complexe P est rapporté à un repère orthonormé direct.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $z_A = 2 + 3i$, $z_B = -1$ et $z_C = 5i$.

a) Calculer $(z_B - z_A)\overline{(z_C - z_A)}$.

b) En déduire que le triangle ABC est rectangle en A.

3) Soit x et y deux entiers tels que $y \neq 0$.

Dans le plan P, on considère les points M et N d'affixes respectives x et iy .On se propose de déterminer les affixes des points M et N tels que AMN est rectangle en A.

a) Montrer que $(z_M - z_A)\overline{(z_N - z_A)} = (-2x - 3y + 13) + i(-xy + 3x + 2y)$.

b) Montrer que $(-2x - 3y + 13) + i(-xy + 3x + 2y) \neq 0$.

c) Montrer que le triangle AMN est rectangle en A si et seulement si $2x + 3y = 13$.

4) Soit dans $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $2x + 3y = 13$.

a) En utilisant la question 2), donner une solution particulière de l'équation (E).

b) Résoudre dans $\mathbb{Z}x\mathbb{Z}$ l'équation (E).

c) Trouver les affixes des points M et N tels que AMN est rectangle en A et $-4 \leq x \leq 4$.

Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....

Nom et Prénom : .....

Date et lieu de naissance : .....

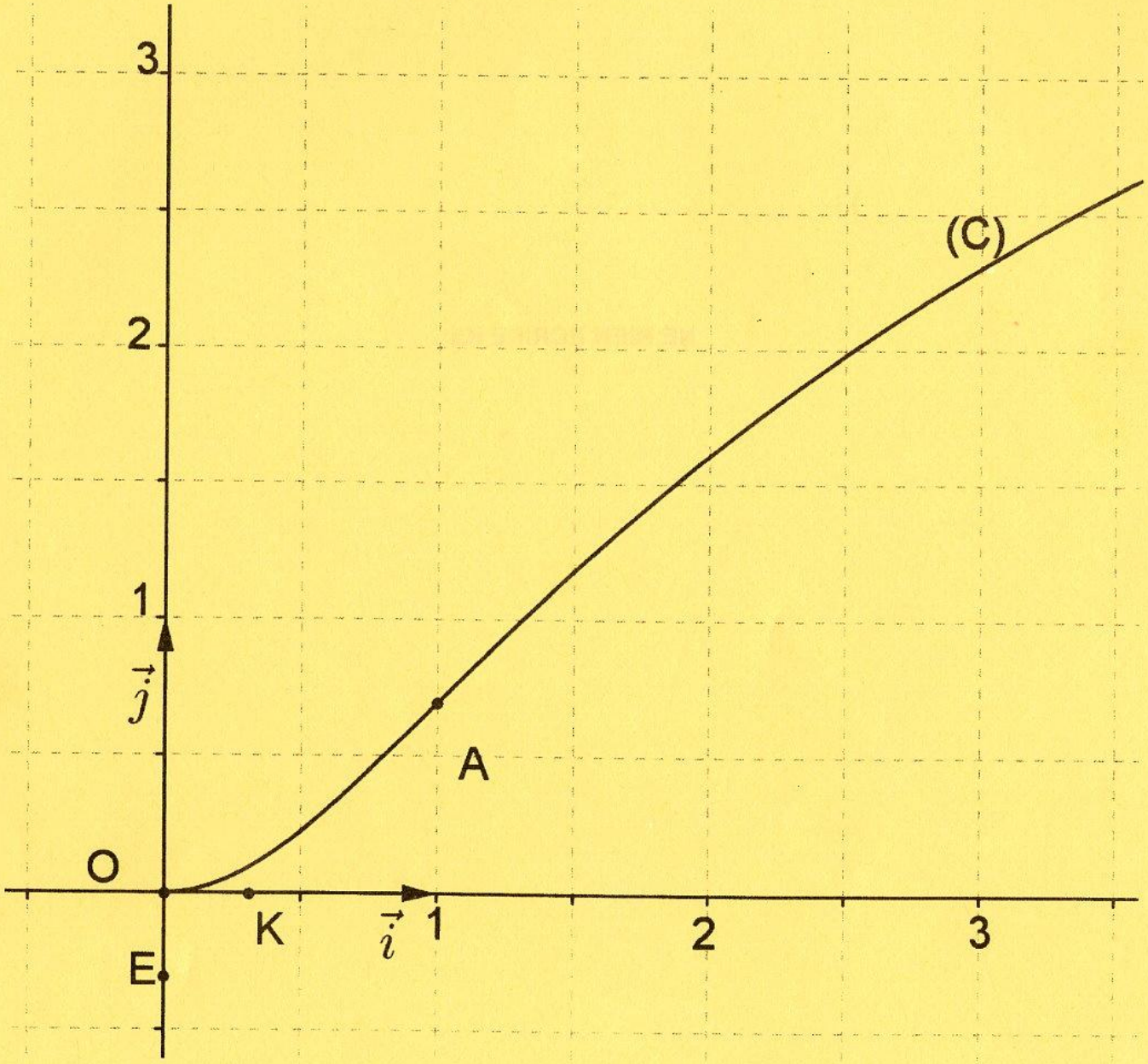
Signatures des surveillants

.....

.....

Epreuve : MATHEMATIQUES – Section : Sciences de l'informatique
(Session principale 2019)

Annexe à rendre avec la copie



Section : informatique matière : mathématiques session principale Juin 2019

Exercice 1 :

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+x^2) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}(1+x^2) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(1+x^2\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\left(x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\right)}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x^2)}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} 2\frac{\ln(x)}{x} + \frac{\ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x} = 0$$

Donc (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des abscisses au voisinage de $+\infty$

2) a) Pour tout réel $x \geq 0$; $f'(x) = \frac{2x}{1+x^2}$

b) Pour tout réel $x \geq 0$; $f''(x) = \frac{2(1+x^2)-2x(2x)}{(1+x^2)^2} = \frac{2+2x^2-4x^2}{(1+x^2)^2} = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2)^2}$

c) Pour tout réel $x\geq 0$ on a : $f''(x)=0$ sig $2(1-x^2)=0$ sig $1-x^2=0$ sig $x=1$.

x	0 1 +∞
Signe de f''(x)	+ 0 -

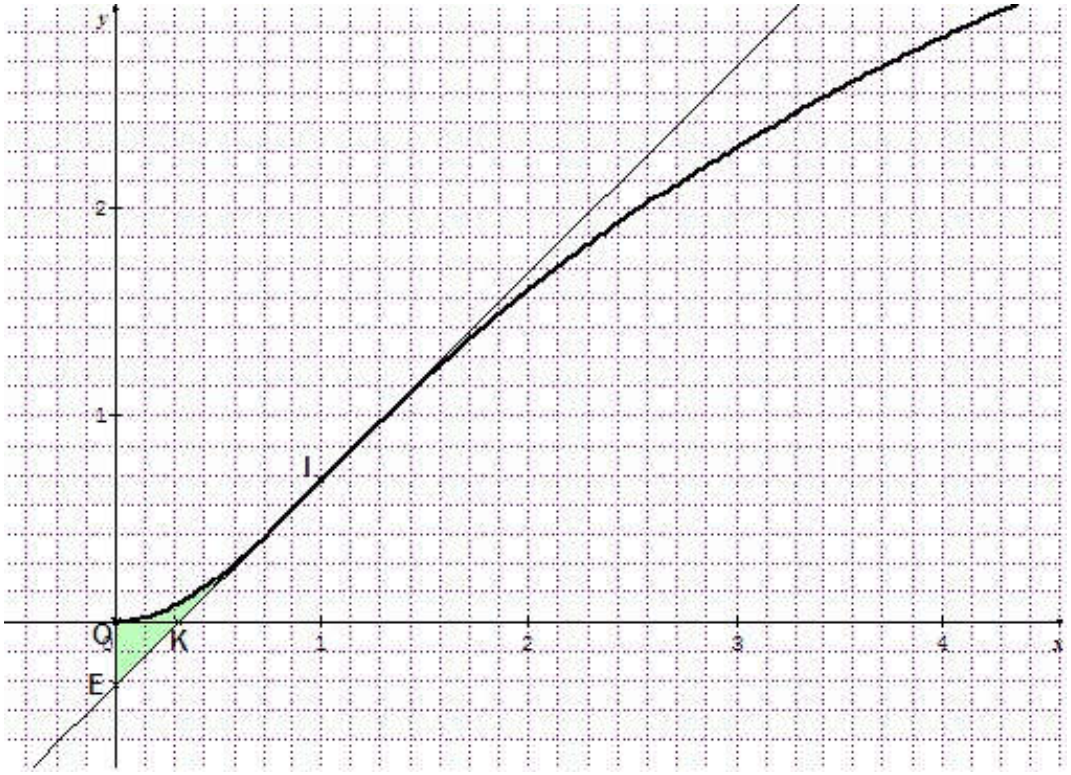
f'' s'annule en 1 enchangeantde signe donc $I(1,\ln 2)$ est un point d'inflexion de (C).

3) a) La tangente à (C) au point I a pour équation : $T : y = f'(1)(x-1)+f(1)$ donc $T : y = 1(x-1)+\ln 2$ donc T : y = x – 1 +ln2

b)M(x,y)$\in$(O,$\vec{i}$)$\cap$T éq$\begin{cases} y=0 \\ y=x-1+\ln 2 \end{cases}$ éq$\begin{cases} y=0 \\ x=1-\ln 2 \end{cases}$ d'où K(1-ln2,0) est le point d'intersection de T et l'axe des abscisses.

M(x,y)$\in$(O,$\vec{j}$)$\cap$T éq$\begin{cases} x=0 \\ y=x-1+\ln 2 \end{cases}$ éq$\begin{cases} x=0 \\ y=-1+\ln 2 \end{cases}$ d'où E(0,-1+ln2) est le point d'intersection de T et l'axe des ordonnées.

c)



4) a) le triangle OHE est rectangle en O donc $L = \dfrac{OE \times OK}{2} = \dfrac{(1-\ln 2)|\ln 2 - 1|}{2} = \dfrac{(1-\ln 2)^2}{2}$

b) Pour tout $x \in [0,1]$, $0 \le x^2 \le x$ donc $0 < 1 + x^2 \le 1 + x$

D'où $\ln(1+x^2) \le \ln(1+x)$ (car la fonction ln est croissante)

c) Pour tout réel $x \ge 0$, $\dfrac{x}{1+x} = \dfrac{x+1-1}{1+x} = \dfrac{x+1}{1+x} - \dfrac{1}{1+x} = 1 - \dfrac{1}{1+x}$

d) On pose $u(x) = \ln(1+x)$ $\quad u'(x) = \dfrac{1}{1+x}$

$v'(x) = 1$ $\quad v(x) = x$

Donc $\int_0^1 \ln(1+x)\,dx = \left[x\ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \dfrac{x}{1+x}\,dx = \ln 2 - \int_0^1 (1 - \dfrac{1}{1+x})\,dx$

$= \ln 2 - \left[x - \ln(1+x)\right]_0^1$

$= 2\ln 2 - 1$

e) La courbe C étant au dessus de T sur l'intervalle $[0,1]$

donc $S = \int_0^1 \ln(1+x^2) - (x - 1 + \ln 2)\,dx$

D'autre part : pour tout $x \in [0,1]$

$\ln(1+x^2) \le \ln(1+x)$ donc $\ln(1+x^2) - (x-1+\ln 2) \le \ln(1+x) - (x-1+\ln 2)$

or les fonctions $x \mapsto \ln(1+x^2) - (x-1+\ln 2)$ et $x \mapsto \ln(1+x) - (x-1+\ln 2)$ sont continues sur $[0,1]$ donc $\int_0^1 \ln(1+x^2) - (x-1+\ln 2)\,dx \le \int_0^1 \ln(1+x) - (x-1+\ln 2)\,dx$

donc $S \le \int_0^1 \ln(1+x)\,dx - \left[\dfrac{1}{2}x^2 - x + x\ln 2\right]_0^1$

d'où $S \le (2\ln 2 - 1) - (\dfrac{1}{2} - 1 + \ln 2)$ et par suite $S \le \ln 2 - \dfrac{1}{2}$

On remarque graphiquement que $L \le S$ donc $\frac{(1-\ln 2)^2}{2} \le S \le \ln 2 - \frac{1}{2}$

Exercice 2 :

1) a) dét(M_α) = $\alpha\begin{bmatrix}-4 & 0\\ 1 & -1\end{bmatrix} - (-2\alpha)\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix} + 1\begin{vmatrix}2 & 2\\ -4 & 0\end{vmatrix}$ = α(4-0) + 2α(-2 -2) + (0+8)
= 4α - 8α + 8 = - 4α + 8

b) M_α n'est pas inversible si $\text{dét}(M_\alpha) = 0$ c'est-à-dire pour $\alpha = 2$

2)

3) $C\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\ -4\\ -4\end{pmatrix}$ éq $\begin{pmatrix}2 & 2 & 2\\ -4 & -4 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\ -4\\ -4\end{pmatrix}$ éq $\begin{cases}2x+2y+2z=4\\ -4x-4y=-4\\ x+y-z=-4\end{cases}$ éq $\begin{cases}x+y+z=2\\ x+y=1\\ x+y-z=-4\end{cases}$

D'après (1)-(2) on obtient z=1 et d'après (2)-(3) on obtient z=5 ce qui est impossible Donc $S_{IR^3} = \varnothing$

4) a)

$$A \times B = \begin{pmatrix}-2 & 2 & 2\\ 4 & -4 & 0\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & 1 & 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2x1+2x1+2x2 & -2x1+2x0+2x1 & (-2)x2+2x2+2x0\\ 4x1+(-4)x1+0x2 & 4x1+(-4)x0+0x1 & 4x2+(-4)x2+0x0\\ 1x1+1x1+(-1)x2 & 1x1+1x0+(-1)x1 & 1x2+1x2+(-1)x0\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}4 & 0 & 0\\ 0 & 4 & 0\\ 0 & 0 & 4\end{pmatrix} = 4I$$

b) $A \times B = 4I$ donc $A \times \frac{1}{4}B = I$ et par suite $A^{-1} = \frac{1}{4}B = \begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}$

c) $A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\ -4\\ -4\end{pmatrix}$ éq $\cdot A^{-1}$ x $A\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = A^{-1}$x $\begin{pmatrix}4\\ -4\\ -4\end{pmatrix}$ éq $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \frac{1}{4}B\begin{pmatrix}4\\ -4\\ -4\end{pmatrix}$

éq $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{4} & 0 & \frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & 0\end{pmatrix}$ x $\begin{pmatrix}4\\ -4\\ -4\end{pmatrix}$ éq $\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{4}x4+\frac{1}{4}x(-4)+\frac{1}{2}x(-4)\\ \frac{1}{4}x4+0x(-4)+\frac{1}{2}x(-4)\\ \frac{1}{2}x4+\frac{1}{4}x(-4)+0x(-4)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$ d'où $S_{IR^3} = \{(-2,-1,1)\}$

Exercice 3 :

1) a) Pour $n = 0,\ 0 \le u_0 = 1 \le 1$ vrai

Soit $n \ge 0$ supposons que $0 \le u_n \le 1$ et montrons que $0 \le u_{n+1} \le 1$.

On a $0 \le u_n \le 1$ donc $1 \le 1 + u_n \le 2$ d'où $1 \le \sqrt{1+u_n} \le \sqrt{2}$ et par suite $1-1 \le \sqrt{1+u_n} - 1 \le \sqrt{2} - 1$ d'où $0 \le u_{n+1} \le \sqrt{2} - 1 \le 1$

Conclusion : Pour tout entier naturel n : $0 \le u_n \le 1$

b) Pour tout entier naturel n : $u_{n+1}-u_n=\sqrt{1+u_n}-1-u_n=\sqrt{1+u_n}\left(1-\sqrt{1+u_n}\right)$

On a : $u_n\geq 0$ donc $\sqrt{1+u_n}\geq 1$ d'où $1-\sqrt{1+u_n}\leq 0$ et par suite $u_{n+1}\leq u_n$

Ainsi la suite (u_n) est décroissante.

c) (u_n) est décroissante et minorée par 0 donc elle converge vers un réel $l\in[0,1]$

On a : $u_{n+1}=f(u_n)$ avec $f(x)=\sqrt{1+x}$ -1

(u_n) converge vers $l\in[0,1]$

f est continue sur $[-1,+\infty[$ et en particulier en l

donc l est solution de l'équation $f(l)=l$

f(l)=l éq $\sqrt{1+l}-1=l$ éq $\sqrt{1+l}=l+1$ éq $\sqrt{1+l}(1-\sqrt{1+l})=0$ éq $\sqrt{1+l}=1$ éq 1 + l = 0 éq $l=0$

2) a) Pour tout entier naturel n, $v_{n+1}=\ln(1+u_{n+1})=\ln\left(\sqrt{1+u_n}\right)=\frac{1}{2}\ln(1+u_n)=\frac{1}{2}v_n$

Donc (v_n) est géométrique de raison $\frac{1}{2}$ et de premier terme $v_0=\ln(1+u_0)=\ln 2$ b) Pour tout entier naturel n, $v_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\ln 2=\frac{ln2}{2^n}$

On a v_n = ln(1+u_n) éq 1+u_n = e^{Vn} éq $u_n=e^{\frac{\ln 2}{2^n}}-1$

Exercice 4 :

1) a) $(2-2i)^2=4-4-8i=-8i$

b) $\Delta=(2+8i)^2+60-40i=-8i=(2-2i)^2$

donc $z'=\frac{2+8i-2+2i}{2}=5i$ et $z''=\frac{2+8i+2-2i}{2}=2+3i$

$S_{\mathbb{C}}=\{5i,2+3i\}$

2) a) $(z_B-z_A)\left(\overline{z_C-z_A}\right)=(-3-3i)(-2-2i)=6+6i+6i-6=12i$

b) $(z_B-z_A)\left(\overline{z_C-z_A}\right)$ est imaginaire pur donc les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont orthogonauxpar suite le triangle ABC est rectangle en A.

3) a) $(z_M-z_A)\left(\overline{z_N-z_A}\right)=(x-2-3i)(-iy-2+3i)=(-2x-3y+13)+i(-xy+3x+2y)$

b) Les points A ,M et N sont deux à deux distincts donc (-2x-3y+13)+i(-xy+3x+2y) ≠0 Deuxième méthode :

Supposons qu'il existe un couple de réels (x , y) tel que

$(-2x-3y+13)+i(-xy+3x+2y)=0$

$(-2x-3y+13)+i(-xy+3x+2y)=0\cdot$ éq $\begin{cases}-2x-3y+13=0\\-xy+3x+2y=0\end{cases}$ éq $\begin{cases}y=\frac{13-2x}{3}\\3x+y(2-x)=0\end{cases}$ (**)

L'équation (**) devient $3x+\frac{13-2x}{3}(2-x)=0$ ou encore $2x^2-8x+26=0$ qui a pour discriminant $\Delta<0$, donc x n'existe pas.

Conclusion : $(-2x-3y+13)+i(-xy+3x+2y)\neq 0$

c) AMN est rectangle en A si et seulement si $(z_M-z_A)\left(\overline{z_N-z_A}\right)$ est imaginaire pur

ce qui équivaut à $-2x-3y+13=0$ (on a : $-xy+3x+2y\neq 0$ d'après b))

4) a) Le triangle ABC est rectangle en A donc pour x=-1 et y= 5 le couple (-1,5) est une solution de (E).

b) On a 2x + 3y = 13éq $2x+3y=2\times(-1)+3\times 5$ éq $2(x+1)=3(5-y)$ (*)

donc 2 divise $3(5-y)$ or $2\wedge 3=1$ donc d'après le lemme de Gauss, 2 divise $(5-y)$

donc $5-y=2k$; $k\in\mathbb{Z}$ d'où y=5-2k.

D'après (*) on a 2(x+1)= 3(2k) sig x=3k-1 ;$k\in\mathbb{Z}$

Réciproquement, pour $(x,y)=(-1+3k\ ,\ 5-2k)$ on a $2(-1+3k)+3(5-2k)=13$

Donc $S_{\mathbb{Z}^2}=\{(-1+3k\ ,\ 5-2k);\ \text{avec}\ k\in\mathbb{Z}\}$.

Ou bien directement : comme (-1,5) est une solution particulière de (E) alors l'ensemble des solutions de (E) est : $S_{\mathbb{Z}^2}=\{(-3k-1\ ,\ 5+2k)\ \ \text{avec}\ k\in\mathbb{Z}\}$

c) AMN est rectangle en A si et seulement si $2x+3y=13$ éq $(x,y)=(-1+3k,5-2k)$; $(k\in\mathbb{Z})$

si de plus $-4\leq x\leq 4$ alors $-4\leq -1+3k\leq 4\cdot \text{sig}\ -1\leq k\leq \frac{5}{3}$, donc $k\in\{-1,0,1\}$

Par suite $(x,y)\in\{(-4,7),(-1,5),(2,3)\}$

Ainsi AMN est rectangle en A (et $-4\leq x\leq 4$) pour :

$[M(-4)\ \text{et}\ N(7i)]$, pour $[M(-1)\ \text{et}\ N(5i)]$et pour $[M(2)\ \text{et}\ N(3i)]$

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE **MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION** **EXAMEN DU BACCALAURÉAT** SESSION **2019**	**Session de contrôle**	
	Épreuve : **Mathématiques**	Section : **Sciences de l'informatique**
	Durée : **3h**	Coefficient de l'épreuve: **3**

Le sujet comporte 4 pages numérotées de 1/4 à 4/4.

La page 4/4 est à rendre avec la copie.

Exercice 1 : (4.5 points)

1) a) Montrer que les racines carrées de $7-24i$ sont $4-3i$ et $(-4)+3i$.

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation (E) : $z^2+(2-5i)z-7+i=0$.

Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé direct, on considère les points A , B et M d'affixes respectives $z_1=1+i$, $z_2=-3+4i$ et $z_3=\alpha-i\alpha$, où α est un réel non nul.

2) a) Montrer que $\overline{z_1}\,z_3=-2i\alpha$ et déduire la nature du triangle AOM.

b) Montrer que $\overline{(z_1-z_2)}(z_1-z_3)=1-7\alpha+i(\alpha+7)$.

Déterminer le réel α pour lequel les points A, B et M sont alignés.

Exercice 2 :(4.5 points)

1) Montrer que $5^5\equiv 1[11]$ et en déduire que $5^{2019}\equiv 9[11]$.

2) On considère dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ l'équation (E) : $5x-3y=11$.

a) Vérifier que $(1\,;-2)$ est une solution de l'équation (E).

b) Résoudre l'équation (E).

3) Soit (a,b) une solution de (E) et d= P.G.C.D. (a,b) .

Montrer que les valeurs possibles de d sont 1 et 11.

4) Soit $n=3\times16^{2019}+1$.

a) Déterminer le reste de la division euclidienne de n par 11.

b) Déterminer alors P.G.C.D.$\left(3\times16^{2019}+1\;;\;5\times16^{2019}-2\right)$.

Exercice 3 :(6.5 points)

1) On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction g définie

Sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=xe^{x-1}-1$.

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	-1	↘	$g(-1)$	↗	$+\infty$

a) Calculer $g(1)$.

b) Déduire le signe de $g(x)$.

Dans la suite, on considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(x-1)e^{x-1}-x$.

On désigne par (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

2) a) Calculer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite $\Delta: y=-x$ est une asymptote à (C) au voisinage de $-\infty$.

c) Étudier la position relative de la courbe (C) et la droite Δ.

3) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty$.

Interpréter graphiquement les résultats.

4) a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=g(x)$.

b) Dresser le tableau de variation de f.

c) Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet dans $\mathbb{R}$ exactement deux solutions α et β.

(On prendra $\alpha<\beta$).

d) Justifier que $\alpha\in]-0.4;-0.3[$ et $\beta\in]1.8;1.9[$.

5) Dans l'annexe ci-jointe, on donne le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$, la droite Δ et les réels α et β.

Tracer la courbe (C) dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

6) Soit un réel $\lambda<-1$ et $A(\lambda)$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C), la droite Δ et les droites d'équations : $x=\lambda$ et $x=-1$.

a) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que $A(\lambda)=(\lambda-2)e^{\lambda-1}+3e^{-2}$.

b) Trouver $\lim\limits_{\lambda\to-\infty} A(\lambda)$.

Exercice 4 :(4.5 points)

Pour les réseaux informatiques, le terme de bande passante est synonyme de taux de transfert de données.

Le tableau suivant donne l'évolution en Tunisie, entre les années 2011 et 2015, du nombre d'abonnés au réseau internet par 1000 habitants et la largeur de la bande passante internationale d'internet (en Gb/S)

Année (t_i)	2011	2012	2013	2014	2015
Nombre d'abonnés au réseau internet (x_i par 1000 habitants)	80	103	128	154	159
Largeur de la bande internationale d'internet (y_i en Gb/S)	60	82.5	90	130	180

(Source : Ministère des Technologies de l'information et de communication)

On pose $x=(x_i)$, $y=(y_i)$ et $t=(t_i)$.

1) a) Donner le coefficient de corrélation linéaire de la série (t,x).

b) Déterminer une équation de la droite de régression de x en t.

c) Donner une prévision de la valeur x_i pour l'année $t_i = 2020$.

2) On envisage un ajustement exponentiel de la série (x, y). Pour cela on pose $z = \ln(y)$.

Le tableau suivant donne les valeurs de x et z arrondies à 10^{-3} près.

x_i	80	103	128	154	159
$z_i = \ln(y_i)$	4,094	4,413	4,5	4,868	5,193

a) Donner le coefficient de corrélation linéaire de la série (x, z).

b) En déduire qu'un ajustement affine de la série (x, z) par la méthode des moindres carrés est justifié.

c) Déterminer une équation de la droite de régression de z en x.

d) Etablir la relation $y = Ae^{Bx}$ où A et B sont deux réels que l'on déterminera.

3) Donner une prévision de la largeur de la bande passante internationale y_i pour l'année $t_i = 2020$.

Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....

Nom et Prénom : .....

Date et lieu de naissance : .....

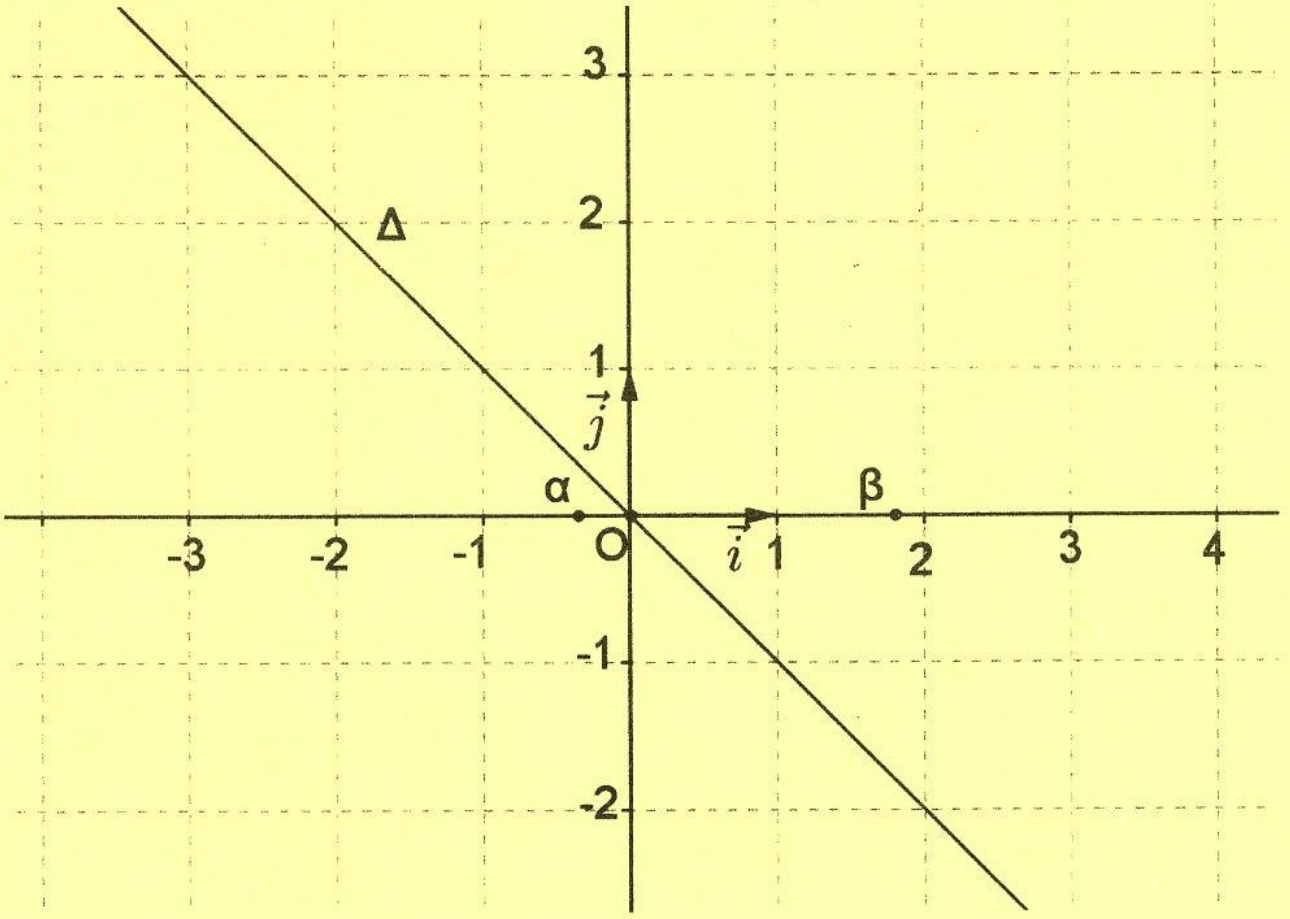
Signatures des surveillants

.....

.....

Epreuve : MATHEMATIQUES – Section : Sciences de l'informatique
(Session de contrôle 2019)

Annexe à rendre avec la copie



Section : informatique matière : mathématiques session contrôle 2019

Exercice 1 :

1) a) on a : $(4-3i)^2 = 42 - 2x4x3i + (3i)2 = 16 - 24i - 9 = 7 - 24i$

et $(-4+3i)^2 = (-4)2 + 2x(-4)x3i + (3i)2 = 16 - 24i - 9 = 7 - 24$ et comme un nombre complexe non nul possède exactement deux racines carrées alors les racines carrées de $7 - 24i$ sont $4 - 3i$ et $-4 + 3i$.

b) $\Delta = (2-5i)^2 - 4(-7+i) = 4 - 20i - 25 + 28 - 4i = 7 - 24i = (4-3i)^2$

Donc $z' = \dfrac{-2+5i-4+3i}{2} = -3+4i$ et $z'' = \dfrac{-2+5i+4-3i}{2} = 1+i$ d'où

$S_{\mathbb{C}} = \{1+i, -3+4i\}$

2a) $\overline{z_1}z_3 = (1-i)(\alpha - i\alpha) = \alpha - i\alpha - i\alpha - \alpha = -2i\alpha$ avec $\alpha \in IR^*$

$\overline{z_1}z_3 = (\overline{z_A - z_O})(z_M - z_O)$ est imaginaire pur donc les vecteurs $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OM}$ sont orthogonaux et parsuite le triangle AOM est rectangle en O.

b)

$(\overline{z_1 - z_2})(z_1 - z_3) = \overline{[1+i-(-3+4i)]}[1+i-(\alpha - i\alpha)] = (4+3i)[(1-\alpha)+i(1+\alpha)]$

$= 4(1-\alpha) + 4i(1+\alpha) + 3i(1-\alpha) - 3(1+\alpha) = 4 - 4\alpha + 4i + 4i\alpha + 3i - 3i\alpha - 3 - 3\alpha$

$= 1 - 7\alpha + i(\alpha + 7)$

c) on a : $(\overline{z_1 - z_2})(z_1 - z_3) = (\overline{z_A - z_B})(z_A - z_M)$

A, B et M sont alignés sigles vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires

$\text{sig}\ (\overline{z_1 - z_2})(z_1 - z_3) \in IR$ sig $\alpha + 7 = 0$ sig $\alpha = -7$

Exercice 2 :

1) $5^5 = 3125 = 11 \times 284 + 1$ donc $5^5 \equiv 1[11]$ ou bien $\left.\begin{matrix} 5^2 \equiv 25 \equiv 3[11] \\ 5^3 \equiv 125 \equiv 4[11] \end{matrix}\right\}$ donc $5^5 \equiv 12[11]$

d'où $5^5 \equiv 1[11]$ on a :

$2019 = 5 \times 403 + 4$ donc $5^{2019} = \left(5^5\right)^{403} \times 5^4$

On a : $\left.\begin{matrix} 5^4 = 625 \equiv 9[11] \\ (5^5)^{403} \equiv 1[11] \end{matrix}\right\}$ donc $5^{2019} \equiv 9[11]$

2) a) $5 \times 1 - 3(-2) = 5 + 6 = 11$ d'où $(1, -2)$ est solution de (E).

b) On a $5x - 3y = 11$ éq $5x - 3y = 5 \times 1 - 3(-2)$ éq $5(x-1) = 3(y+2)$ $(**)$ donc 5 divise $3(y+2)$ or $5 \wedge 3 = 1$ donc d'après le lemme de Gauss 5 divise $(y+2)$

par suite $y + 2 = 5k$ avec $k \in \mathbb{Z}$ donc $y = 5k - 2$; $(k \in \mathbb{Z})$

d'après$(**)$: $5(x-1) = 3(5k)$ donc $x = 3k + 1$; $(k \in \mathbb{Z})$

Réciproquement, pour

$x = 3k+1$ et $y = 5k-2$, on a $5(3k+1)-3(5k-2) = 5+6 = 11$

D'où $S_{\mathbb{Z}^2} = \{(3k+1\ ,\ 5k-2)\ \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$

Ou bien directement : comme (1,-2) est solution de (E) alors l'ensemble des solutions de (E) est : $S_{\mathbb{Z}^2} = \{(3k+1\ ,\ 5k-2)\ \text{ avec } k \in \mathbb{Z}\}$

3) d = pgcd(a,b) donc (d divise a) et (d divise b)

par suite d divise $(5a-3b)$ d'où d divise 11

or d > 0, donc d = 1 ou d = 11.

4) a) on a :

$16 \equiv 5[11]$ donc $16^{2019} \equiv 5^{2019}[11]$ comme $5^{2019} \equiv 9[11]$

alors $16^{2019} \equiv 9[11]$ d'où $3\times 16^{2019}+1 \equiv 28[11]$

par suite $3\times 16^{2019}+1 \equiv 6[11]$

Et comme 0≤6≤10 alors, 6 est le reste de la division euclidienne de n par 11.

b) on vérifie que $(3\times 16^{2019}+1; 5\times 16^{2019}-2)$ est une solution de (E)

d'après 3), pgcd $(3\times 16^{2019}+1; 5\times 16^{2019}-2)$ = 1 ou pgcd $(3\times 16^{2019}+1; 5\times 16^{2019}-2)$ =11

or 11 ne divise pas $(3\times 16^{2019}+1)$ et c'est d'après 4)a) donc pgcd(a, b) = 1.

Exercice 3 :

1) a) $g(1) = 1e^0 - 1 = 1-1 = 0$

b)

X	-∞		1		+∞
g(x)		-	0	+	

2) a) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x-1)e^{x-1} - x$

On pose $X = x-1$ donc $x = X+1$ et comme $x \to -\infty$ alors $X \to -\infty$

Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X - X - 1 = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x = 0$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)-(-x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x-1)e^{x-1} - x - (-x) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x-1)e^{x-1} = \lim\limits_{X\to-\infty} Xe^X = 0$ avec X= x-1 donc la droite Δ d'équation $y = -x$ est asymptote à (C) au $V(-\infty)$

c) $f(x)-(-x) = (x-1)e^{x-1}$ est du signe de $(x-1)$

ainsi : sur $]-\infty, 1[$, (C) est au dessous de Δ

sur $]1, +\infty[$, (C) est au dessus de Δ

(C) rencontre Δ au point de coordonnées (1,-1)

3) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)e^{x-1} - x = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)\left(e^{x-1} - \dfrac{x}{x-1}\right) = \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)\left(e^{x-1} - \dfrac{x-1+1}{x-1}\right)$

$= \lim\limits_{x\to+\infty} (x-1)\left(e^{x-1} - 1 - \dfrac{1}{x-1}\right) = +\infty$

Et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{(x-1)e^{x-1} - x}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x-1}{x} e^{x-1} - 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} (1 - \dfrac{1}{x})e^{x-1} - 1 = +\infty$ donc (C) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au $V(+\infty)$

4) a) pour tou $x \in IR$, $f'(x) = e^{x-1} + (x-1)e^{x-1} - 1 = e^{x-1} + xe^{x-1} - e^{x-1} - 1 = xe^{x-1} - 1 = g(x)$

b)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	$+\infty$	↘	-1	↗	$+\infty$

c) * f est continue et strictement décroissante sur $]-\infty,1]$ donc elle réalise unebijection de $]-\infty,1]$ sur $f(]-\infty,1]) = [-1,+\infty[$

or $0 \in [-1,+\infty[$ donc il existe un unique réel $\alpha \in]-\infty,1]$ tel que $f(\alpha) = 0$.

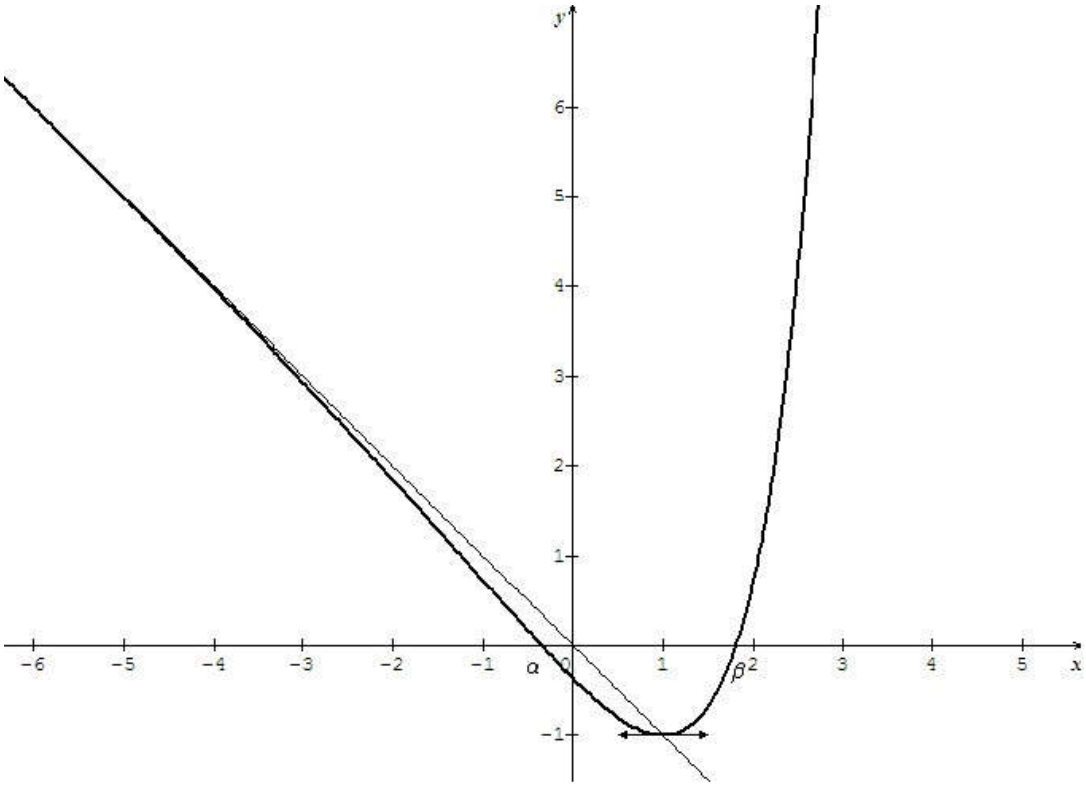
* f est continue et strictement croissante sur $[1,+\infty[$ donc elle realise unebijection de de $[1,+\infty[$ sur $f([1,+\infty[) = [-1,+\infty[$

or $0 \in [-1,+\infty[$ donc il existe un unique réel $\beta \in [1,+\infty[$ tel que $f(\beta) = 0$

d) $f(-0,4) \times f(-0,3) = 0,055 \times (-0,054) < 0$ donc $\alpha \in]-0,4;-0,3[$

$f(1,8) \times f(1,9) = -0,019 \times 0,313 < 0$ donc $\beta \in]1,8;1,9[$

5)



5) a) $A(\lambda)=\int_{\lambda}^{-1}\left|f(x)-(-x)\right|dx=\int_{-1}^{\lambda}(x-1)e^{x-1}dx$ car (C) est au dessus de Δ sur $]-\infty,1]$

On pose $u(x)=x-1 \qquad u'(x)=1$

$v'(x)=e^{x-1} \qquad v(x)=e^{x-1}$

Les fonctions précédentes sont continues sur [, -1]

$A(\lambda)=\left[(x-1)e^{x-1}\right]_{-1}^{\lambda}-\int_{-1}^{\lambda}e^{x-1}dx=\left[(x-1)e^{x-1}\right]_{-1}^{\lambda}-\left[e^{x-1}\right]_{-1}^{\lambda}=(\lambda-2)e^{\lambda-1}+3e^{-2}$ (ua)

b) $\lim\limits_{\lambda\to-\infty}A(\lambda)=\lim\limits_{\lambda\to-\infty}(\lambda-2)e^{\lambda-1}+3e^{-2}=\lim\limits_{\lambda\to-\infty}\underbrace{(\lambda-1)e^{\lambda-1}}_{\searrow 0}-\underbrace{e^{\lambda-1}}_{\searrow 0}+3e^{-2}=3e^{-2}$ (ua)

Exercice 4 :

1) a) A l'aide de la calculatrice on obtient : $r=0,9839$

b) $\Delta: x=20,9\,t-41946,9$

c) Pour $t_i=2020$ on obtient $x_i=271,1\simeq 271$ abonnés.

2) a) $r=0,9541$

b) r > 0,75 donc on a une forte correlation entre x et z et l'ajustement affine est justifié.

c) $\Delta': z=0,012\,x+3,106$

d) $z=\ln(y)=0,012\,x+3,106$ donc $y=e^{0,012x+3,106}=e^{3,106}e^{0,012x}$

On pose $A=e^{3,106}=22.332$ et $B=0,012$

3) Pour t = 2020 on a $x=271$ et $y\simeq 277,1$ Gb / S .

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ●●●●● **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION **2018**	***Session principale***	
	Epreuve : **Mathématiques**	Section : ***Sciences de l'informatique***
	Durée : **3h** ◆	Coefficient de l'épreuve : **3**

Le sujet comporte 4 pages, la page 4/4 est à rendre avec la copie

Exercice 1 (4 points)

1) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes, l'équation

$$z^2-(1+i)z+i=0$$

2) a) Montrer que pour tout z non nul, $z+\frac{1}{z}=1 \Leftrightarrow z^2-z+1=0$.

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$ les deux équations : $z+\frac{1}{z}=1$ et $z+\frac{1}{z}=i$

3) On considère le polynôme $P(z)=z^4-(1+i)z^3+(2+i)z^2-(1+i)z+1$

a) Vérifier, que pour tout nombre complexe z non nul, on a :

$$\frac{P(z)}{z^2}=\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-(1+i)\left(z+\frac{1}{z}\right)+i$$

b) Résoudre alors dans $\mathbb{C}$, en posant $Z=z+\frac{1}{z}$, l'équation $P(z)=0$

Exercice 2 (4 points)

On considère les deux matrices suivantes :

$A=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$ et $B=I_3+A$ où I_3 désigne la matrice unité d'ordre 3.

1) Montrer que $A^2=3A$.

2) a) En développant, calculer les produits $(4I_3-A)\times B$ et $B\times(4I_3-A)$.

b) En déduire que B est inversible et déterminer B^{-1}.

3) on considère le système (S) suivant :

$$\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ x+2y+z=-1 \\ x+y+2z=1 \end{cases}$$ où x, y et z sont des nombres réels

a) Écrire (S) sous la forme matricielle.

b) Résoudre alors le système (S).

Exercice 3 (6 points)

On considère les deux suites d'entiers naturels (x_n) et (y_n) définies sur $\mathbb{N}$ par :

$$x_0 = 5 \quad \text{et} \quad x_{n+1} = 3x_n - 2$$

$$y_0 = 1 \quad \text{et} \quad y_{n+1} = 3y_n + 8$$

1) On définit la suite (u_n), par $u_n = x_n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

a) Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique dont on précisera le premier terme et la raison.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, $x_n = 4 \times 3^n + 1$.

2) a) Montrer que $PGCD(x_n, x_{n+1})$ divise 2.

b) En déduire que $PGCD(x_n, x_{n+1}) = 1$.

3) a) Montrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $5x_n - 4y_n = 21$.

b) En déduire l'expression de y_n en fonction de n.

c) Déterminer les valeurs possibles du $PGCD(x_n, y_n)$.

4) a) Donner, selon les valeurs de l'entier naturel n, le reste de la division euclidienne de 3^n par 7.

b) Montrer que si $n \equiv 5[6]$ alors $PGCD(x_n, y_n) = 7$.

c) Déterminer $PGCD(x_{2018}, y_{2018})$.

Exercice 4 (6 points)

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on considère la fonction $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_n(x) = e^{\frac{-x}{n}}$ et C_n sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ du plan.

1) a) dresser le tableau des variations de f_n.

b) Vérifier que toutes les courbes C_n passent par le point $J(0\ ,\ 1)$.

c) Pour $n \in \mathbb{N}^*$, étudier la position relative de C_n et C_{n+1} sur chacun des intervalles $]-\infty, 0]$ et $[0, +\infty[$.

2) Dans la figure en annexe, on a construit les courbes C_1 et C_3 ainsi que la droite $\Delta : y = x$ dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

a) Recopier puis compléter les phrases suivantes :

- « la courbe tracée en trait interrompu est celle de ..... »
- « la courbe tracée en trait continue est celle de ..... »

b) Tracer alors dans le même repère la courbe C_2 de la fonction f_2.

3) On considère la fonction g_n définie sur $[0, +\infty[$ par $g_n(x) = f_n(x) - x$

a) Étudier les variations de g_n.

b) Montrer qu'il existe un seul réel $x_n \in]0\ ,\ 1[$ tel que $g_n(x_n) = 0$.

c) Vérifier que x_n est l'abscisse du point d'intersection de la courbe C_n de f_n et la droite Δ.

d) Placer x_1, x_2 et x_3 sur l'axe des abscisses.

4) a) Montrer que $g_{n+1}(x_n) = e^{\frac{-x_n}{n+1}} - e^{\frac{-x_n}{n}}$

b) En déduire que $g_{n+1}(x_n) > g_{n+1}(x_{n+1})$, puis conclure que (x_n) est croissante.

c) Déduire que la suite (x_n) est convergente et déterminer sa limite.

Section : ..... N° d'inscription : ..... Série : .....

Nom et Prénom : .....

Date et lieu de naissance : .....

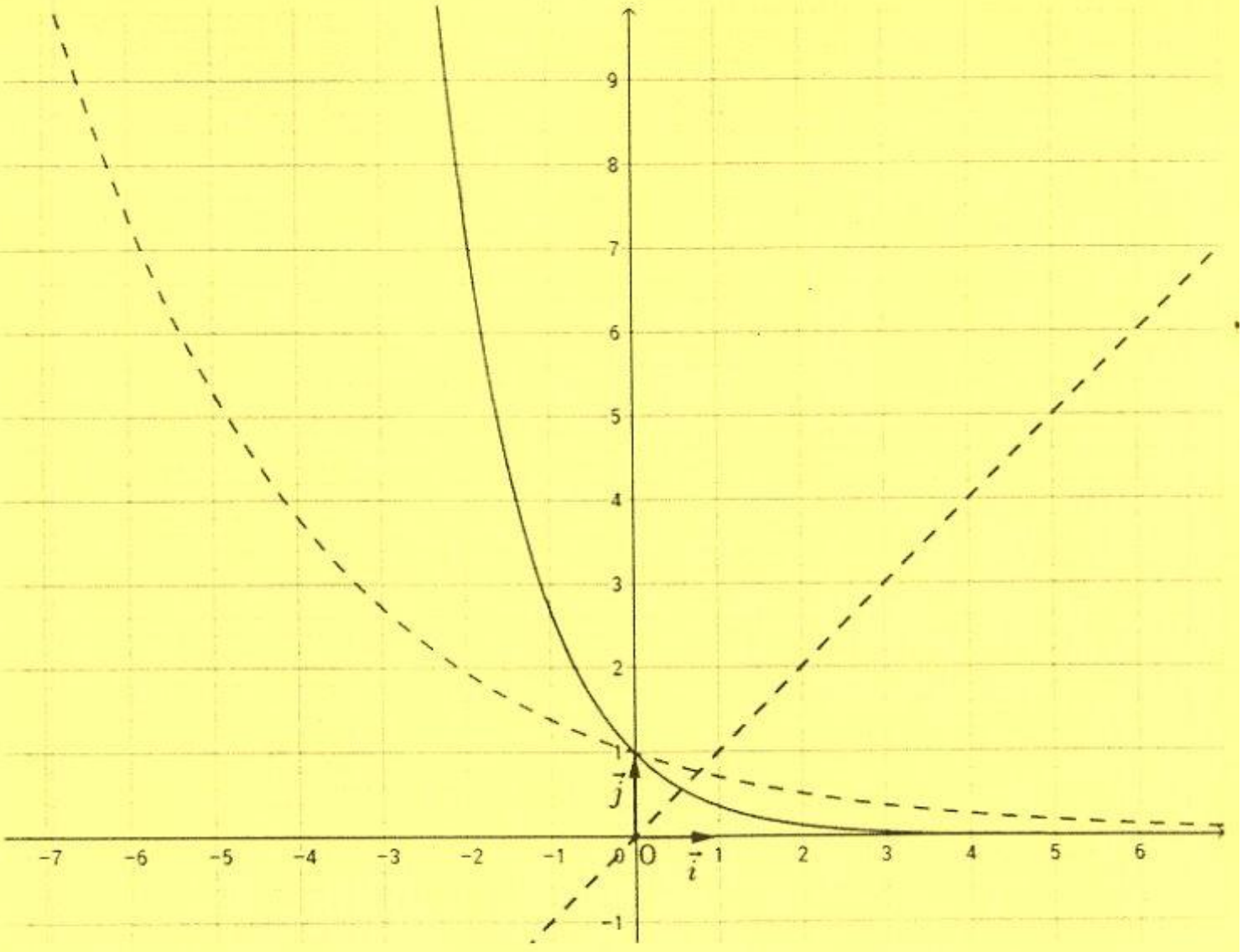
Signatures des surveillants

.....

.....

Épreuve : **Mathématiques** - Section : **Sciences de l'informatique** -Session principale - **2018**

Annexe à rendre avec la copie



Correction de l'épreuve de mathématiques (bac Sciences de l'informatique)

Session principale 2018

Exercice 1 : (4points)

1) $z^2-(1+i)z+i=0$

$\Delta=(1+i)^2-4i=-2i=(1-i)^2$ donc $1-i$ est une racine carrée de Δ.

$z_1=\frac{1+i+1-i}{2}=1 \quad z_2=\frac{1+i-1+i}{2}=i$ donc $S_{\mathbb{C}}=\{1,i\}$

Autrement :

$z_1=1$ est une solution apparente donc $z_1=1$, $z_2=\frac{i}{1}$ est la deuxième solution

2)a) $z+\frac{1}{z}=1 \Leftrightarrow \frac{z^2+1}{z}=1 \Leftrightarrow z^2+1=z \Leftrightarrow z^2-z+1=0$

b) $z+\frac{1}{z}=1 \Leftrightarrow z^2-z+1=0$

$\Delta=1-4=-3=(\sqrt{3}i)^2$ donc $\delta=i\sqrt{3}$ une racine carrée de Δ

$z_1=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \quad ; \quad z_2=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \qquad S_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\,,\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

$z+\frac{1}{z}=i \Leftrightarrow z^2+1=iz \Leftrightarrow z^2-iz+1=0$

$\Delta=(-i)^2-4=-5=(i\sqrt{5})^2$ donc $\delta=i\sqrt{5}$ une racine carrée de Δ

$z_1=\frac{i(1-\sqrt{5})}{2} \quad ; \quad z_2=\frac{i(1+\sqrt{5})}{2} \quad S_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{i(1-\sqrt{5})}{2}\,,\frac{i(1+\sqrt{5})}{2}\right\}$

3)a) $(z+\frac{1}{z})^2-(1+i)\left(z+\frac{1}{z}\right)+i=z^2+\frac{1}{z^2}+2-(1+i)z-\left(\frac{1+i}{z}\right)+i$

$$=\frac{z^4+1+2z^2-(1+i)z^3-(1+i)z+iz^2}{z^2}$$

$$=\frac{z^4-(1+i)z^3+(2+i)z^2-(1+i)z+1}{z^2}=\frac{p(z)}{z^2}$$

b) $p(z)=0$, $z=0$

$\frac{p(z)}{z^2}=0 \Leftrightarrow \left(z+\frac{1}{z}\right)^2-(1+i)\left(z+\frac{1}{z}\right)+i=0$

On pose Z= $z+\frac{1}{z}$; $p(z)=0 \Leftrightarrow Z^2-(1+i)Z+i=0$ et Z= $z+\frac{1}{z}$

$\Leftrightarrow Z=1$ ou $Z=i$ et Z= $z+\frac{1}{z} \Leftrightarrow z+\frac{1}{z}=1$ ou $z+\frac{1}{z}=i$

$\Leftrightarrow z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ ou $z=\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)i$ ou $z=\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)i$

$S_{\mathbb{C}}=\left\{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\,,\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\,,\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)i\,,\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)i\right\}$

Exercice 2 : (4 points)

1)$A^2=AxA=\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}x\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3&3&3\\3&3&3\\3&3&3\end{pmatrix}=3A$

2) a) $*)(4I_3-A)xB=(4I_3-A)(I_3+A)=4I_3+4A-A-A^2=4I_3+3A-3A+4I_3=4I_3$

$*)\ Bx(4I_3-A)=(I_3+A)(4I_3-A)=4I_3-A+4A-A^2=4I_3+3A-3A=4I_3$

b) On $Bx(4I_3-A)=4I_3 \Leftrightarrow Bx\left(\frac{4I_3-A}{4}\right)=I_3 \Leftrightarrow Bx\left(I_3-\frac{1}{4}A\right)=I_3$

donc B est inversible et $B^{-1}=I_3-\frac{1}{4}A$

3)a)(s) : $\begin{cases} 2x+y+z=3 \\ x+2y+z=-1 \\ x+y+2z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow Bx\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = B^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x = \frac{9}{4}$ et $y = \frac{-7}{4}$ et $z = \frac{1}{4}$

$S_{\mathbb{R}^3} = \left\{\left(\frac{9}{4}, \frac{-7}{4}, \frac{1}{4}\right)\right\}$

Exercice 3 : (6 points)

1)a) $U_{n+1} = x_{n+1} - 1 = 3x_n - 2 - 1 = 3(x_n - 1) = 3U_n$

(U_n) est une suite géométrique de raison q=3 et 1er terme $U_0 = x_0 - 1 = 4$

b) $U_n = x_n - 1$ donc $x_n = U_n + 1 = 4x3^n + 1$

2)a) soit d=pgcd(x_n, x_{n+1}) donc d divise x_n et x_{n+1} donc d divise $3x_n - x_{n+1}$ donc d divise 2

b)pgcd(x_n, x_{n+1}) divise 2 donc pgcd$(x_n, x_{n+1}) \in \{1,2\}$ Or $x_n = 4x3^n + 1$ est impair donc pgcd$(x_n, x_{n+1}) = 1$

3)a) pour $n = 0$; $5x_0 - 4y_0 = 21$

Soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $5x_n - 4y_n = 21$

Montrons que $5x_{n+1} - 4y_{n+1} = 21$

$5x_{n+1} - 4y_{n+1} = 5(3x_n - 2) - 4(3y_n + 8) = 15x_n - 10 - 12y_n - 32$

$= 3(5x_n - 4y_n) - 42 = 3x21 - 42 = 21$

Conclusion: pour tout $n \in \mathbb{N}$ $5x_n - 4y_n = 21$

b)On a $5x_n - 4y_n = 21$ donc $4y_n = 5x_n - 21$ donc $4y_n = 5(4x3^n + 1) - 21$ donc $y_n = 5x3^n - 4$

c)Soit d'=pgcd(x_n, y_n) donc d' divise x_n et y_n d' divise $5x_n - 4y_n$ donc d' divise 21

d' $\in \{1,3,7,21\}$

4)a)le reste de la division euclidienne de 3^n par 7 est

1 si $n \equiv 0[6]$

3 si $n \equiv 1[6]$

2 si $n \equiv 2[6]$

6 si $n \equiv 3[6]$

4 si $n \equiv 4[6]$

5 si $n \equiv 5[6]$

b) si $n \equiv 5[6]$ alors $3^n \equiv 5[7]$ donc $4x3^n \equiv 6[7]$ donc $4x3^n + 1 \equiv 0[7]$donc $x_n \equiv 0[7]$

si $n \equiv 5[6]$ alors $4x3^n \equiv 6[7]$ donc $5x3^n - 4 \equiv 0[7]$ donc $y_n \equiv 0[7]$

D'où pgcd$(x_n, y_n) \in \{7,21\}$ or x_n et y_n ne sont pas divisibles par 3 donc pgcd $(x_n, y_n) = 7$

c)2018≡2[6] car 2018 = 6x336 + 2 alors $4x3^{2018} + 1 \equiv 4x2 + 1[7]$

donc $4x3^{2018} + 1 \equiv 2[7]$ donc $x_{2018} \equiv 2[7]$ donc x_{2018} n'est pas divisible par 7

$4x3^{2018} + 1 \equiv 1[3]$ et $x_{2018} = 4x3^{2018} + 1$ donc x_{2018} n'est pas divisible par 3

donc pgcd$(x_{2018}, y_{2018}) \notin \{3,7,21\}$ or pgcd$(x_{2018}, y_{2018}) \in \{1,3,7,21\}$

donc pgcd$(x_{2018}, y_{2018}) = 1$

Exercice 4 : (6 points)

1) a) $f_n'(x) = -\dfrac{e^{-\frac{x}{n}}}{n}$ donc $f_n'(x) \succ 0$ pour tout réel x

$\lim\limits_{x\to+\infty} f_n(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f_n(x) = +\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	↗	$+\infty$

b) $f(0) = e^{-\frac{0}{n}} = 1$ donc C_n passe par J(0,1)

c) $n+1 \succ n$ donc $\dfrac{1}{n} \succ \dfrac{1}{n+1}$ donc $-\dfrac{1}{n} \prec -\dfrac{1}{n+1}$

donc si $x \in [0,+\infty[$ alors $-\dfrac{x}{n} \prec -\dfrac{x}{n+1}$ et $f_n(x) \prec f_{n+1}(x)$ et C_n est au dessous de C_{n+1}

donc si $x \in]-\infty,0]$ alors $-\dfrac{x}{n} \succ -\dfrac{x}{n+1}$ et $f_n(x) \succ f_{n+1}(x)$ et C_n est au dessus de C_{n+1}

La courbe tracée en trait interrompu celle de C_3

La courbe tracée en trait continu celle de C_1

3) a) $g_n'(x) = -\dfrac{e^{-\frac{x}{n}}}{n} - 1$ pour tout réel positif x donc $g_n'(x) \prec 0$

$\lim\limits_{x\to+\infty} g_n(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} g_n(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{-\frac{x}{n}} - x = \lim\limits_{x\to-\infty} x\left(-\dfrac{1}{n}\dfrac{e^{-\frac{x}{n}}}{(-\frac{x}{n})} - 1\right) = +\infty$

x	$-\infty$		$+\infty$
$g_n'(x)$		−	
$g_n(x)$	$+\infty$	↘	$-\infty$

b) D'après la question précédente g_n est une bijection de $\mathbb{R}$ sur $\mathbb{R}$ donc l'équation $g_n(x) = 0$ admet une solution unique, soit x_n cette solution. $g_n(0) = 1$ et $g_n(1) = e^{-\frac{1}{n}} - 1$ or $-\dfrac{1}{n} \prec 0$ donc $e^{-\frac{1}{n}} \prec 1$ donc $g_n(0) \times g_n(1) \prec 0$ et par suite $x_n \in]0,1[$.

c) $g_n(x_n) = 0$ donc $f_n(x_n) = x_n$ donc x_n est l'abscisse du point d'intersection de la courbe C_n et la droite Δ : y=x

d) voir figure.

4)a) $g_{n+1}(x_n)=e^{-\frac{x_n}{n+1}}-x_n-(e^{-\frac{x_n}{n}}-x_n)=e^{-\frac{x_n}{n+1}}-x_n-e^{-\frac{x_n}{n}}+x_n=e^{-\frac{x_n}{n+1}}-e^{-\frac{x_n}{n}}$

b) $\frac{x_n}{n+1}\prec\frac{x_n}{n}$ donc $-\frac{x_n}{n+1}\succ-\frac{x_n}{n}$ donc $e^{-\frac{x_n}{n+1}}\succ e^{-\frac{x_n}{n}}$ donc $e^{-\frac{x_n}{n+1}}-e^{-\frac{x_n}{n}}\succ 0$

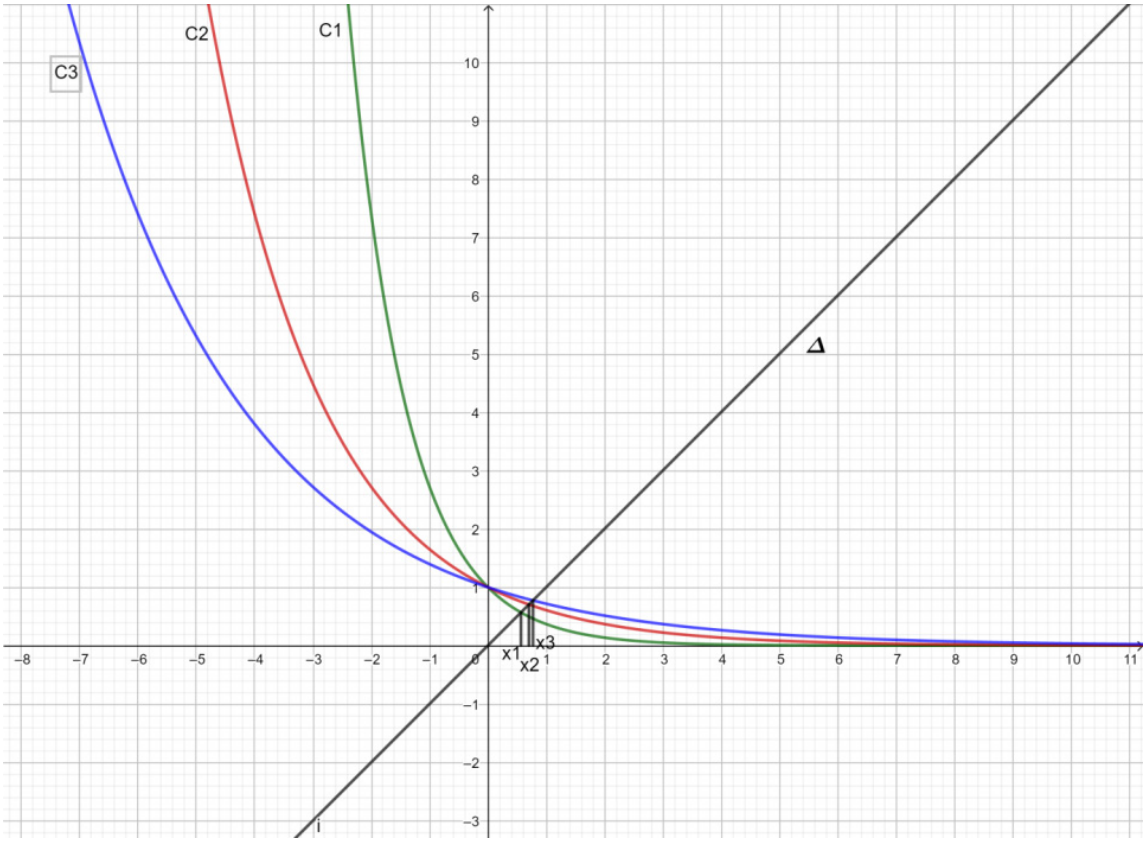
or $g_{n+1}(x_{n+1})=0$ et $g_{n+1}(x_n)=e^{-\frac{x_n}{n+1}}-e^{-\frac{x_n}{n}}$ donc $g_{n+1}(x_n)>g_{n+1}(x_{n+1})$

or g_n est strictement décroissante donc $x_n<x_{n+1}$ donc (x_n) est croissante

c) (x_n) est croisssante et majorée par 1 donc (x_n) est convergente, soit α cette limite

$0<x_n<1$ donc $0<\frac{x_n}{n}<\frac{1}{n}$ donc $-\frac{1}{n}<-\frac{x_n}{n}<0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}-\frac{x_n}{n}=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\frac{x_n}{n}}=1$

or $g_n(x_n)=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}g_n(x_n)=0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty}e^{-\frac{x_n}{n}}-x_n=1$ donc α=1



REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ●●●●● **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION **2018**	***Session de contrôle***	
	Epreuve : **Mathématiques**	Section : ***Sciences de l'informatique***
	Durée : **3h** ◆	Coefficient de l'épreuve : **3**

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3.

Exercice 1 (4 points)

On considère la matrice $A=\begin{pmatrix}-1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{pmatrix}$

1) Calculer $\det A$. En déduire que A est inversible.

2) a) Montrer que $A^2=\begin{pmatrix}1 & -1 & -2\\ 2 & -2 & 3\\ -1 & -6 & 2\end{pmatrix}$

b) Vérifier que $A^3-A^2 = -7\times I_3$ où I_3 est la matrice unité d'ordre 3.

c) En déduire A^{-1} la matrice inverse de A.

3) On considère le système (S) suivant $\begin{cases}-x-2y+z=3\\ x+y+z=7\\ 2x-y+z=1\end{cases}$ où x, y et z sont des réels

a) Écrire ce système sous forme matricielle.

b) Résoudre alors le système (S).

Exercice 2 (4,5 points)

Une urne contient trois boules blanches et trois boules noires. On tire au hasard, successivement et avec remise, n boules de l'urne (n étant un entier supérieur ou égal à 2)

On considère les événements :

A : « obtenir des boules de couleurs différentes »

B : « obtenir au plus une boule blanche »

C : « obtenir n boules de même couleur »

D : « obtenir une seule boule blanche »

1) a) Montrer que $p(C)=\frac{1}{2^{n-1}}$

b) Calculer $p(D)$

2) a) Montrer que $p(A)=1-\frac{1}{2^{n-1}}$

b) Montrer que $p(B)=\frac{n+1}{2^n}$

c) Vérifier que $p(A\cap B)=p(D)$

3) Soit (u_n) la suite définie pour $n\geq 2$ par : $u_n=2^{n-1}-(n+1)$

a) Montrer que (u_n) est croissante.

b) En déduire que u_n s'annule uniquement pour $n=3$.

4) Pour quelles valeurs de n a-t-on $p(A\cap B)=p(A)\times p(B)$?

Exercice 3 (5,5 points)

1) On considère l'équation (E) : $5x-26y=1$ où x et y sont des entiers relatifs.

a) Vérifier que $(-5,-1)$ est une solution de (E).

b) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

2) On assimile chaque lettre de l'alphabet à un entier comme l'indique le tableau ci – dessous

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25

On définit un procédé de codage de la façon suivante :

- à la lettre que l'on veut coder, on associe l'entier n correspondant dans le tableau.
- on calcule le reste de la division euclidienne de $5n+2$ par 26 que l'on note m.
- à l'entier m, on associe la lettre correspondante dans le tableau.

a) Vérifier que la lettre F est « codée » B.

b) Coder le mot BAC, sachant que le codage s'effectue "lettre par lettre" et dans l'ordre.

3) a) Montrer que pour tous entiers n et m, on a :

$$5n+2\equiv m[26]\Leftrightarrow n\equiv 21m+10[26]$$

b) En déduire un procédé permettant de reconnaitre une lettre « codée »

c) Reconnaitre le mot dont le code est « UA ».

Exercice 4 (6 points)

1) On considère la fonction f définie sur $]1,+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{x}{\ln x}$.

   a) Calculer les limites suivantes : $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

   b) Déterminer $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter graphiquement le résultat.

2) a) Vérifier que pour tout $x\in]1,+\infty[$, $f'(x)=\dfrac{\ln x-1}{(\ln x)^2}$.

   b) Dresser le tableau de variations de f.

   c) Montrer que la restriction de f réalise une bijection de $[e,+\infty[$ sur $[e,+\infty[$. On note f^{-1} sa réciproque.

3) Tracer les courbes représentatives de f et f^{-1} dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

4) On définit la suite (u_n) par $u_0=3$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$

   a) Montrer, par récurrence, que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_n\geq e$

   b) Montrer que la suite (u_n) est décroissante.

   c) En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

5) a) Montrer que pour tout $x\geq e$, $f'(x)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}\left(1-\dfrac{2}{\ln x}\right)^2$

   b) En déduire que pour tout $x\geq e$, $0\leq f'(x)\leq\dfrac{1}{4}$

6) a) Montrer, à l'aide de l'inégalité des accroissements finis, que pour tout $n\in\mathbb{N}$,
   $|u_{n+1}-e|\leq\dfrac{1}{4}|u_n-e|$

   b) En déduire que, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $|u_n-e|\leq\dfrac{1}{4^n}$

   c) Retrouver ainsi la limite de la suite (u_n).

Correction de l'épreuve de mathématiques (bac Sciences de l'informatique)
Session de contrôle 2018

Exercice 1 : (4 points)

1) $detA=\begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ $detA=-7\neq 0$ donc A est inversible

2)a) $A^2=A\text{x}A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 3 \\ -1 & -6 & 2 \end{pmatrix}$

b) $A^3=A^2\text{x}A=\begin{pmatrix} -6 & -1 & -2 \\ 2 & -9 & 3 \\ -1 & -6 & -5 \end{pmatrix}$; $A^3-A^2=\begin{pmatrix} -7 & 0 & 0 \\ 0 & -7 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{pmatrix}$= -7 I_3

$c)A^3-A^2$= -7 I_3 donc $\text{A}\left(\frac{A^2-A}{-7}\right)=\text{I}_3$ donc $A^{-1}=\frac{-1}{7}(A^2-A)$

3)a) $\begin{cases} -x-2y+z=3 \\ x+y+z=7 \\ 2x-y+z=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}\text{x}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\text{A}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{-10}{7} \\ \frac{16}{7} \\ \frac{43}{7} \end{pmatrix}$ donc $S_{IR^3}=\left\{\left(\frac{-10}{7},\frac{16}{7},\frac{43}{7}\right)\right\}$

Exercice 2 : (4,5 points)

1)a) $p(C)=\left(\frac{3}{6}\right)^n+\left(\frac{3}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{2^{n-1}}$

b)$p(D)=n\text{x}\left(\frac{3}{6}\right)\text{x}\left(\frac{3}{6}\right)^{n-1}=\frac{n}{2^n}$

2)a)$p(A)=p(\overline{C})=1-p(C)$ $=1-\frac{1}{2^{n-1}}$

b)$p(B)=\left(\frac{3}{6}\right)^n+\frac{n}{2^n}$ $=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{n}{2^n}=\frac{n+1}{2^n}$

c)A∩B : "obtenir des boules de couleurs différentes" et "obtenir ou plus une boule blanche" donc A∩B : obtenir une seule boule blanche donc A∩B =D donc p(A∩B)=p(D)

3)a)$U_{n+1}-U_n=2^n-(n+2)-2^{n-1}+(n+1)$ $=2^n-n-2-2^{n-1}+n+1$

$=2^{n-1}(2-1)-1$ $=2^{n-1}-1$

Or $n\geq 2$ donc $n-1\geq 1$ donc $2^{n-1}\geq 2^1$ donc $U_{n+1}-U_n\geq 2^1-1$ donc $U_{n+1}-U_n\geq 2$ donc $U_{n+1}-U_n\geq 0$ (U_n) est croissante

b)$U_2=-1$, $U_3=0$, $U_4=3$ et comme (U_n) est croissante donc U_n s'annule uniquement pour $n=3$

4) p(A∩B)=$p(A)\text{x}\,p(B)$ $\Leftrightarrow$ $\frac{n}{2^n}=\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)\left(\frac{n+1}{2^n}\right)$ $\Leftrightarrow$ n=$\left(1-\frac{1}{2^{n-1}}\right)(n+1)$

$\Leftrightarrow n=n+1-\frac{n+1}{2^{n-1}}$ $\Leftrightarrow 2^{n-1}=n+1$ $\Leftrightarrow U_n=0$ $\Leftrightarrow n=3$

Exercice 3 : (5,5 points)

1)$(E) : 5x - 26y = 1$

a)$5\text{x}(-5) - 26\text{x}(-1) = 1$ donc$(-5, -1)$ est une solution de (E)

b))$(E) : 5x - 26y = 1$

$5\text{x}(-5) - 26\text{x}(-1) = 1$ donc $5x - 26y = 5\text{x}(-5) - 26\text{x}(-1)$

donc $5(x + 5) = 26(y + 1)$ donc 5 divise 25(y+1) or $5 \wedge 26=1$

donc 5 divise $y + 1$ donc il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y + 1 = 5k$

26 divise $5(x + 5)$ or $5 \wedge 26=1$ donc 26 divise $x + 5$ donc il existe k' $\in \mathbb{Z}$ tel que

$x + 5 = 26k'$ soit $x = 26k' - 5$

Réciproquement

On a $5(x + 5) = 26(y + 1)$ donc $5\text{x}26k' = 26\text{x}5k$ donc $k = k'$

donc $S_{\mathbb{Z}\text{x}\mathbb{Z}} = \{(26k - 5,5k - 1), k\epsilon\mathbb{Z}\}$

Autrement :

(x, y) est solution de $(E) \Leftrightarrow 5x - 26y = 1$ et $5\text{x}(-5) - 26\text{x}(-1) = 1$

$\Leftrightarrow 5(x + 5) = 26(y + 1) \quad \Leftrightarrow 5x - 26y = 1$ et 5 divise $26(y + 1) \Leftrightarrow 5x - 26y = 1$ et il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y + 1 = 5k$ car $5 \wedge 26=1 \Leftrightarrow y = -1 + 5k$ et $x = -5 + 26$; $k \in \mathbb{Z}$

2)a) à F on associe 5 et le reste de la division euclidienne par 5x5+2 par 26 est 1 ; la lettre associée à 1 est B.

b)BAC est codé HCM

3)a)$5n + 2 \equiv m[26]$ <=> $21(5n + 2) \equiv 21m[26]$ <=>$n - 10 \equiv 21m[26]$

<=>$n \equiv 21m + 10[26]$

b)On définit un procédé de décodage de la façon suivante :

-A la lettre que l'on veut décoder , on associe l'entier m correspondant dans le tableau

-On calcule le reste de la division euclidienne de $21m + 10$ par 26 que l'on note n

-A l'entier n , on associe la lettre correspondante dans le tableau

c) Ok est le mot dont le code est UA.

Exercice 4 : (6 points)

1)$f(x) = \frac{x}{lnx}$

a) $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{\ln x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \left(\frac{\ln x}{x}\right)^{-1} = +\infty$

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\ln x} = 0$

C_f admet une branche parabolique de direction (o,$\vec{i}$) au voisinage de $(+\infty)$

2)a) $f'(x) = \dfrac{\ln x - x.\frac{1}{x}}{(\ln x)^2} = \dfrac{\ln x - 1}{(\ln x)^2}$

b) $f'(x) = 0 \iff \ln x = 1 \iff x = e$

x	1	e	$+\infty$
f '(x)	—	0	+
f(x)	$+\infty$ ↘	e	↗ $+\infty$

$f(e) = e$

c) f continue et strictement croissante sur $[e, +\infty[$ => f réalise une bijection de $[e, +\infty[$ sur $[f(e), \lim\limits_{x \to +\infty} f(x)[= [e, +\infty[$

3)



4) $\begin{cases} U_0 = 3 \\ U_{n+1} = f(U_n) \end{cases}$

a) pour n=0 , $U_0 = 3 \geq e$

soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $U_n \geq e$ montrons que $U_{n+1} \geq e$

On a $U_n \geq e$ et f strictement croissante sur $[e, +\infty[$ donc $f(U_n) \geq f(e)$ donc $U_{n+1} \geq f(e)$

Conclusion pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n \geq e$

b) $U_{n+1} - U_n = f(U_n) - U_n = \frac{U_n(1-\ln(U_n))}{lnU_n} \leq 0$ car $U_n \geq e$ donc $U_{n+1} \leq U_n$ pour tout n

donc (U_n) est décroissante

c) (U_n) est décroissante et minorée par e donc (U_n) est convergente, soit l sa limite.

$U_{n+1} = f(U_n)$ U_n est convergente vers l or $U_n \geq e$ donc $l \geq e$ donc

f est continue en l donc $f(l) = l$ donc ln $(l) = 1$ donc $l = e$

5)a)$\frac{1}{4} - \frac{1}{4}(1 - \frac{2}{lnx}) = \frac{lnx-1}{ln^2x} = f'(x)$

b)$f'(x) - \frac{1}{4} = -\frac{1}{4}(1 - \frac{2}{lnx})^2 \leq 0$ donc $0 \leq f'(x) \leq \frac{1}{4}$

6)a)f est dérivable sur $[e, +\infty[$ et $|f'(x)| \leq \frac{1}{4}$ pour tout $x \in [e, +\infty[$

I.A.F $U_n \epsilon [e, +\infty[$, e $\in [e, +\infty[$ donc $|f(U_n) - f(e)| \leq \frac{1}{4}|U_n - e|$

donc $|U_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4}|U_n - e|$

b)pour n=0 , $|U_0 - e| \leq \frac{1}{4^0}$

soit $n \in \mathbb{N}$, supposons que $|U_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$ montrons que $|U_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4^{n+1}}$

On a $|U_{n+1} - e| \leq \frac{1}{4}|U_n - e|$

$\leq \frac{1}{4} \text{x} \frac{1}{4^n}$

$\leq \frac{1}{4^{n+1}}$

Conclusion : pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|U_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$

c)On a $|U_n - e| \leq \frac{1}{4^n}$ et $\lim_{x \to \infty} \frac{1}{4^n} = 0$ donc $\lim_{x \to \infty} U_n - e = 0$ donc $\lim_{x \to \infty} U_n = e$

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ●●o●● **EXAMEN DU BACCALAURÉAT** SESSION **2017**	Épreuve : **Mathématiques**	
	Section : **Sciences de l'informatique**	
	Durée : 3h	Coefficient : 3
	Session principale	

Exercice 1 (4 points)

1) On considère, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^2 - 2(1+i)z + 3 - 2i = 0$

   a) Vérifier que $(1+2i)^2 = -3+4i$

   b) Résoudre, dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) .

2) Dans le plan complexe, muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les points A, B, C et D d'affixes respectives : $z_A = -i$, $z_B = 3$, $z_C = 2+3i$ et $z_D = -1+2i$

   a) Placer les points A, B, C et D dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

   b) Calculer $|z_C - z_A|$ et $|z_D - z_B|$

   c) Calculer $(z_C - z_A)(\overline{z_D - z_B})$

   d) Déduire que ABCD est un carré et calculer son aire.

Exercice 2 (4 points)

1) On considère la fonction g définie sur $]0, +\infty[$ par $g(x) = x^2 + 1 - \ln x$

   a) Etudier les variations de g sur $]0, +\infty[$

   b) En déduire le signe de g sur $]0, +\infty[$

2) On considère la fonction f définie sur $]0, +\infty[$ par $f(x) = x - 1 + \dfrac{\ln x}{x}$

   On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j})$ d'unité graphique 3 cm

   a) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x)$ et interpréter graphiquement le résultat

   b) Déterminer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x \to +\infty} (f(x) - x + 1)$. Interpréter graphiquement ce résultat

   c) Montrer que pour tout $x \in]0, +\infty[$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$

   d) Dresser le tableau de variations de f

   e) Préciser la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à son asymptote et tracer $\mathcal{C}$

3) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe $\mathcal{C}$, les droites d'équation $x = 1$; $x = 2$ et $y = x - 1$.

Exercice 3 (6 points)

On donne les matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ -3 & 2 & -1\end{pmatrix}$ et $B=\begin{pmatrix}-1 & 3 & 2\\ -2 & 2 & 0\\ -1 & -5 & -2\end{pmatrix}$

1) a) Montrer que la matrice A est inversible

b) Calculer $A\times B$ et en déduire A^{-1} la matrice inverse de A

2) Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O\ ;\vec{i},\vec{j})$

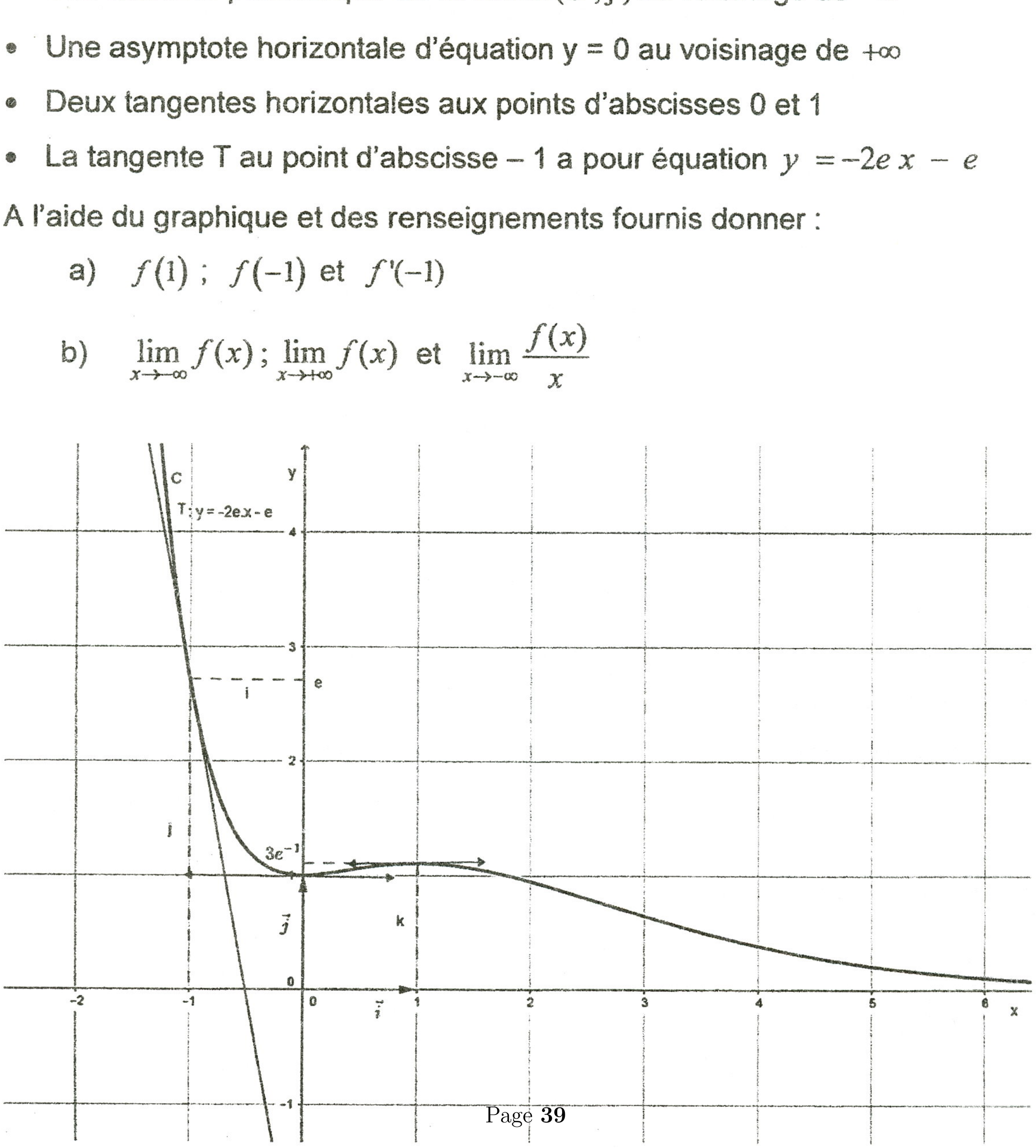
La courbe C représentée ci-dessous est celle d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, elle admet :

- Une branche parabolique de direction $(O\ ;\vec{j}\ )$ au voisinage de $-\infty$
- Une asymptote horizontale d'équation y = 0 au voisinage de $+\infty$
- Deux tangentes horizontales aux points d'abscisses 0 et 1
- La tangente T au point d'abscisse – 1 a pour équation $y=-2e\,x-e$

A l'aide du graphique et des renseignements fournis donner :

a) $f(1)$; $f(-1)$ et $f'(-1)$

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{f(x)}{x}$



3) On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)e^{-x}$ où a, b, c sont des réels

a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = \left(-ax^2 + (2a-b)x + (b-c)\right)e^{-x}$

b) Montrer que les réels a, b et c vérifient le système

$$(S): \begin{cases} a+b+c = 3 \\ a-b+c = 1 \\ -3a+2b-c = -2 \end{cases}$$

c) Ecrire le système (S) sous forme matricielle et en déduire l'expression de $f(x)$

4) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $F(x) = \left(-x^2 - 3x - 4\right)e^{-x}$

a) Vérifier que F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

b) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe C, l'axe des abscisses et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$.

Exercice 4 (6 points)

1) a) Compléter le tableau suivant :

r	0	1	2	3	4
Le reste de la division euclidienne de 2^r par 5					
Le reste de la division euclidienne de 3^r par 5					
Le reste de la division euclidienne de $2^r + 3^r$ par 5					

b) En déduire que pour tout entier naturel q, $2^{4q} \equiv 1[5]$ et $3^{4q} \equiv 1[5]$

2) Pour tout entier naturel $k \geq 1$, notons r le reste de la division euclidienne de k par 4.

a) Quelles sont les valeurs possibles de r ?

b) Donner, selon la valeur de r, le reste de la division euclidienne de $2^k + 3^k$ par 5

3) a) Vérifier que pour tout entier naturel $k \geq 1$, $2^k + 3^k$ est impair

b) Donner suivant les valeurs de k, le chiffre des unités de $2^k + 3^k$

4) Quel est le chiffre des unités de $2^{2017} + 3^{2017}$?

Correction de l'épreuve de mathématiques (*bac Sciences de l'informatique*)

Session principale 2017

Exercice 1 :

De quoi s'agit t-il ?

*** Résolution d'équations du second degré dans IC**

*** Complexe et géométrie**

1) Soit l'équation $(E) : z^2 - 2(1+i)z + 3 - 2i = 0$ avec $z \in \mathbb{C}$.

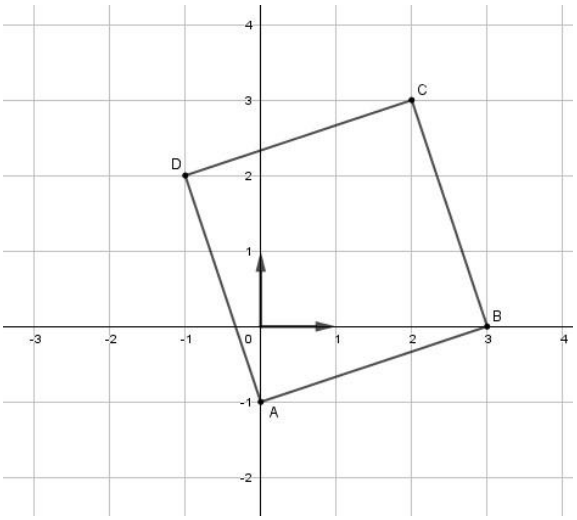
a) $(1+2i)^2 = 1^2 + 2 \times 1 \times 2i + (2i)^2 = -3 + 4i$

b) On pose $a = 1$, $b' = -(1+i)$ et $c = 3 - 2i$

$\Delta = \left(-(1+i)\right)^2 - (3-2i) = 2i - 3 + 2i = -3 + 4i = (1+2i)^2$

d'où $\begin{cases} z_1 = \frac{1+i-(1+2i)}{1} = -i \\ z_2 = \frac{1+i+(1+2i)}{1} = 2 + 3i \end{cases}$

Par suite $S_{\mathbb{C}} = \{-i, 2+3i\}$



2) a) $z_A = -i \implies A(0,-1)$

$z_B = 3 \implies B(3,0)$

$z_C = 2 + 3i \implies C(2,3)$

$z_D = -1 + 2i \implies D(-1,2)$

b) $|z_C - z_A| = |2 + 3i + i| = |2 + 4i| = \sqrt{4+16} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$|z_D - z_B| = |-1 + 2i - 3| = |-4 + 2i| = \sqrt{16+4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

c) $(z_C - z_A)(\overline{z_D - z_B}) = (2+4i)(\overline{-4+2i}) = (2+4i)(-4-2i) = -8 - 4i - 16i + 8 = -20i$

d) $|z_C - z_A| = |z_D - z_B| \Leftrightarrow AC = BD$

$(z_C - z_A)(\overline{z_D - z_B})$ est imaginaire pur $\Leftrightarrow \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{BD}$

$z_B - z_A = 3 + i$

$z_C - z_D = 2 + 3i + 1 - 2i = 3 + i$

Donc $z_B - z_A = z_C - z_D \Leftrightarrow \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$

$\Leftrightarrow$ ABCD est un parallélogramme

ABCD est un parallélogramme dont les diagonales sont perpendiculaires et isométriques donc est un carré.

aire (ABCD) $= \frac{\left(2\sqrt{5}\right)^2}{2} = 10$ u.a

Exercice 2 :

De quoi s'agit t-il ?

*** Fonction en logarithme népérien**

*** Fonction auxiliaire**

*** Calcul d'aires**

1) a) g est définie, continue et dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x > 0$ on a $g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}$.

$g'(x) = 0$ sig $\frac{2x^2-1}{x} = 0$

sig $x = \frac{1}{\sqrt{2}}$ car $x > 0$

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	$+\infty$	↘	$\frac{3}{2}+ln\sqrt{2}$	↗	$+\infty$

b) D'après le tableau de variation de g on a :

Pour tout $x > 0$, $g(x) > g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{3}{2} + \ln\sqrt{2} > 0$.

2) a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} x - 1 + \frac{\ln x}{x} = -\infty$

La droite d'équation $x = 0$ est une asymptote verticale à $\mathscr{C}$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} x - 1 + \frac{\ln x}{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - x + 1 = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) - (x-1) = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$

La droite d'équation $y = x - 1$ est une asymptote oblique à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

c) f est dérivable sur $]0,+\infty[$ et pour tout $x > 0$, $f'(x) = 1 + \frac{\frac{1}{x}\times x - \ln x \times 1}{x^2} = \frac{x^2+1-\ln x}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} > 0$

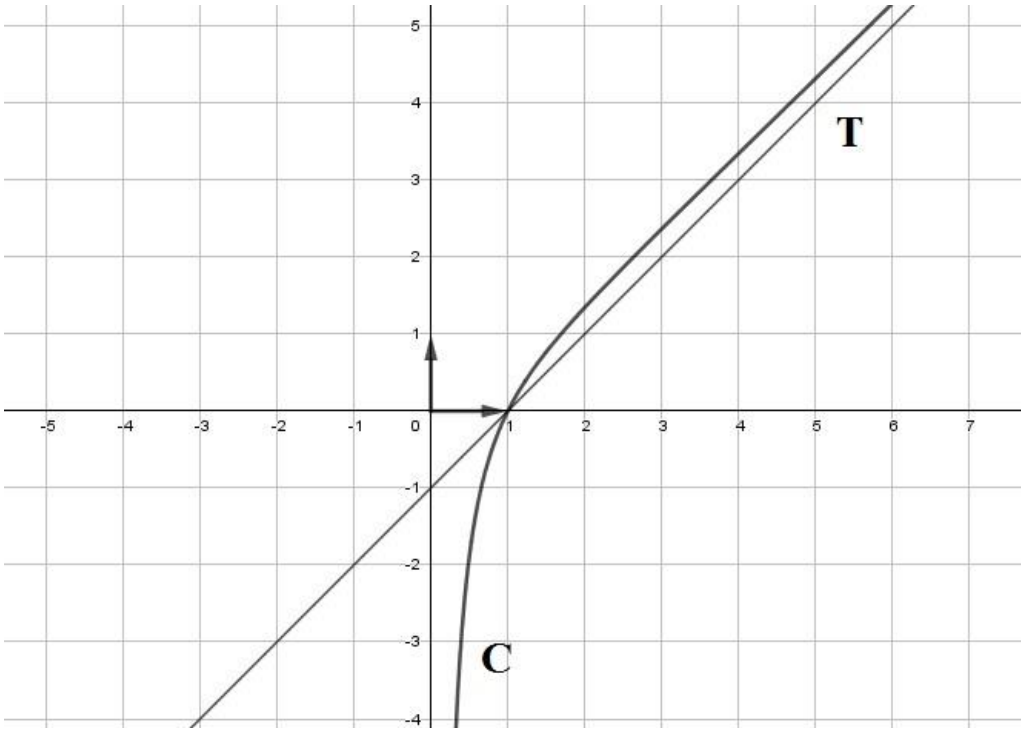
d) Tableau de variations de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$	‖	+	
$f(x)$	‖ $-\infty$	↗	$+\infty$

e) $f(x)-(x-1)=\frac{\ln x}{x}$ et $T: y=x-1$.

x	0		1		$+\infty$
$\frac{\ln x}{x}$	‖	−	○	+	
$f(x)-(x-1)$	‖	T/C		C/T	

Représentation graphique :



3) aire $=\int_1^2 f(x)-(x-1)dx \times 9=\int_1^2 \frac{\ln x}{x}dx \times 9=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^2 \times 9=\frac{9}{2}(\ln 2)^2$ cm²

Exercice 3 :

De quoi s'agit -il ?

- **Matrices, déterminants et systèmes de trois équations à trois inconnues**
- **Lecture graphique**
- **Fonctions primitives et calcul d'aires**

1)a) $\det(A) = -4 \neq 0$ alors la matrice A est inversible.

b) $A \times B = -4\, I_3$ alors $A^{-1} = -\frac{1}{4} B$

2) Par lecture graphique on a :

a) $f(1) = 3e^{-1} = \frac{3}{e}$, $f(-1) = e$ et $f'(-1) = -2\, e$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = -\infty$.

3) a) $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^{-x}$ qui est dérivable sur IR .

et $f'(x) = (-2ax + b)e^{-x} + (ax^2 + bx + c)(-e^{-x})$

$= (-ax^2 + (2a - b)x + (b - c))\, e^{-x}$

b) $f(1) = (a + b + c)e^{-1} = 3e^{-1} \implies a + b + c = 3$

$f(-1) = (a - b + c)e = e \implies a - b + c = 1$

$f'(-1) = (-a - 2a + b + b - c)e = -2e \implies -3a + 2b - c = -2$

Par conséquent les réels a, b et c vérifient le système :

$$(S) \begin{cases} a + b + c = 3 \\ a - b + c = 1 \\ -3a + 2b - c = -2 \end{cases}$$

c) $(S) \Leftrightarrow A \times X = C$ avec $X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow X = A^{-1} \times C$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = -\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 0 \\ -1 & -5 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

et $f(x) = (x^2 + x + 1)e^{-x}$

4)a) $F(x) = (-x^2 - 3x - 4)e^{-x}$ est dérivable sur IR ,

et $F'(x) = (-2x - 3)e^{-x} + (-x^2 - 3x - 4)(-e^{-x})$

$= (-2x - 3 + x^2 + 3x + 4)e^{-x}$

$= (x^2 + x + 1)e^{-x} = f(x)$

Donc F est une primitive de f sur IR.

b) l'aire : $A = \int_0^1 f(x)dx = [F(x)]_0^1 = F(1) - F(0) = -\frac{8}{e} + 4 = 4 - \frac{8}{e}$ u.a

Exercice 4 :

De quoi s'agit -il ?

*** Division euclidienne,**

*** congruences**

1) a)

r	0	1	2	3	4
Le reste de la division euclidienne de 2^r par 5	1	2	4	3	1
Le reste de la division euclidienne de 3^r par 5	1	3	4	2	1
Le reste de la division euclidienne de $2^r + 3^r$ par 5	2	0	3	0	2

b) $2^4 \equiv 6 \equiv 1\ [5]$ d'où pour tout entier q , $2^{4q} \equiv 1\ [5]$

$3^4 \equiv 1\ [5]$ d'où pour tout entier q , $3^{4q} \equiv 1\ [5]$

2) a) Les valeurs possibles de r sont : 0, 1, 2 ou 3.

b) Si $k = 4n$ alors $2^k + 3^k \equiv 2\ [5]$

Si $k = 4n + 1$ alors $2^k + 3^k \equiv 0\ [5]$

Si $k = 4n + 2$ alors $2^k + 3^k \equiv 3\ [5]$

Si $k = 4n + 3$ alors $2^k + 3^k \equiv 0\ [5]$

3) a) Pour $k \geq 1$, 2^k est pair et 3^k est impair puisque $3 \equiv 1[2]$

donc $3^k \equiv 1[2]$ par suite $2^k + 3^k$ est impair.

b) Le chiffre des unités de $2^k + 3^k$ est 3, 5 ou 7.

4) Le chiffre des unités de $2^{2017} + 3^{2017}$ est 5.

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ●●○●● **EXAMEN DU BACCALAURÉAT** SESSION **2017**	Épreuve : **Mathématiques**	
	Section : **Sciences de l'informatique**	
	Durée : 3h	Coefficient : 3
	Session de contrôle	

Le sujet comporte 3 pages numérotées de 1/3 à 3/3

Exercice 1 (4 points)

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par $\begin{cases} u_0 = \frac{1}{3} \\ u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n} \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1) a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$

b) Montrer que la suite (u_n) est croissante

c) Montrer que la suite (u_n) est convergente

2) On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique dont on précisera sa raison

b) Exprimer pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, v_n puis u_n en fonction de n

c) En déduire $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 2 (4 points)

La probabilité qu'un autobus parte à temps est 0,85 ; la probabilité qu'il parte à temps et arrive à temps est 0,75 et la probabilité qu'il arrive à temps est 0,78.

Soient P l'événement : "L'autobus part à temps"

et A l'événement : "L'autobus arrive à temps"

1) Déterminer la probabilité de chacun des évènements P, A et $P \cap A$.

2) Calculer la probabilité de chacun des évènements suivants :

a) A_1 : « l'autobus arrive à temps sachant qu'il est parti à temps »

b) A_2 : « l'autobus ne parte pas à temps et arrive à temps »

3) Pour se rendre au travail le matin, un ouvrier empreinte l'autobus.

Quelle est la probabilité pour que cet ouvrier arrive en retard au plus une fois pendant les 6 jours de travail de la semaine ?

Exercice 3 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $[0\ ,\ +\infty[$ par $f(x)=\sqrt{x}\,e^{-x}$. Soit $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(O\ ;\ \vec{i},\vec{j}\right)$ (unité graphique 4 cm)

1) a) Montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$

b) Montrer que pour tout réel $x>0$, $f'(x)=\dfrac{1-2x}{2\sqrt{x}}e^{-x}$. Préciser le signe de f'

c) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)}{x}$ et interpréter le résultat obtenu

2) a) Dresser le tableau de variation de f

b) Construire $\mathcal{C}$

3) On considère la suite (u_n) définie pour tout $n\in\mathbb{N}$ par $u_n=\int_0^n f(t)dt$

a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante

b) Montrer que pour $t\geq 0,\ 8t\leq(t+2)^2$

En déduire que pour $t\geq 0,\ \sqrt{t}\leq\dfrac{t+2}{2\sqrt{2}}$.

c) A l'aide d'une intégration par parties, calculer $\int_0^n (t+2)e^{-t}dt$

b) Montrer alors que (u_n) est convergente et donner un encadrement de sa limite à 10^{-1} près.

Exercice 4 (6 points)

1) On considère l'équation

(E_1) $5x-7y=3$, où x et y sont des entiers relatifs

a) Vérifier que $(2\ ,\ 1)$ est une solution de (E_1)

b) Déterminer l'ensemble des solutions de (E_1)

c) Soit $(a\ ,\ b)$ une solution de (E_1). On note d = PGCD $(a\ ,\ b)$, préciser les valeurs possibles de d

d) Pour chaque valeur de d donner un exemple de solution

2) On considère l'équation

(E_2) $5x^2-7y^2=3$, où x et y sont des entiers relatifs

a)) Montrer que si x et y sont des multiples de 3, alors le couple (x,y) n' est pas solution de (E_2)

b) Montrer que si le couple (x,y) est une solution de (E_2) alors $2x^2 \equiv y^2[3]$

c) Soit z un entier relatif, compléter les congruences suivantes:

Si $z \equiv 1[3]$ alors $z^2 \equiv \ ..[3]$

Si $z \equiv 2[3]$ alors $z^2 \equiv \ ..[3]$

d) En déduire que l'équation (E_2) n'admet pas de solution.

Correction de l'épreuve de mathématiques (*bac Sciences de l'informatique*)

Session de contrôle 2017

Exercice 1 :

De quoi s'agit t-il ?

*** suites réelles, convergence**
*** suites géométriques, terme général**

1) a) $*$ $n = 0$, $0 < u_0 = \frac{1}{3} < 1$ donc $P(0)$ est vraie.

$*$ Supposons que pour n entier naturel donné, $P(n)$ est vraie (c'est à dire $0 < u_n < 1$)

Montrons que $P(n+1)$est vraie (c'est à dire $0 < u_{n+1} < 1$)

$u_{n+1} = \frac{2u_n}{1+u_n} = \frac{2(u_n+1)-2}{1+u_n} = 2 - \frac{2}{1+u_n}$

On a : $0 < u_n < 1 \Longrightarrow 1 < 1 + u_n < 2$

$$\Longrightarrow \frac{1}{2} < \frac{1}{1+u_n} < 1$$

$$\Longrightarrow 0 < u_{n+1} = 2 - \frac{2}{1+u_n} < 1$$

Donc l'implication $P(n) \Longrightarrow P(n+1)$ est vraie.

Conclusion : Pour tout $n \geq 0$, $0 < u_n < 1$.

b) $u_{n+1} - u_n = \frac{2u_n}{1+u_n} - u_n = u_n\left(\frac{2}{1+u_n} - 1\right) = \frac{u_n}{1+u_n}(2 - 1 - u_n) = \frac{u_n}{1+u_n}(1 - u_n) > 0.$

Donc la suite (u_n) est croissante.

c) (u_n) est une suite croissante et majorée donc elle est convergente.

2) a) $v_{n+1} = \frac{u_{n+1}}{1-u_{n+1}} = \frac{\frac{2u_n}{1+u_n}}{1-\frac{2u_n}{1+u_n}} = \frac{2u_n}{1+u_n-2u_n} = \frac{2u_n}{1-u_n} = 2v_n$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison $q = 2$.

b) $v_0 = \frac{u_0}{1-u_0} = \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{1}{2}$ puis $v_n = v_0 q^n = \frac{1}{2} \times 2^n = 2^{n-1}$

$v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$ sig $u_n = \frac{v_n}{1+v_n} = \frac{2^{n-1}}{1+2^{n-1}}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{2^{n-1}}{1+2^{n-1}} = \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{\frac{1}{2^{n-1}}+1} = 1.$

Exercice 2 :

De quoi s'agit t-il ?

*** Calcul de probabilités d'évènements**

*** Probabilité conditionnelle, probabilité totale**

*** Loi binomiale**

1) $P(P) = 0{,}85$, $P(A) = 0{,}78$ et $P(P \cap A) = 0{,}75$

2) $P(A_1) = P(A/P) = \frac{P(A \cap P)}{P(P)} = \frac{15}{17}$

$P(A_2) = P(\overline{P} \cap A) = P(A) - P(P \cap A) = 0{,}78 - 0{,}75 = 0{,}03$

3) $n = 6$ et $p = P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 0{,}22$

Soit X la variable aléatoire qui est égale au nombre de fois qu'il arrive en retard

X suit la loi binomiale de paramètres (n, p).

$P(X \leq 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = C_6^0 \times 0{,}22^0 \times 0{,}78^6 + C_6^1 \times 0{,}22^1 \times 0{,}78^5 \approx 0{,}606$

Exercice 3 :

De quoi s'agit t-il ?

*** fonction en exponentielle**

*** Suite définie par une intégrale : Convergence et encadrement de la limite**

1) a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x}\, e^{-x} = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} \times \frac{1}{\frac{e^x}{x}} = 0$

La droite d'équation $y = 0$ est une asymptote horizontale à $\mathscr{C}$ au voisinage de $+\infty$.

b) f est définie et continue sur et $[0, +\infty[$.

f est dérivable sur $]0, +\infty[$ et pour tout $x > 0$ on a $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}\, e^{-x} + \sqrt{x}(-e^{-x}) = \left(\frac{1-2x}{2\sqrt{x}}\right) e^{-x}$

$f'(x) = 0$ sig $1 - 2x = 0$

sig $x = \frac{1}{2}$

* si $0 < x < \frac{1}{2}$ alors $f'(x) > 0$

* si $x > \frac{1}{2}$ alors $f'(x) < 0$

c) $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}\, e^x} = +\infty$

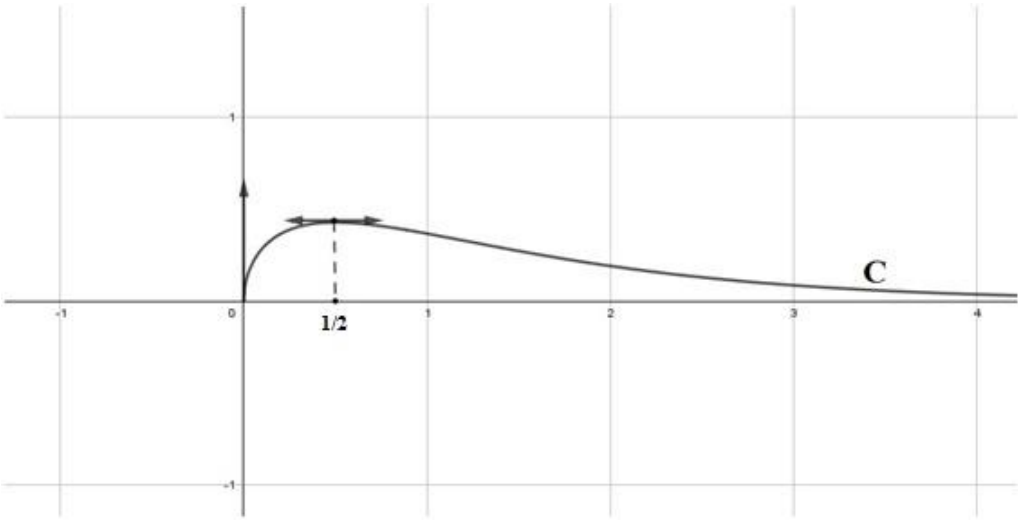
Donc f n'est pas dérivable à droite en 0 et $\mathscr{C}$ admet au point d'abscisse 0 une demi tangente verticale dirigée vers le haut.

2) a) Tableau de variations de f :

x	0		$\frac{1}{2}$		$+\infty$
$f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$f\left(\frac{1}{2}\right)$	↘	0

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{1}{2}}\, e^{-\frac{1}{2}} \approx 0{,}43$

b) Représentation graphique :



3)a) $u_{n+1} - u_n = \int_0^{n+1} f(t)dt - \int_0^n f(t)dt = \int_n^{n+1} f(t)dt \geq 0$ car $n+1 > n$ et f positive sur $[0, +\infty[$.

donc (u_n) est croissante.

b) $t \geq 0$, $(t+2)^2 - 8t = t^2 + 4t + 4 - 8t = t^2 - 4t + 4 = (t-2)^2 \geq 0$

sig $8t \leq (t+2)^2$

sig $\sqrt{8\,t} = 2\sqrt{2} \times \sqrt{t} \leq t + 2$

sig $\sqrt{t} \leq \frac{t+2}{2\sqrt{2}}$

c) On pose : $u(t) = t + 2 \rightarrow u'(t) = 1$ (Intégration par parties)

$v'(t) = e^{-t} \rightarrow v(t) = -e^{-t}$

$\int_0^n (t+2)\, e^{-t}dt = [-(t+2)\, e^{-t}]_0^n - \int_0^n -e^{-t}dt = [-(t+2)\, e^{-t}]_0^n + [-e^{-t}]_0^n = 3 - (n+3)\, e^{-n}$

d) $u_n = \int_0^n f(t)dt = \int_0^n \sqrt{t}\, e^{-t}dt \leq \int_0^n \frac{(t+2)}{2\sqrt{2}}\, e^{-t}dt = \frac{1}{2\sqrt{2}} \int_0^n (t+2)\, e^{-t}dt = \frac{3-(n+3)\, e^{-n}}{2\sqrt{2}} \leq \frac{3}{2\sqrt{2}}$

donc (u_n) est majorée.

(u_n) est une suite croissante et majorée donc elle est convergente.

Exercice 4 :

De quoi s'agit t-il ?

*** Arithmétique : Résolution d'équations dans Z x Z**

*** PGCD et PPCM**

*** Congruences**

1) a) (E_1) : $5x - 7y = 3$, $5 \times 2 - 7 \times 1 = 10 - 7 = 3$

Donc $(x_0, y_0) = (2, 1)$ est une solution de (E_1).

b) $(x_0, y_0) = (2, 1)$ est une solution particulière de (E_1).

$5x - 7y = 3$ (1)

$5x_0 - 7y_0 = 3$ (2)

$(1) - (2) \Longrightarrow 5(x - x_0) = 7(y - y_0)$

$\Longrightarrow 7 / 5(x - x_0)$

$7 / 5(x - x_0)$ et $PGCD(7, 5) = 1$ d'ou d'aprés le lemme de Gauss $7 / x - x_0$

$\Longrightarrow x - x_0 = 7k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

$\Longrightarrow x = x_0 + 7k$ avec $k \in \mathbb{Z}$

d'autre part $5(x - x_0) = 7(y - y_0) \Longrightarrow 5 \times 7k = 7(y - y_0)$

$\Longrightarrow 5 \times k = y - y_0$

$\Longrightarrow y = y_0 + 5k$

Conclusion : $S_{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}} = \{(2 + 7k, 1 + 5k) / \ k \in \mathbb{Z}\}$

c) (a, b) solution de (E_1) sig $5a - 7b = 3$.

On pose $d = a \wedge b \Longrightarrow d / a$ et d / b

$\Longrightarrow d / \ 5a - 7b = 3$

$\Longrightarrow d = 1$ ou $d = 3$

d) $d = 1$, $(2, 1)$ solution de (E_1) avec $2 \wedge 1 = 1$

$d = 3$, $(9, 6)$ solution de (E_1) avec $9 \wedge 6 = 3$

2) a) (E_2) : $5x^2 - 7y^2 = 3$

On pose $x = 3k$ et $y = 3k'$ avec $k, k' \in \mathbb{Z}$.

donc $5x^2 - 7y^2 = 9(5k^2 - 7k'^2) = 3$ implique $9 / 3$ impossible.

b) (x, y) est solution de (E_2) sig $5x^2 - 7y^2 = 3$

or $5 \equiv 2\ [3]$ et $7 \equiv 1\ [3]$ donc $5x^2 - 7y^2 \equiv 3\ [3] \implies 2x^2 \equiv y^2\ [3]$

c) si $z \equiv 1\ [3]$ alors $z^2 \equiv 1\ [3]$

si $z \equiv 2\ [3]$ alors $z^2 \equiv 1\ [3]$

d) (x, y) est solution de $(E_2) \implies$ x et y ne sont pas des multiples de 3.

$\implies x \equiv 1$ ou $2\ [3]$ et $y \equiv 1$ ou $2\ [3]$

$\implies 2x^2 \not\equiv y^2\ [3]$

Donc (E_2) n'a pas de solutions dans ZxZ.

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ***** EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Épreuve : **MATHÉMATIQUES**	
	Section : **Sciences DE L'INFORMATIQUE**	
	Durée : **3 h**	Coefficient : **3**
SESSION **2016**	**Session principale**	

Le sujet comporte trois pages, la page 3/ 3 est à rendre avec la copie

Exercice 1 (5 points)

On considère, dans $\mathbb{C}$, les deux équations suivantes :

$$(E_1): \ z^2-(1+5i)z-8+i=0$$

et $(E_2): \ z^3-(1+6i)z^2+(-13+2i)z+1+8i=0.$

1) a) Vérifier que $(3+i)^2 = 8+6i$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_1).

2) a) déterminer les nombres complexes b et c tels que :

$$z^3-(1+6i)z^2+(-13+2i)z+1+8i=(z-i)(z^2+bz+c)$$

b) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation (E_2).

3) Dans le plan complexe rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$, on considère les points d'affixes respectives $z_A=i$, $z_B=2+3i$ et $z_C=-1+2i$;

a) Placer les points A, B et C.

b) Montrer que ABC est un triangle rectangle.

Exercice 2 (5 points)

Le tableau suivant donne la proportion des ménages abonnés à Internet

Année	2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015
Rang (x_i)	1	2	3	4	5	6	7
Pourcentage (y_i)	8,1	11,4	14,3	17,1	22	28,8	33,5

Source : Tunisie Télécom

1) a) Représenter le nuage de points de coordonnées $(x_i ; y_i)$ dans un repère orthogonal.

b) Expliquer pourquoi un ajustement affine de ce nuage est justifié.

c) Calculer les coordonnées, à 0,1 près, du point moyen G du nuage. Placer G sur le graphique précédent.

2) a) Par la méthode des moindres carrés, donner l'équation de la droite de régression de y en x.

b) Estimer alors la proportion des ménages abonnés à Internet en Tunisie en 2018.

3) Peut-on à l'aide de cet ajustement, estimer la proportion des ménages tunisiens abonnés à Internet en 2032 ?

Exercice 3 (6 points)

I) On donne dans l'annexe joint, la courbe représentative (C g) dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ d'une fonction g définie sur $]0,+\infty[$.

1) A l'aide d'une lecture graphique :
   a) Déterminer g (1) et g '(1).
   b) Dresser le tableau de signe de g sur $]0,+\infty[$.
2) On suppose, dans la suite, que $g(x) = a + b \ln x$ où a et b sont deux constantes réelles. Montrer que $a = -1$ et $b = 2$.

II) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{-1-2\ln x}{x}$ et on désigne par (C f) sa courbe représentative dans le repère $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Calculer $\lim\limits_{+\infty} f$ et $\lim\limits_{0^+} f$ et interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) a) Montrer que pour tout $x > 0$; $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$
   b) Dresser le tableau de variation de f.
   c) Calculer $f\left(\dfrac{1}{\sqrt{e}}\right)$.
   d) Tracer (C f).

3) a) Montrer que $\int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\sqrt{e}} \dfrac{\ln x}{x} dx = 0$.
   b) Calculer l'aire de la partie du plan délimitée par la courbe (C f) , l'axe des ordonnées et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ et $x = \sqrt{e}$.

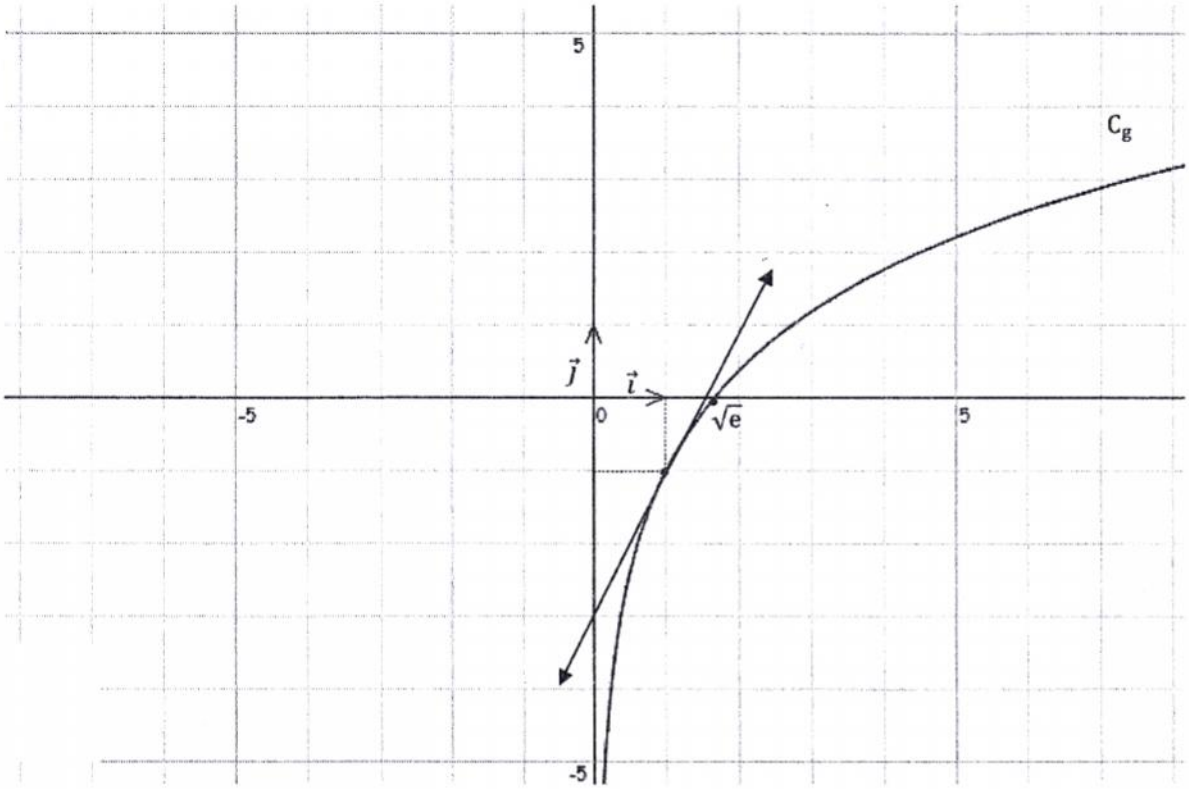
Exercice 4 (4 points)

On considère la suite (U_n) définie par : $\begin{cases} U_0 = 13 \\ U_{n+1} = 5U_n - 2 \end{cases}$ pour $n \in \mathbb{N}$

1) a) Calculer U_1, U_2, U_3 et U_4.
   b) Que peut-on dire à propos des deux derniers chiffres du terme U_n ?
   c) Montrer, par récurrence, que pour tout entier n, $U_n \equiv 13[50]$.
   d) En déduire les deux derniers chiffres du terme U_n.
2) Montrer que pour tout entier n ; U_n et U_{n+1} sont des entiers premiers entre eux.

Épreuve : MATHEMATIQUES – Section : Sciences de l'informatique (Session principale)

Annexe (à rendre avec la copie)



Examen du baccalauréat **Session principale**

Session de Juin 2016

Section : Sciences de l'informatique

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

1)a) $(3+i)^2 = 3^2 + 6i + i^2 = 9 + 6i - 1 = 8 + 6i.$

b) $(E_1) : z^2 - (1+5i)z - 8 + i = 0.$

$$\begin{aligned}\Delta &= (1+5i)^2 - 4\times(-8+i)\\ &= 1 + 10i - 25 + 32 - 4i\\ &= 8 + 6i = (3+i)^2\end{aligned}$$

$$z_1 = \frac{1+5i-(3+i)}{2} = -1+2i$$

$$z_2 = \frac{1+5i+(3+i)}{2} = 2+3i$$

$$S = \{-1+2i,\ 2+3i\}$$

2)a) $z^3 - (1+6i)z^2 + (-13+2i)z + 1 + 8i = (z-i)(z^2 + bz + c)$

$$\Leftrightarrow z^3 - (1+6i)z^2 + (-13+2i)z + 1 + 8i = z^3 + (b-i)z^2 + (c-ib)z - ic$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b - i = -(1+6i) \\ c - ib = -13 + 2i \\ -ic = 1 + 8i \end{cases} \qquad \Leftrightarrow \begin{cases} b = -1 - 5i \\ c = -8 + i \end{cases}$$

Ainsi $z^3 - (1+6i)z^2 + (-13+2i)z + 1 + 8i = (z-i)\left[z^2 - (1+5i)z - 8 + i\right]$

b) $(E_2) : z^3 - (1+6i)z^2 + (-13+2i)z + 1 + 8i = 0$

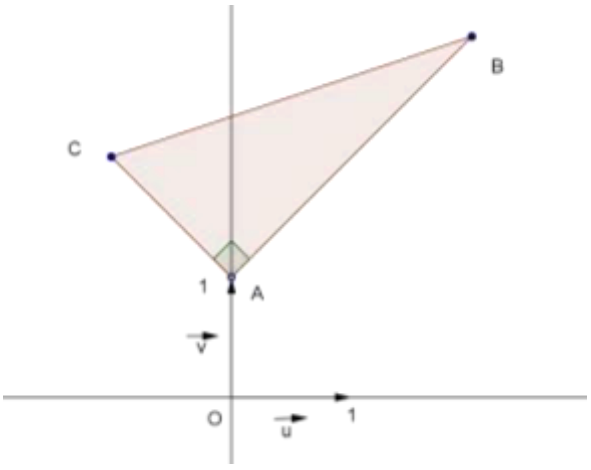
$$z^3 - (1+6i)z^2 + (-13+2i)z + 1 + 8i = 0 \Leftrightarrow (z-i)\left[z^2 - (1+5i)z - 8 + i\right] = 0$$

$$\Leftrightarrow z - i = 0 \ \text{ ou } \ z^2 - (1+5i)z - 8 + i = 0$$

$$\Leftrightarrow z = i \text{ ou } z = -1+2i \text{ ou } z = 2+3i.$$

$$S = \{i,\ -1+2i,\ 2+3i\}$$

3)a) $z_A = i, \ z_B = -1+2i$ et $z_C = 2+3i.$



b) $AB^2 = |z_B - z_A|^2 = |2+2i|^2 = 2^2 + 2^2 = 8$

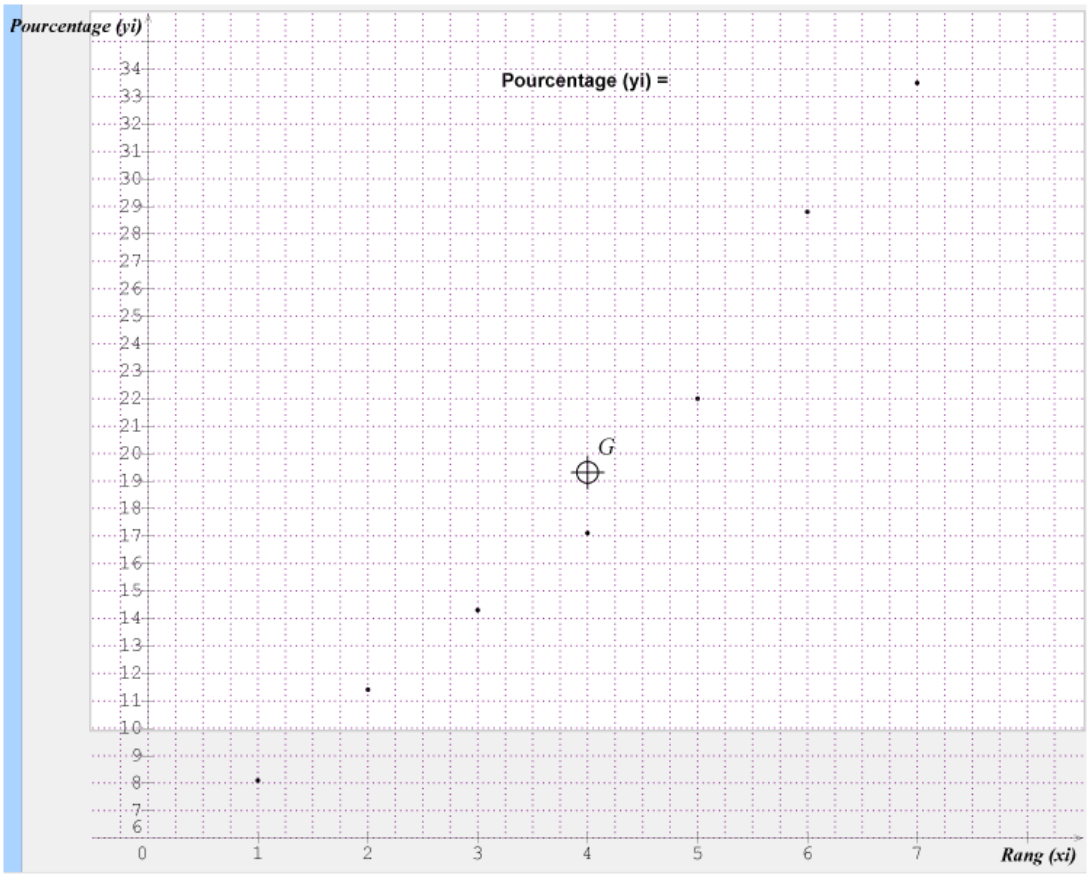
$AC^2 = |z_C - z_A|^2 = |-1+i|^2 = (-1)^2 + 1^2 = 2$

$BC^2 = |z_C - z_B|^2 = |-3-i|^2 = (-3)^2 + (-1)^2 = 10$

$BC^2 = AB^2 + AC^2$, d'où ABC est un triangle rectangle en A.

Exercice 2

1)a)



b) On peut remarquer que le nuage s'allonge suivant une droite, d'où un ajustement affine est justifié.

c) $G(\bar{x}\,;\bar{y})$; où $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont les moyennes arithmétiques respectives des x_i et y_i.

G(4 ; 19,31).

2)a) L'équation de la droite de régression de y en x est : $y = 4{,}23x + 2{,}35$.

b) 2018 est de rang $x = 10$, donc on peut estimer le pourcentage des ménages abonnés à Internet en Tunisie en 2018 : $y = 4{,}23 \times 10 + 2{,}35 = 44{,}65$.

c) On ne sait pas si la tendance restera la même ou non, donc on ne peut pas estimer le pourcentage des ménages abonnés à Internet en Tunisie en 2032, en utilisant cet ajustement. D'ailleurs si on suppose que la tendance restera la même et on applique cet ajustement on va trouver des pourcentages qui ne sont pas acceptables :

Le rang de l'année 2032 est $x = 24$ et on aura $y = 4{,}23 \times 24 + 2{,}35 = 103{,}87$.

Exercice 3

I]1)a) Par une lecture graphique $g(1)=-1$ et $g'(1)=2$.

b) Le signe de g :

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
g(x)	‖	−	0	+	

2) $g(x)=a+b\ \ln x\ ;\ x\in\ ]0,\ +\infty[$

$g'(x)=\dfrac{b}{x};\ x\in\ ]0,\ +\infty[$

$g(1)=-1\Rightarrow a=-1$

$g'(1)=2\ \Rightarrow b=2$

D'où $g(x)=-1+2\ln x\quad ;\ x\in\ ]0,\ +\infty[$.

II] $f(x)=\dfrac{-1-2\ln x}{x}\quad ;\quad x\in\ ]0,\ +\infty[$

1) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{-1-2\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}-\dfrac{1}{x}-2\,\dfrac{\ln x}{x}=0.$

$\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$, d'où la courbe (C_f) admet l'axe des abscisses comme asymptote horizontale au voisinage de (+∞).

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{-1-2\ln x}{x}=\lim\limits_{x\to0^+}-\dfrac{1}{x}\ 1+2\ln x\ =+\infty.$

$\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=+\infty$, d'où la courbe (C_f) admet l'axe des ordonnées comme asymptote verticale.

2)a) $f(x)=\dfrac{-1-2\ln x}{x}\quad ;\quad x\in\ ]0,\ +\infty[$

$$f'(x)=\frac{-1-2\ln x\ ' x-\ -1-2\ln x}{x^2}$$

$$=\frac{-\dfrac{2}{x}x+1+2\ln x}{x^2}=\frac{-1+2\ln x}{x^2}=\frac{g(x)}{x^2},\ \ x>0.$$

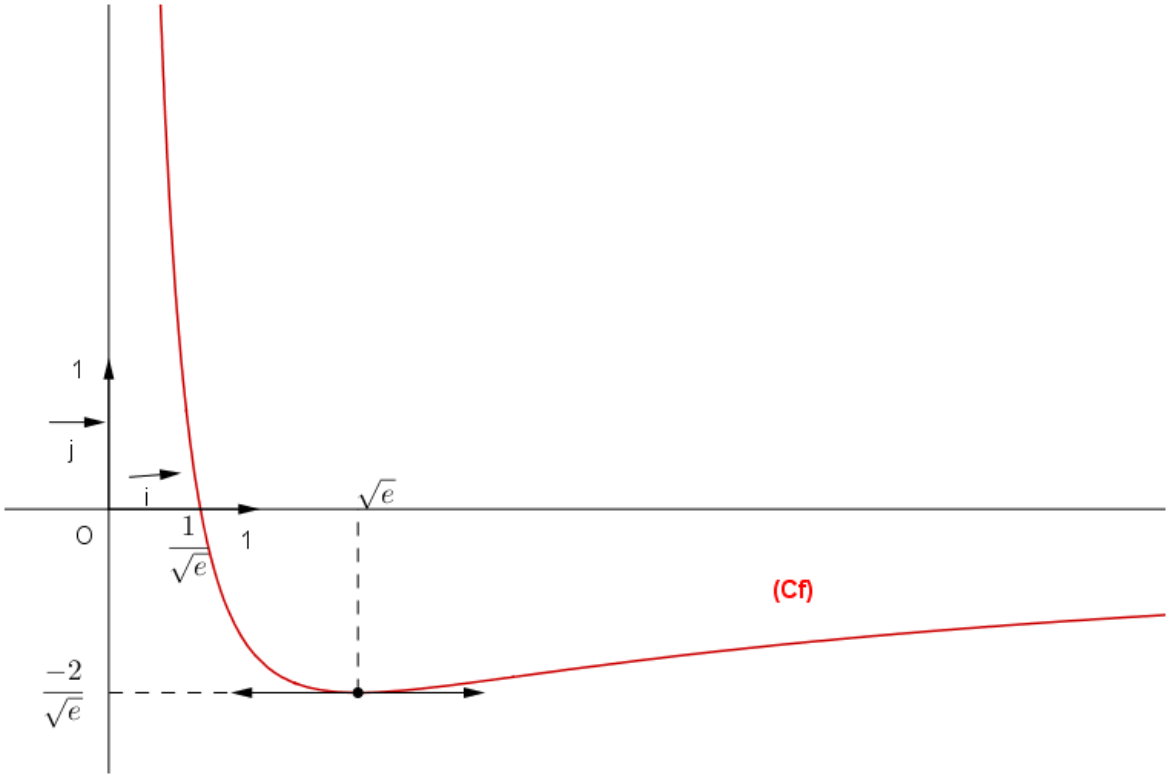
b) $f'(x)=\dfrac{g(x)}{x^2}$, pour tout $x>0$.

Le signe de f' est celui de g.

x	0		$\sqrt{e}$		$+\infty$
f'(x)	‖	−	0	+	
f	‖ $+\infty$	↘	$-\dfrac{2}{\sqrt{e}}$	↗	0

c) $f(\frac{1}{\sqrt{e}}) = \dfrac{-1-2\ln\frac{1}{\sqrt{e}}}{\frac{1}{\sqrt{e}}} = \sqrt{e}\ -1+2\ln\sqrt{e}\ = \sqrt{e}\ -1+\ln e\ = 0.$

d) La courbe (C_f) :



3)a) $\int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\sqrt{e}} \frac{\ln x}{x}\,dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\sqrt{e}} \frac{1}{x}\ln x\,dx = \left[\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\sqrt{e}} = \frac{1}{2}(\ln\sqrt{e})^2 - \frac{1}{2}(\ln\frac{1}{\sqrt{e}})^2 = \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\times\left(-\frac{1}{2}\right)^2 = 0.$

b) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (C_f), l'axe des ordonnées et les droites d'équations $x = \dfrac{1}{\sqrt{e}}$ et $x = \sqrt{e}$.

$$A = \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\sqrt{e}} -f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\sqrt{e}} \frac{1+2\ln x}{x}\,dx$$

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\sqrt{e}} \left(\frac{1}{x}+2\frac{\ln x}{x}\right)dx = \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\sqrt{e}} \frac{1}{x}\,dx + 2\int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\sqrt{e}} \left(\frac{\ln x}{x}\right)dx$$

$$= \int_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\sqrt{e}} \frac{1}{x}\,dx = \ln x\,\Big|_{\frac{1}{\sqrt{e}}}^{\sqrt{e}} = \ln\sqrt{e} - \ln\frac{1}{\sqrt{e}} = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right) = 1\ \text{u.a.}$$

Exercice 4

$$(U_n):\begin{cases} U_0 = 13 \\ U_{n+1} = 5U_n - 2 \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

1)a) $U_1 = 5U_0 - 2 = 5 \times 13 - 2 = 63$

$U_2 = 5U_1 - 2 = 5 \times 63 - 2 = 313$

$U_3 = 5U_2 - 2 = 5 \times 313 - 2 = 1563$

$U_4 = 5U_3 - 2 = 5 \times 1563 - 2 = 7813$

b) Il parait que les deux derniers chiffres de U_n sont 63 si n est impair et 13 si n est pair.

c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $U_n \equiv 13 \ [50]$.

- $U_0 = 13 \equiv 13 \ [50]$, d'où la proposition est vraie pour $n = 0$.
- Soit $p \in \mathbb{N}$, supposons que la proposition est vraie pour p, c'est-à-dire $U_p \equiv 13 \ [50]$.
- Montrons que la proposition est vraie pour $p+1$.

$U_p \equiv 13 \ [50] \Rightarrow 5U_p \equiv 65 \ [50]$

$\Rightarrow 5U_p - 2 \equiv 63 \ [50]$

$\Rightarrow U_{p+1} \equiv 13 \ [50]$

D'où la proposition est vraie pour $p+1$.

Ainsi d'après le principe de raisonnement par récurrence $U_n \equiv 13 \ [50]$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

d) $U_n \equiv 13 \ [50]$; pour tout $n \in \mathbb{N}$.

$U_n = 50q + 13 \ ; q \in \mathbb{N}$.

- Si q est pair alors $U_n = 100k + 13 \ ; k \in \mathbb{N}$ et cela veut dire que les deux derniers chiffres de U_n sont 13.
- Si q est impair alors $U_n = 100k' + 63 \ ; k' \in \mathbb{N}$ et cela veut dire que les deux derniers chiffres de U_n sont 63.

2) On a $U_n = 50q + 13 \ ; q \in \mathbb{N}$ d'où U_n est toujours impair.

Soit d un diviseur commun de U_n et U_{n+1}.

On a d / U_n donc $d / 5U_n$

d / U_{n+1} et $d / 5U_n$, donc $d / U_{n+1} - 5U_n$, c'est à dire $d / (-2)$

donc $d = 1$ ou $d = 2$ or on sait que U_n est impair donc $d = 1$.

Par suite U_n et U_{n+1} sont premiers entre eux.

RÉPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION ***** EXAMEN DU BACCALAURÉAT	Épreuve : **MATHÉMATIQUES**	
	Section : **Sciences DE L'INFORMATIQUE**	
	Durée : **3 h**	Coefficient : **3**
SESSION **2016**	**Session de contrôle**	

Le sujet comporte trois pages, la page 3/ 3 est à rendre avec la copie

Exercice 1 (4 points)

Pour chacune des questions suivantes, une seule des trois réponses proposées est exacte. Le candidat indiquera sur sa copie le numéro de la question et la lettre correspondante à la réponse choisie. Aucune justification n'est demandée.

- Soit (U_n) la suite définie pour tout entier naturel non nul par : $U_n = \ln\left(1+\frac{1}{n}\right)$,

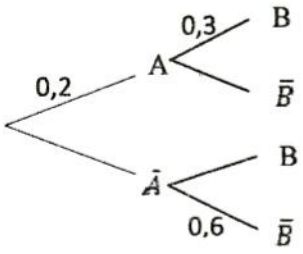
  1)La limite de la suite (U_n) est égale à :

  a) 0 b) 1 c) e

  2)La suite (U_n) est :

  a) croissante b) décroissante c) non monotone

- On considère l'arbre de probabilité suivant :



  3) $P(\overline{A} \cap \overline{B})$ est égale à :

  a) 0,14 b) 0,48 c) 0,6

  4) P(B) est égale à :

  a) 0,32 b) 0,38 c) 0,5

Exercice 2 (5 points)

1) On considère la matrice $M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\alpha \in \mathbb{R}$.

   a) Calculer, en fonction de α le déterminant de M_α.

   b) Pour quelles valeurs de α ; M_α est inversible ?

2) On donne les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix}$.

   a) En utilisant la première question, justifier que A est inversible.

   b) Calculer $A \times B$.

   c) En déduire A^{-1} et B^{-1}.

3) On considère le système $(S): \begin{cases} x-2y+4z=3 \\ -2x+4y+z=3 \\ 4x+y-2z=-6 \end{cases}$

   a) Ecrire le système (S) sous forme matricielle.

   b) Résoudre, alors (S).

Exercice 3 (6 points)

A) On donne dans l'annexe joint, la courbe (C) dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$, par : $f(x) = e^x - 1$.

1) Montrer que la droite $\Delta : y = x$ est la tangente à (C) au point O (0,0).
2) Montrer que f est une bijection de $\mathbb{R}$ sur un intervalle I que l'on précisera.
3) Tracer Δ et la courbe (C') de la fonction réciproque f^{-1} dans le repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
4) Expliciter $f^{-1}(x)$ pour tout réel x de I.

B) Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$, par : $g(x) = e^x - 1 + \dfrac{1}{e^x + 1}$ et (Γ) sa courbe représentative.

1) a) Calculer $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x)$ interpréter graphiquement ce résultat.

   b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x)$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{g(x)}{x}$.

2) a) Etudier le signe de $\big(f(x) - g(x)\big)$ pour x réel, en déduire la position relative de (C) et (Γ).

   b) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} \big(f(x) - g(x)\big)$.

3) a) Montrer que pour tout réel x, $g'(x) = \dfrac{e^{2x}\left(e^x + 2\right)}{\left(e^x + 1\right)^2}$

   b) Dresser le tableau de variation de g.

   c) Calculer g (0) puis tracer (Γ) dans le repère $\mathcal{R}$.

4) a) Vérifier que pour tout réel x; $g(x) = e^x - \dfrac{e^x}{e^x + 1}$.

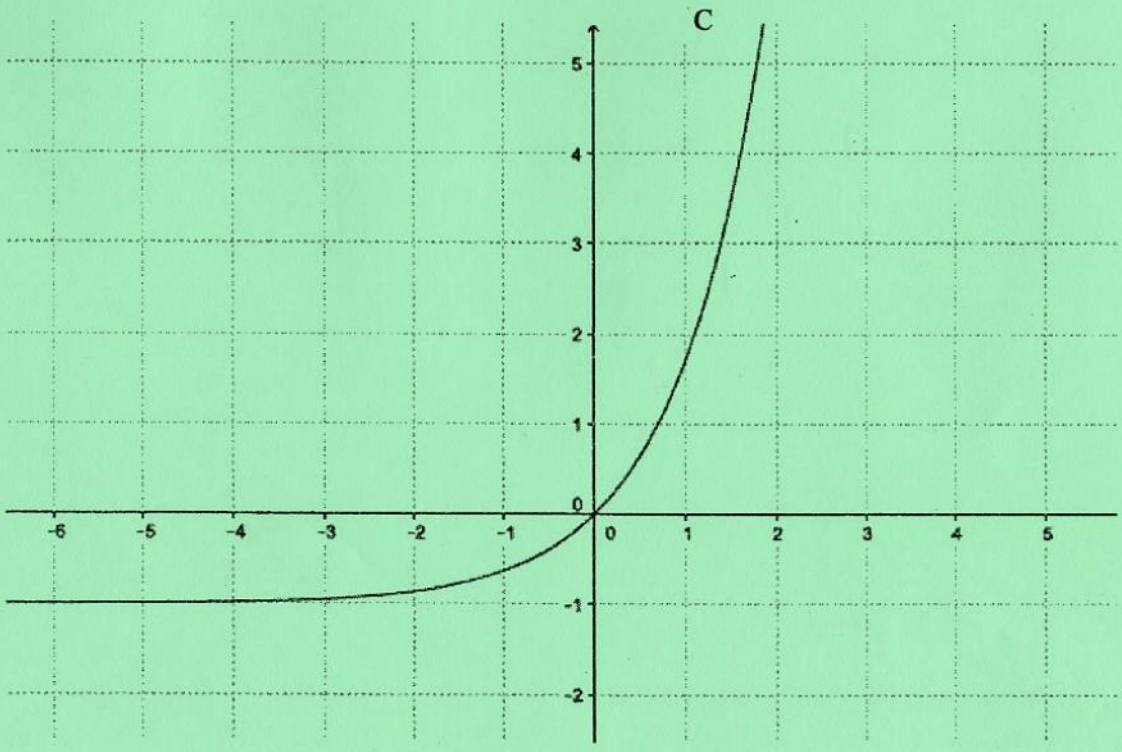
   b) Soit $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan délimitée par l'axe des abscisses, la courbe (Γ) et les droites d'équations $x = 0$ et $x = 1$. Calculer $\mathcal{A}$.

Exercice 4 (5 points)

1) On considère dans $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ l'équation (E) : $11x - 7y = 4$.
   a) Vérifier que (1,1) est une solution de l'équation (E).
   b) Résoudre l'équation (E).
2) Soit G l'ensemble des entiers relatifs n vérifiant : $n \equiv 2\ [11]$ et $n \equiv 6\ [7]$
   a) Vérifier que 90 est un élément de G.
   b) Soit n un élément de G, et (p, q) le couple d'entiers relatifs vérifiant
   $$\begin{cases} n = 11p + 2 \\ n = 7q + 6 \end{cases}$$
   Montrer que le couple (p, q) est une solution de (E).
   c) En déduire que si n appartient à l'ensemble G alors $n \equiv 13\ [77]$.
3) Montrer que si $n \equiv 13\ [77]$ alors n est un élément de G.
4) Déterminer le plus petit élément de G supérieur à 2000.

Épreuve : MATHÉMATIQUES - Section Sciences de l'informatique (session de contrôle 2016)

Annexe (à rendre avec la copie)



Examen du baccalauréat **Session de contrôle**

Session de Juin 2016

Section : Sciences de l'informatique

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

Question	1)	2)	3)	4)
Réponse	a	b	b	b

1) $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} \ln(1+\frac{1}{n}) = \ln(1) = 0.$

2) On a : $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1} \Rightarrow 1+\frac{1}{n} > 1+\frac{1}{n+1}$

$$\Rightarrow \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > \ln\left(1+\frac{1}{n+1}\right)$$

$$\Rightarrow U_n > U_{n+1}$$

3) $p(\overline{A}\cap\overline{B}) = p(\overline{A}).p(\overline{B}/\overline{A}) = 0,8\times 0,6 = 0,48.$

4) $p(B) = p(A).p(B/A) + p(\overline{A}).p(B/\overline{A}) = 0,2\times 0,3 + 0,8\times 0,4 = 0,38.$

Exercice 2

1) $M_\alpha = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{pmatrix}$; $\alpha \in IR.$

a) $\det(M_\alpha) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \alpha \\ 0 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\times\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 0\times\begin{vmatrix} 0 & \alpha \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + \alpha\times\begin{vmatrix} 0 & \alpha \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = -1-\alpha^3.$

b) M_α est inversible $\Leftrightarrow \det(M_\alpha) \neq 0$

$$\Leftrightarrow \det(M_\alpha) \neq 0$$

$$\Leftrightarrow -1-\alpha^3 \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \alpha^3+1 \neq 0$$

$\alpha^3+1=0,\ \alpha\in IR \Leftrightarrow \alpha^3 = -1$

$$\Leftrightarrow \alpha = -1$$

Ainsi M_α est inversible si et seulement si $\alpha \in IR - \ -1\ .$

2)a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = M_2\ (\alpha = 2)$; d'où la matrice A est inversible.

b) $A\times B=\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&1\\2&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&-2&4\\-2&4&1\\4&1&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9&0&0\\0&9&0\\0&0&9\end{pmatrix}=9I_3$

c) $A\times B=9\,I_3 \Leftrightarrow A\times\left(\frac{1}{9}B\right)=I_3$

$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{9}A\right)\times B=I_3.$

D'où $A^{-1}=\frac{1}{9}B$ et $B^{-1}=\frac{1}{9}A.$

3)a) $(S):\begin{cases}x-2y+4z=3\\-2x+4y+z=3\\4x+y-2z=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1&-2&4\\-2&4&1\\4&1&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}\Leftrightarrow B\times\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$

b) $(S)\Leftrightarrow B\times\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \frac{1}{9}A\times B\times\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{9}A\times\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow I_3\times\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\times\begin{pmatrix}1&0&2\\0&2&1\\2&1&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}3\\3\\6\end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\frac{1}{9}\times\begin{pmatrix}15\\12\\9\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{15}{9}=\frac{5}{3}\\y=\frac{12}{9}=\frac{4}{3}\\z=1\end{cases}$

Exercice 3

A) $f(x)=e^x-1\,;\ x\in IR.$

1) $f(x)=e^x-1\,;\ x\in IR.\ f'(x)=e^x\ ;\ x\in IR.$

Δ la tangente à (C) au point O.

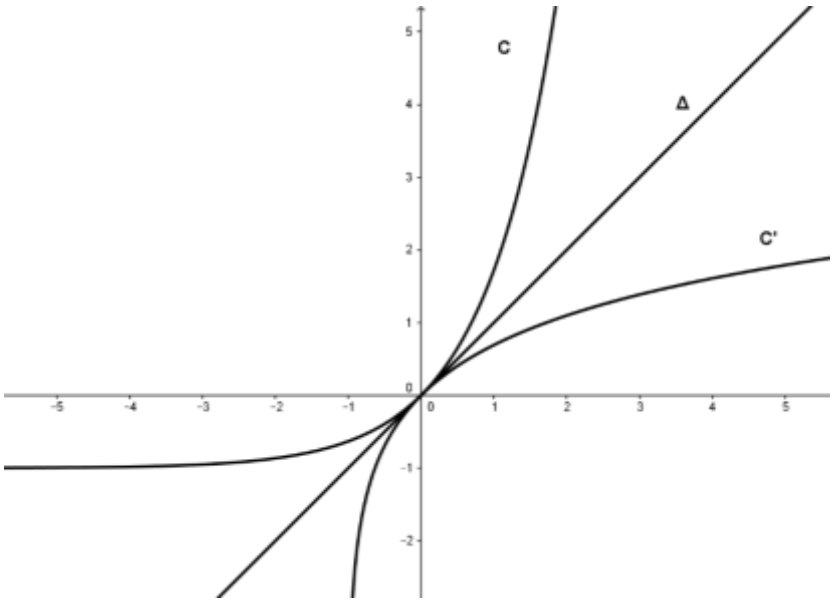
2) $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^x-1=-1,$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0.$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x-1=+\infty.$

$f'(x)=e^x>0$; pour tout $x\in IR$, d'où f est strictement croissante sur IR.

f est continue et strictement croissante sur IR, d'où f réalise une bijection de IR sur $f(IR)=]-1,+\infty[$. $I=]-1,+\infty[$.

3) La courbe C' de f^{-1}.



4) Soit Soit $x \in IR$ et $y \in]-1, +\infty[$.

$$y = f(x) \Leftrightarrow y = e^x - 1$$
$$\Leftrightarrow e^x = y + 1$$
$$\Leftrightarrow x = \ln(y+1).$$

D'où $f^{-1}(x) = \ln(x+1)$, $x \in]-1, +\infty[$.

B) $g(x) = e^x - 1 + \dfrac{1}{e^x + 1}$; $x \in IR$.

1)a) $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} e^x - 1 + \dfrac{1}{e^x + 1} = 0$, car $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

D'où l'axe des abscisses est une asymptote horizontale à la courbe (Γ) de g au voisinage de $(-\infty)$.

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} e^x - 1 + \dfrac{1}{e^x + 1} = +\infty$.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{g(x)}{x} = \lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x} - \frac{1}{x} + \frac{1}{x(e^x + 1)} = +\infty.$$

D'où la courbe (Γ) admet une branche parabolique de direction l'axe des ordonnées au voisinage de $(+\infty)$.

2)a) $f(x) - g(x) = -\dfrac{1}{e^x + 1} < 0$; pour tout $x \in IR$.

D'où la courbe (Γ) est au-dessus de la courbe (C).

b) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} -\dfrac{1}{e^x + 1} = 0$.

3)a) $g(x) = e^x - 1 + \dfrac{1}{e^x + 1}$; $x \in IR$.

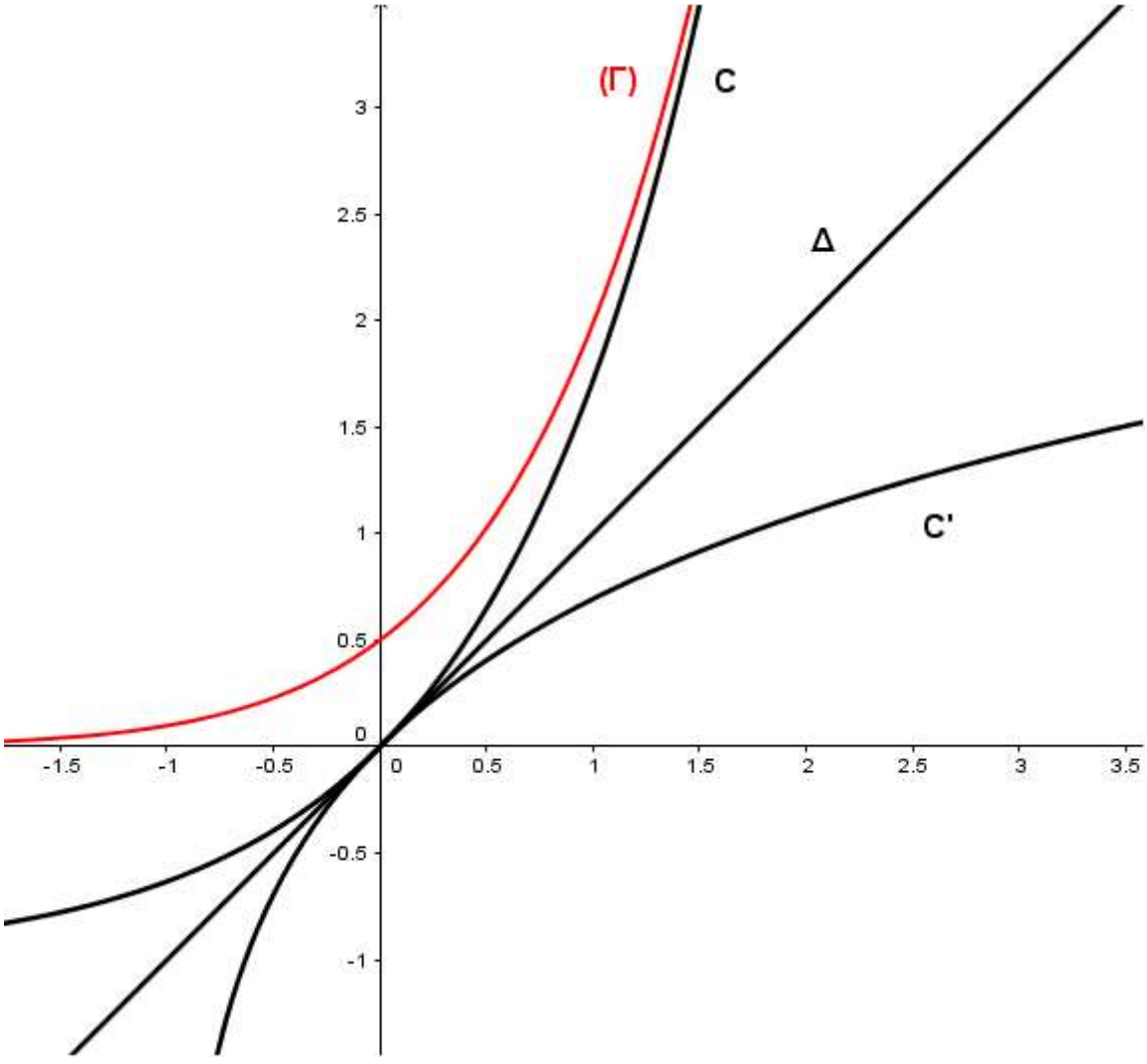
$$g'(x)=\left(e^x-1+\frac{1}{e^x+1}\right)'=e^x-\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$
$$=\frac{e^x(e^{2x}+2e^x+1)-e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x(e^{2x}+2e^x)}{(e^x+1)^2}=\frac{e^{2x}(e^x+2)}{(e^x+1)^2}$$

D'où $g'(x)=\frac{e^{2x}(e^x+2)}{(e^x+1)^2}$; pour tout $x\in IR$.

b) On a $g'(x)=\frac{e^{2x}(e^x+2)}{(e^x+1)^2}>0$; pour tout $x\in IR$.

x	$-\infty$		$+\infty$
g'(x)		+	
g	0	↗	$+\infty$

c) $g(0)=\frac{1}{2}$.



4)a) $e^x-\frac{e^x}{e^x+1}=e^x-\frac{e^x+1-1}{e^x+1}=e^x-1+\frac{1}{e^x+1}=g(x)$

D'où $g(x)=e^x-\frac{e^x}{e^x+1}$; pour tout $x\in IR$.

b) Soit A l'aire de la partie du plan limitée par la courbe (Γ), l'axe des abscisses et les droites d'équations $x=0$ et $x=1$.

$$A=\int_0^1 g(x)\,dx=\int_0^1\left(e^x-\frac{e^x}{e^x+1}\right)dx=\left[e^x-\ln(e^x+1)\right]_0^1$$

$$=e-\ln(e+1)-1-\ln 2=e-1+\ln\left(\frac{2}{e+1}\right)\ \text{u.a.}$$

Exercice 4

1) $(E):11x-7y=4.$

a) $(E):11\times1-7\times1=4,$ d'où le couple $(1,1)$ est une solution de (E).

b) $(E):11x-7y=4=11\times1-7\times1\Leftrightarrow11(x-1)-7(y-1)=0$

$$\Leftrightarrow11(x-1)=7(y-1)$$

$$\left.\begin{array}{l}11/7(y-1)\\11\wedge7=1\end{array}\right\}\Rightarrow11/y-1$$

$$\Rightarrow y-1=11k\ ;\ k\in\mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow y=11k+1\ ;\ k\in\mathbb{Z}$$

$$11x-7y=4\Rightarrow11x-7(11k+1)=4$$

$$\Rightarrow11x=7(11k+1)+4$$

$$\Rightarrow11x=7\times11k+11$$

$$\Rightarrow x=7k+1\ ;\ k\in\mathbb{Z}$$

D'où $S=\{7k+1,11k+1\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$

2)a) $90=8\times11+2\equiv2\ [11]$; $90=12\times7+6\equiv6\ [7]$ d'où $90\in G$.

b) Soit $n\in G$ et (p,q) le couple d'entiers relatifs vérifiant $\begin{cases}n=11p+2\\n=7q+6\end{cases}$.

$$n=11p+2=7q+6\Rightarrow11p+2=7q+6$$

$$\Rightarrow11p-7q=4$$

$$\Rightarrow(p,q)\text{ est une solution de (E).}$$

c) D'après b) on a montré que si n est un élément de G, alors $\begin{cases}n=11p+2\\n=7q+6\end{cases}$ et (p,q) est une solution de (E).

On obtient donc $\begin{cases}n=11p+2\\n=7q+6\end{cases}$ et $(p,q)=\{7k+1,11k+1\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$.

$n=11p+2=11(7k+1)+2=77k+13.$

$n=77k+13\ \Rightarrow n\equiv13\ [77]$.

Ainsi si n est un élément de G, alors $n\equiv13\ [77]$.

3) Soit n un entier relatif tel que $n\equiv13\ [77]$.

$n \equiv 13 \ [77] \Rightarrow n = 77k + 13 \ ; k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow n = 11(7k + 1) + 2 \ ; k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow n \equiv 2 \ [11]$

$n \equiv 13 \ [77] \Rightarrow n = 77k + 13 \ ; k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow n = 7(11k + 1) + 6 \ ; k \in \mathbb{Z}$

$\Rightarrow n \equiv 6 \ [7]$

$n \equiv 2 \ [11]$ et $n \equiv 6 \ [7]$, d'où $n \in G$.

4) D'après ce qui précède un entier relatif n est un élément de G si et seulement si $n \equiv 13 \ [77]$.

Le plus petit élément de G supérieur à 2000, est le plus petit entier supérieur à 2000 et dont le reste de la division euclidienne par 77 est 13. Il suffit de voir les multiples de 77 supérieurs à 2000.

On a : $77 \times 25 = 1925$ et $77 \times 26 = 2002$.

D'où $77 \times 26 + 13 = 2015$ est le plus petit élément de G supérieur à 2000.

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◈◈◈◈ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION **2015**	Epreuve : **MATHEMATIQUES**
	Durée : 3 H
	Coefficient : 3
Section : Sciences de l'informatique	**Session principale**

Exercice 1 (5 points)

1) Soit dans $\mathbb{C}$, l'équation (E) : $z^3+2(1-i)z^2-2(1+4i)z+4(-2+i)=0$.

a) Résoudre dans $\mathbb{C}$, l'équation $(z+1)^2=(2+i)^2$.

b) Montrer que pour tout $z\in\mathbb{C}$,

$$z^3+2(1-i)z^2-2(1+4i)z+4(-2+i)=(z-2i)\left[(z+1)^2-(2+i)^2\right]$$

c) Résoudre alors l'équation (E).

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$.

On considère les points A, B et C d'affixes respectives $2i$, $1+i$ et $-3-i$.

a) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre [BC]. Déterminer son centre I et son rayon r.

b) Montrer que $A\in\mathscr{C}$.

c) Donner la nature du triangle ABC. Justifier votre réponse.

d) Placer les points A, B et C et construire le cercle $\mathscr{C}$.

Exercice 2 (5 points)

1) Soit (u_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0=2$ et pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=\frac{1}{u_n}+\frac{u_n}{2}$.

a) Calculer u_1, u_2 et u_3.

b) Vérifier que pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-\sqrt{2}=\frac{(u_n-\sqrt{2})^2}{2u_n}$.

c) Montrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n\geq\sqrt{2}$.

d) Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1}-u_n=\frac{(\sqrt{2}-u_n)(\sqrt{2}+u_n)}{2u_n}$.

En déduire que la suite (u_n) est décroissante.

e) Montrer que la suite (u_n) est convergente vers une limite réelle ℓ.

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par : $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{x}{2}$.

Montrer que $f(\ell)=\ell$ et déterminer ℓ.

3) Vérifier, à l'aide d'une calculatrice, que u_3 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-5} près.

Exercice 3 (6 points)

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = x + (1-2x)\ln x$ et $(\mathscr{C})$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$. (unité graphique 2 cm)

1) a) Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.

b) En écrivant $f(x) = x\left(1 + \dfrac{1-2x}{x}\ln x\right)$ pour $x > 0$, calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$.

c) Interpréter graphiquement les résultats obtenus.

2) a) Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, $f'(x) = \dfrac{1-x}{x} - 2\ln x$.

b) Calculer $f'(1)$.

c) Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, $\dfrac{1-x}{x} > 0$ et $-2\ln x > 0$ et en déduire le signe de f' sur $]0,1[$.

d) Montrer que pour tout $x \in]1,+\infty[$, $\dfrac{1-x}{x} < 0$ et $-2\ln x < 0$ et en déduire le signe de f' sur $]1,+\infty[$.

e) Dresser le tableau de variation de f.

3) a) Etudier la position relative de $(\mathscr{C})$ par rapport à la droite $\Delta : y = x$.

b) Calculer $f(2)$. Tracer Δ et $(\mathscr{C})$.

4) Soit $\mathscr{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations respectives $x = \dfrac{1}{2}$ et $x = 1$, la courbe $(\mathscr{C})$ et la droite Δ.

a) Montrer que la fonction F définie sur $]0,+\infty[$ par $F(x) = (x^2-x)(1-\ln x)$ est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

b) Calculer $\mathscr{A}$.

Exercice 4 (4 points)

1) Soit dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'équation (E) : $5x + 3y = 60$.

a) Vérifier que $(2,-3)$ est une solution dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ de l'équation (E') : $5x + 3y = 1$.

En déduire une solution particulière de l'équation (E).

b) Montrer que l'ensemble des solutions de (E) est $S = \{(-3k+120, 5k-180) ; k \in \mathbb{Z}\}$.

c) En déduire tous les couples d'entiers naturels non nuls solutions de (E).

2) Le directeur d'un lycée veut acheter x ordinateurs et y imprimantes pour un montant total de 6000 dinars. On sait que le prix d'un ordinateur est de 500 dinars et celui d'une imprimante est de 300 dinars et qu'il désire acheter plus d'ordinateurs que d'imprimantes.

a) Vérifier que $5x + 3y = 60$.

b) Déterminer alors le nombre d'ordinateurs et le nombre d'imprimantes qu'il peut acheter.

Examen du baccalauréat **Session principale**

Session de Juin 2015

Section : Sciences de l'informatique

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

1) a) $(z+1)^2=(2+i)^2 \Leftrightarrow (z+1)^2-(2+i)^2=0$

$\Leftrightarrow \big((z+1)+(2+i)\big)\big((z+1)-(2+i)\big)=0$

$\Leftrightarrow \big(z+3+i\big)\big(z-1-i\big)=0$

$\Leftrightarrow z+3+i=0$ ou $z-1-i=0$

$\Leftrightarrow z=-3-i$ ou $z=1+i$

$S_{\mathbb{C}}=\{-3-i,\ 1+i\}$.

b) Soit $z\in\mathbb{C}$.

$$\begin{aligned}(z-2i)\left[(z+1)^2-(2+i)^2\right] &= (z-2i)\left[(z+1)^2-(2+i)^2\right]\\ &= (z-2i)\left[z^2+2z+1-(4+4i-1)\right]\\ &= (z-2i)\left[z^2+2z-(2+4i)\right]\\ &= z^3+2z^2-(2+4i)z-2iz^2-4iz+2i(2+4i)\\ &= z^3+2(1-i)z^2-2(1+4i)z+4(-2+i).\end{aligned}$$

c) $(E): z^3+2(1-i)z^2-2(1+4i)z+4(-2+i)=0$

$$\begin{aligned}z^3+2(1-i)z^2-2(1+4i)z+4(-2+i)=0 &\Leftrightarrow (z-2i)\left[(z+1)^2-(2+i)^2\right]=0\\ &\Leftrightarrow (z-2i)=0 \text{ ou } (z+1)^2-(2+i)^2=0\\ &\Leftrightarrow z=2i \text{ ou } z=-3-i \text{ ou } z=1+i.\end{aligned}$$

D'où $S_{\mathbb{C}}=\{2i,\ -3-i,\ 1+i\}$.

2) Le plan est rapporté à un repère orthonormé $(O,\vec{u},\vec{v})$. A, B et C les points d'affixes respectives $z_A=2i$, $z_B=1+i$ et $z_C=-3-i$.

a) Soit $\mathscr{C}$ le cercle de diamètre $[BC]$. Le centre I du cercle $\mathscr{C}$ est le milieu du segment $[BC]$.

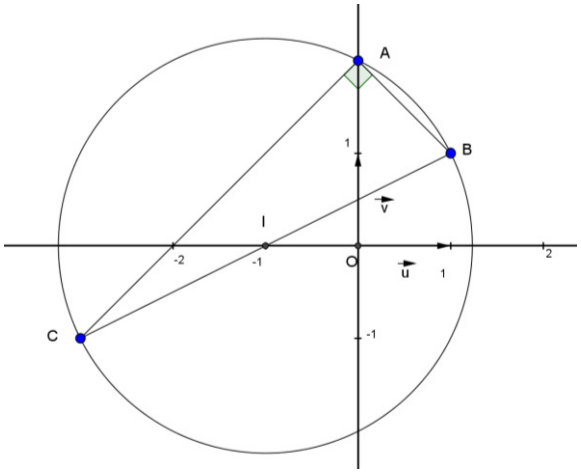
$z_I=\dfrac{z_B+z_C}{2}=\dfrac{1+i+(-3-i)}{2}=-1$; $IB=|z_B-z_I|=|1+i-(-1)|=|2+i|=\sqrt{2^2+1^2}=\sqrt{5}$.

D'où C est le cercle de centre I et de rayon $\sqrt{5}$.

b) $IA=|z_A-z_I|=|2i-(-1)|=|1+2i|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$. D'où $A\in C$.

c) Le point A appartient au cercle $\mathscr{C}$ de diamètre $[BC]$, d'où BAC est un angle droit, donc ABC est un triangle rectangle en A.

d)



Exercice 2

La suite (u_n) est définie sur $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{u_n} + \dfrac{u_n}{2} \ ; \ n \in \mathbb{N} \end{cases}$

1)a) $u_1 = \dfrac{1}{u_0} + \dfrac{u_0}{2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2} = \dfrac{3}{2}$; $u_2 = \dfrac{1}{u_1} + \dfrac{u_1}{2} = \dfrac{2}{3} + \dfrac{3}{4} = \dfrac{17}{12}$; $u_3 = \dfrac{1}{u_2} + \dfrac{u_2}{2} = \dfrac{12}{17} + \dfrac{17}{24} = \dfrac{577}{408}$.

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{1}{u_n} + \dfrac{u_n}{2} - \sqrt{2} = \dfrac{2 + u_n^2 - 2\sqrt{2}\,u_n}{2u_n} = \dfrac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n}$.

c) Montrons par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n \geq \sqrt{2}$.

- $u_0 = 2 \geq \sqrt{2}$, l'inégalité est vérifiée pour $n = 0$.
- Soit n un entier naturel. Supposons que l'inégalité est vraie pour n, c'est-à-dire que $u_n \geq \sqrt{2}$.
- Montrons que l'inégalité est vraie pour $n+1$. On a $u_n \geq \sqrt{2}$.

  $u_{n+1} - \sqrt{2} = \dfrac{(u_n - \sqrt{2})^2}{2u_n} \geq 0$, car $u_n > 0$. D'où $u_{n+1} \geq \sqrt{2}$.

  D'où l'inégalité est vraie pour $n+1$.

Ainsi d'après le principe de raisonnement par récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \sqrt{2}$.

d) Soit $n \in \mathbb{N}$. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{u_n} + \dfrac{u_n}{2} - u_n = \dfrac{2 + u_n^2 - 2u_n^2}{2u_n} = \dfrac{2 - u_n^2}{2u_n} = \dfrac{(\sqrt{2} - u_n)(\sqrt{2} + u_n)}{2u_n}$.

On a $u_n \geq \sqrt{2}$, d'où $\sqrt{2} - u_n \leq 0$ et $\sqrt{2} + u_n > 0$, par conséquent $u_{n+1} - u_n \leq 0$. Ainsi $u_{n+1} \leq u_n$.

D'où la suite (u_n) est décroissante.

e) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq \sqrt{2}$. D'où la suite (u_n) est minorée par $\sqrt{2}$.

La suite (u_n) est décroissante et minorée, donc elle converge. Soit l sa limite. On a $l > 0$.

2) Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\frac{1}{x}+\frac{x}{2}$.

On a pour tout $n\in\mathbb{N}$, $u_{n+1}=f(u_n)$ et la suite (u_n) converge vers l.

La fonction f est continue sur $]0,+\infty[$, en particulier f est continue en l.

Par suite $f(l)=l$.

$$f(l)=l \Leftrightarrow \frac{1}{l}+\frac{l}{2}=l$$
$$\Leftrightarrow \frac{2+l^2}{2l}-l=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2+l^2-2l^2}{2l}=0$$
$$\Leftrightarrow \frac{2-l^2}{2l}=0$$
$$\Leftrightarrow 2-l^2=0$$
$$\Leftrightarrow l=\sqrt{2}\ ,\ \text{car } l>0.$$

Ainsi la suite converge vers $\sqrt{2}$.

3) A l'aide de la calculatrice $u_3\simeq 1,4142156$ et $\sqrt{2}\simeq 1,4142135$. D'où $0<u_3-\sqrt{2}<10^{-5}$.

Ainsi u_3 est une valeur approchée de $\sqrt{2}$ à 10^{-5} près.

Exercice 3

Soit f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=x+(1-2x)\ln x$. ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ (unité graphique 2 cm).

1)a) $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^+} x+(1-2x)\ln x=\lim\limits_{x\to 0^+} x+\ln x-2(x\ln x)=-\infty$, car $\lim\limits_{x\to 0^+}\ln x=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} x\ln x=0$.

b) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty} x+(1-2x)\ln x$

$$=\lim_{x\to+\infty} x\left(1+\frac{1-2x}{x}\ln x\right)=\lim_{x\to+\infty} x\left(1+\left(\frac{1}{x}-2\right)\ln x\right)$$
$$=-\infty,\ \text{car } \lim_{x\to+\infty}\left(1+\left(\frac{1}{x}-2\right)\ln x\right)=-\infty.$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1-2x}{x}\ln x\right)=-\infty.$$

c) On a $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=-\infty$, d'où la courbe ($\mathscr{C}$) admet une asymptote verticale la droite d'équation $x=0$.

D'autre part $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=-\infty$, d'où la courbe ($\mathscr{C}$) de f admet une branche parabolique de direction l'axe $(O,\vec{i})$.

2)a) $f(x)=x+(1-2x)\ln x,\ x\in]0,+\infty[$.

$$f'(x)=1-2\ln x+(1-2x)\frac{1}{x}=\frac{1}{x}-1-2\ln x=\frac{1-x}{x}-2\ln x,\ x\in]0,+\infty[$$

b) $f'(x)=\frac{1-x}{x}-2\ln x,\ x\in]0,+\infty[$; $f'(1)=\frac{1-1}{1}-2\ln 1=0.$

c) Soit $x\in]0,1[$.

On a $x>0, 1-x>0$ et $\ln x<0$, d'où $\frac{1-x}{x}>0$ et $-2\ln x>0$ et par conséquent $\frac{1-x}{x}-2\ln x>0.$

Par suite $f'(x)>0,$ pour tout $x\in]0,1[$.

d) Soit $x\in]1,+\infty[$.

On a $x>1, 1-x<0$ et $\ln x>0$, d'où $\frac{1-x}{x}<0$ et $-2\ln x<0$ et par conséquent $\frac{1-x}{x}-2\ln x<0.$

Par suite $f'(x)<0,$ pour tout $x\in]1,+\infty[$.

e) Le tableau de variation de la fonction f.

x	0		1		$+\infty$
f'(x)	‖	+	0	−	
f	‖ $-\infty$	↗	1	↘	$-\infty$

3)a) Pour étudier la position de la courbe par rapport à la droite $\Delta: y=x$.

$f(x)-x=(1-2x)\ln x,\ x\in]0,+\infty[$.

$f(x)-x=0 \Leftrightarrow (1-2x)\ln x=0$

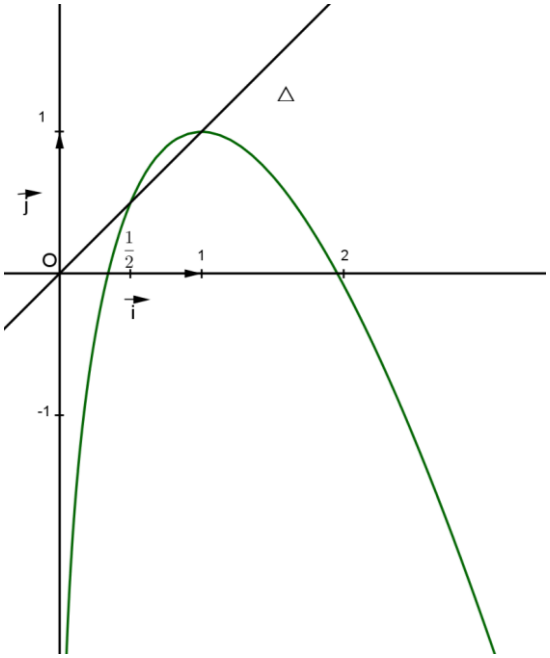
$\Leftrightarrow 1-2x=0$ ou $\ln x=0$

$\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$ ou $x=1.$

x	0		$\frac{1}{2}$		1		$+\infty$
f'(x)	‖	−	0	+	0	−	
Position de ($\mathscr{C}$) par rapport à Δ	‖ ($\mathscr{C}$) est au-dessous de Δ			($\mathscr{C}$) est au-dessus de Δ		($\mathscr{C}$) est au dessous de Δ	

b) $f(2)=2-3\ln 2.$

La courbe ($\mathscr{C}$) :



4) $\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par les droites d'équations respectives $x=\frac{1}{2}$ et $x=1$, la courbe ($\mathscr{C}$) et la droite Δ.

a) $F(x)=(x^2-x)(1-\ln x)$, $x\in]0,+\infty[$. F est dérivable sur $]0,+\infty[$.

$$F'(x)=(x^2-x)'(1-\ln x)+(x^2-x)(1-\ln x)' \quad ; \ x\in]0,+\infty[$$
$$=(2x-1)(1-\ln x)-(x^2-x)\frac{1}{x}$$
$$=(2x-1)+(1-2x)\ln x \ -x+1$$
$$=x+(1-2x)\ln x \ =f(x).$$

$F'(x)=f(x)$, pour tout $x\in]0,+\infty[$, d'où F est une primitive de f sur $]0,+\infty[$.

$$\mathcal{A}=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(f(x)-x\right)dx=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\left(f(x)-x\right)dx=\left[F(x)-\frac{1}{2}x^2\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=F(1)-\frac{1}{2}-\left(F(\frac{1}{2})-\frac{1}{8}\right)$$

$$=-\frac{1}{2}-\left((\frac{1}{4}-\frac{1}{2})(1+\ln 2)-\frac{1}{8}\right)=\frac{\ln 2}{4}-\frac{1}{8} \text{ unité d'aire} = \ln 2-\frac{1}{2} \text{ cm}^2.$$

Exercice 4

1) Soit dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$, l'équation $(E):5x+3y=60$.

a) $5\times 2+3\times(-3)=10-9=1$. D'où $(2,-3)$ est une solution de l'équation $(E'):5x+3y=1$.

Par conséquent $(120,-180)$ est une solution particulière de l'équation (E).

b) $(120,-180)$ est une solution particulière de l'équation (E), d'où l'ensemble des solutions de l'équation (E) est : $S=\{(-3k+120,\ 5k-180)\ ;\ k\in\mathbb{Z}\}$.

c) Les couples d'entiers naturels non nuls solutions de l'équation (E) :

$$x \in \mathbb{N}^* \text{ et } y \in \mathbb{N}^* \Rightarrow \begin{cases} -3k+120>0 \\ 5k-180>0 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} k<40 \\ k>36 \\ k \in \mathbb{Z} \end{cases} \Rightarrow k=37 \text{ ou } k=38 \text{ ou } k=39.$$

D'où $(x,y) \in \{(9,5);(6,10);(3,5)\}$.

2) x est le nombre d'ordinateurs et y est le nombre d'imprimantes. Le prix d'un ordinateur est de 500 dinars et le prix d'une imprimante est de 300 dinars. On a $x > y$.

Le montant total consacré aux achats est de 6000 dinars.

a) On a : $500x + 300y = 6000$ et $x > y$.

$500x + 300y = 6000 \Leftrightarrow 5x + 3y = 60.$

b) Le couple (x,y) d'entiers naturels non nuls cherché est une solution de l'équation (E) et tel que $x > y$. D'où $(x,y) = (9, 5)$.

Ainsi le directeur peut acheter 9 ordinateurs et 5 imprimantes.

REPUBLIQUE TUNISIENNE MINISTERE DE L'EDUCATION ◈◈◈◈ **EXAMEN DU BACCALAUREAT** SESSION **2015**	Épreuve : **MATHEMATIQUES**	
	Durée : 3 H	Coefficient : 3
Section : **Sciences de l'informatique**	**Session de contrôle**	

Exercice 1 (4 points)

Répondre par vrai ou faux, en justifiant la réponse :

1) L'inverse de la matrice $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 1 & -1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ est $B=\begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ -1 & 1 & 1\end{pmatrix}$.

2) La matrice $M=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -4 & 1\end{pmatrix}$ est inversible.

3) La limite de la suite u définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n}$ est égale à 1.

4) La suite v définie sur $\mathbb{N}^*$ par $v_n=f(\dfrac{1}{n})$, avec $f: x \mapsto f(x)=\dfrac{\ln(1+x)}{x}$,est convergente.

Exercice 2 (6 points)

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{2x}-2e^{x}$ et soit ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

a) Déterminer $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{x}$. Interpréter géométriquement les résultats obtenus. (On remarquera que pour tout réel x, $f(x)=e^{x}(e^{x}-2)$)

b) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=2e^{x}(e^{x}-1)$.

c) Etudier les variations de f.

2) a) Déterminer le point d'intersection de ($\mathscr{C}$) avec l'axe des abscisses.

b) Construire la courbe ($\mathscr{C}$).

3) a) Soit a un réel strictement négatif. Calculer l'aire $\mathscr{A}$ de la partie du plan limitée par la courbe ($\mathscr{C}$), les axes du repère et la droite d'équation x = a.

b) Calculer $\lim\limits_{a\to-\infty} \mathscr{A}$.

4) Soit g la restriction de f à $[0,+\infty[$.

a) Montrer que g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur un intervalle J que l'on précisera.

b) Construire dans le même repère la courbe ($\mathscr{C}$ ') de la fonction g^{-1} réciproque de g.

c) Vérifier que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f(x)=(e^{x}-1)^2-1$.

Exprimer, pour $x\in J$, $g^{-1}(x)$ en fonction de x.

Exercice 3 (5 points)

Soit n un entier naturel, on considère les entiers p= n+5 et q=2n+3 et on note d = PGCD (p,q).

1) a) Calculer 2p – q. En déduire les valeurs possibles de d.

   b) Montrer que si p est un multiple de 7 alors q est un multiple de 7.

   c) Montrer que p est un multiple de 7 si et seulement si $n \equiv 2[7]$.

2) Montrer que d = 7 si et seulement si $n \equiv 2[7]$.

3) Application : Déterminer d dans chacun des cas suivants,

   a) $n = 6^{2014} + 7^{2015}$.

   b) $n = 6^{2014} + 8^{2015}$.

Exercice 4 (5 points)

Le tableau suivant donne (en Millions) l'évolution de la population de l'Afrique depuis 1950.

Année	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
Population y_i	229	285	366	478	630	808	1031

(Source: ONU 2012)

1) Représenter, dans un repère orthogonal, le nuage des points $M_i(x_i,y_i)$.

   (On prendra pour unités graphiques: 1cm pour chaque rang sur l'axe des abscisses et 1cm pour 100 millions d'habitants sur l'axe des ordonnées).

2) On envisage un ajustement exponentiel de la série (X,Y), pour cela on pose $Z = \ln(Y)$.

   Le tableau suivant donne les valeurs de z arrondies au centième.

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	229	285	366	478	630	808	1031
$z_i = \ln y_i$	5,43	5,65	5,90	6,17	6,45	6,69	6,94

   a) Donner l'arrondi à 10^{-4} près du coefficient de corrélation linéaire de la série (X,Z).

   En déduire qu'un ajustement affine de la série (X,Z) est justifié.

   b) Déterminer une équation de la droite de régression de z en x.

   (Les coefficients seront arrondis au centième).

3) a) Etablir la relation $y = 172{,}43\, e^{0{,}26\,x}$.

   b) On suppose que la situation se poursuit selon le même modèle.

Estimer, à l'aide de cet ajustement, la population de l'Afrique (en millions) en 2030.

Examen du baccalauréat **Session de contrôle**

Session de Juin 2015

Section : Sciences de l'informatique

Épreuve : Mathématiques

Exercice 1

1)	2)	3)	4)
Faux	vrai	vrai	vrai

1) On peut remarquer que la deuxième ligne de la matrice B est nulle, donc B est non inversible. Par conséquent B ne peut pas être l'inverse de A.

2) $M=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 1\\ 2 & -4 & 1\\ 3 & -4 & 1\end{pmatrix}$; $\det M=(-1)\times\begin{vmatrix}-4 & 1\\ -4 & 1\end{vmatrix}-2\times\begin{vmatrix}2 & 1\\ -4 & 1\end{vmatrix}+3\times\begin{vmatrix}2 & 1\\ -4 & 1\end{vmatrix}=6.$

$\det M\neq 0,$ d'où la matrice M est inversible.

3) $u_n=\dfrac{n+(-1)^n}{n}=1+\dfrac{(-1)^n}{n}.$

$\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\dfrac{(-1)^n}{n}\right|=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0,$ d'où $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}=0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=1.$

4) $v_n=f(\dfrac{1}{n})=\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}$; $\lim\limits_{n\to+\infty}v_n=\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{\ln(1+\frac{1}{n})}{\frac{1}{n}}=1,$ car $\lim\limits_{t\to0^+}\dfrac{\ln(1+t)}{t}=1.$ D'où v est convergente.

Exercice 2

1) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=e^{2x}-2e^x.$ ($\mathscr{C}$) sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$ du plan.

$\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}e^{2x}-2e^x=0,$ car $\lim\limits_{x\to-\infty}e^x=0.$

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}e^{2x}-2e^x=\lim\limits_{x\to+\infty}e^x\left(e^x-2\right)=+\infty,$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}e^x=+\infty.$

$\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^{2x}-2e^x}{x}=\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}\left(e^x-2\right)=+\infty,$ car $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{e^x}{x}=+\infty.$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}=+\infty,$ d'où la courbe ($\mathscr{C}$) admet une branche parabolique de direction l'axe $(O,\vec{j})$.

b) la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

$f(x)=e^{2x}-2e^x$; $x\in\mathbb{R}.$

$f'(x)=2e^{2x}-2e^x=2e^x(e^x-1)$; $x\in\mathbb{R}.$

c) $f'(x)=0 \Leftrightarrow 2e^x(e^x-1)=0$

$\Leftrightarrow e^x-1=0$; car $e^x>0$

$\Leftrightarrow e^x=1 \Leftrightarrow x=0.$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
f'(x)		$-$	0	$+$	
f	0	↘	-1	↗	$+\infty$

2)a) $f(x)=0 \Leftrightarrow e^{2x}-2e^x=0$

$\Leftrightarrow e^x(e^x-2)=0$

$\Leftrightarrow e^x-2=0$

$\Leftrightarrow e^x=2 \Leftrightarrow x=\ln 2.$

Ainsi l'intersection de la courbe ($\mathscr{C}$) et l'axe $(O,\vec{i})$ est le point de coordonnées $(\ln 2,\ 0)$.

b) Voir figure.

3)a) Soit a un réel strictement négatif.

$\mathcal{A}$ l'aire de la partie du plan limitée par la courbe($\mathscr{C}$), les axes du repère et la droite d'équation $x=a.$

$$\mathcal{A}=\int_a^0 -f(x)\,dx=-\int_a^0 (e^{2x}-2e^x)\,dx=-\left[\frac{1}{2}e^{2x}-2e^x\right]_a^0=\frac{3}{2}+\frac{1}{2}e^{2a}-2e^a \text{ unité d'aire.}$$

b) $\lim\limits_{a\to-\infty}\mathcal{A}=\lim\limits_{a\to-\infty}\frac{3}{2}+\frac{1}{2}e^{2a}-2e^a=\frac{3}{2}.$

4) Soit g la restriction de f à $[0,+\infty[$.

a) On a g est continue et strictement croissante sur $[0,+\infty[$, d'où g réalise une bijection de $[0,+\infty[$ sur g($[0,+\infty[$)=$[-1,+\infty[$.

b) Voir figure.

c) Soit $x\in\mathbb{R}$, $(e^x-1)^2-1=e^{2x}-2e^x+1-1=e^{2x}-2e^x=f(x)$. D'où $f(x)=(e^x-1)^2-1$, pour tout $x\in\mathbb{R}$.

Soient $x\in[0,+\infty[$ et $y\in[-1,+\infty[$.

$y=f(x) \Leftrightarrow y=(e^x-1)^2-1$

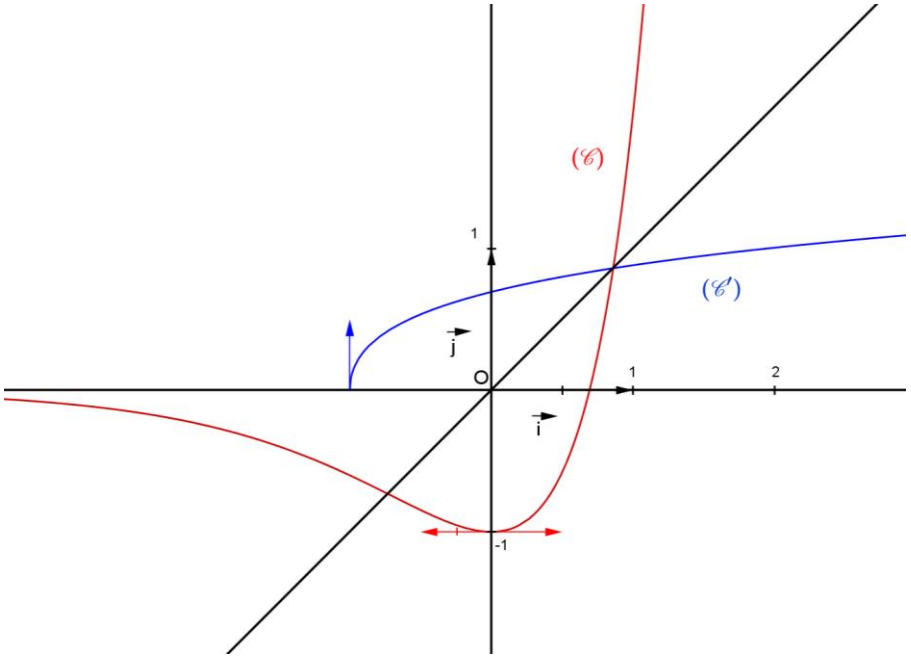
$\Leftrightarrow y+1=(e^x-1)^2$

$\Leftrightarrow \sqrt{y+1}=e^x-1$; on a $y+1\geq 0$ et $x\geq 0$

$\Leftrightarrow e^x=1+\sqrt{y+1}$

$\Leftrightarrow x=\ln\left(1+\sqrt{y+1}\right).$

Ainsi $g^{-1}(x)=\ln\left(1+\sqrt{x+1}\right)$; pour tout $x\in[-1,+\infty[$.



Exercice 3

Soit n un entier naturel, on considère les entiers $p = n+5$ et $q = 2n+3$ et on note $d = PGCD(p,q)$.

1)a) $2p-q = 2(n+5)-(2n+3) = 7.$

On a d divise p et q, donc d divise $2p-q$, par conséquent d divise 7. Ainsi $d = 1$ ou $d = 7.$

b) Supposons que p est un multiple de 7. Il existe alors un entier k tel que $p = 7k.$

$$\begin{aligned} 2p-q = 7 &\Leftrightarrow 2\times 7k - q = 7 \\ &\Leftrightarrow q = 2\times 7k - 7 \\ &\Leftrightarrow q = 7\times(2k-1) \end{aligned}$$

D'où q est un multiple de 7.

c) Montrons que p est un multiple de 7 si et seulement si $n \equiv 2[7].$

« $\Rightarrow$ »

Supposons que p est un multiple de 7. On a $p = 7k$; avec $k \in \mathbb{Z}.$

$$\begin{aligned} p = n+5 &\Rightarrow n = p-5 \\ &\Rightarrow n = 7k-5 \\ &\Rightarrow n \equiv -5[7] \\ &\Rightarrow n \equiv 2[7]. \end{aligned}$$

D'où si p est un multiple de 7 alors $n \equiv 2[7].$

« $\Leftarrow$ »

Supposons que $n \equiv 2[7].$

$n \equiv 2[7] \Rightarrow$ il existe un entier m tel que $n = 7m+2.$

D'autre part $p = n+5 = 7m+2+5 = 7(m+1).$ D'où p est un multiple de 7.

Ainsi p est un multiple de 7 si et seulement si $n \equiv 2[7]$.

2) Montrons que $d = 7$ si et seulement si $n \equiv 2[7]$.

« $\Rightarrow$ »

Supposons que $d = 7$.

$d = 7$, donc p est un multiple de 7 et d'après 1)c) on peut conclure que $n \equiv 2[7]$.

« $\Leftarrow$ »

Supposons que $n \equiv 2[7]$.

D'après 1)c), on peut conclure que p est un multiple de 7, et d'après 1)b) on déduit que q est aussi un multiple de 7. On a 7 divise p et q, donc 7 divise leur PGCD d. Or on sait que $d = 1$ ou $d = 7$, d'où $d = 7$.

3)a) $n = 6^{2014} + 7^{2015}$.

$$\text{On a } 6 \equiv (-1)[7] \Rightarrow 6^{2014} \equiv (-1)^{2014}[7]$$
$$\Rightarrow 6^{2014} \equiv 1[7]$$
$$7 \equiv 0[7] \Rightarrow 7^{2015} \equiv 0[7]$$
$$\text{D'où } n = 6^{2014} + 7^{2015} \equiv 1[7].$$

Par conséquent $d \neq 7, \text{donc } d = 1$.

b) $n = 6^{2014} + 8^{2015}$.

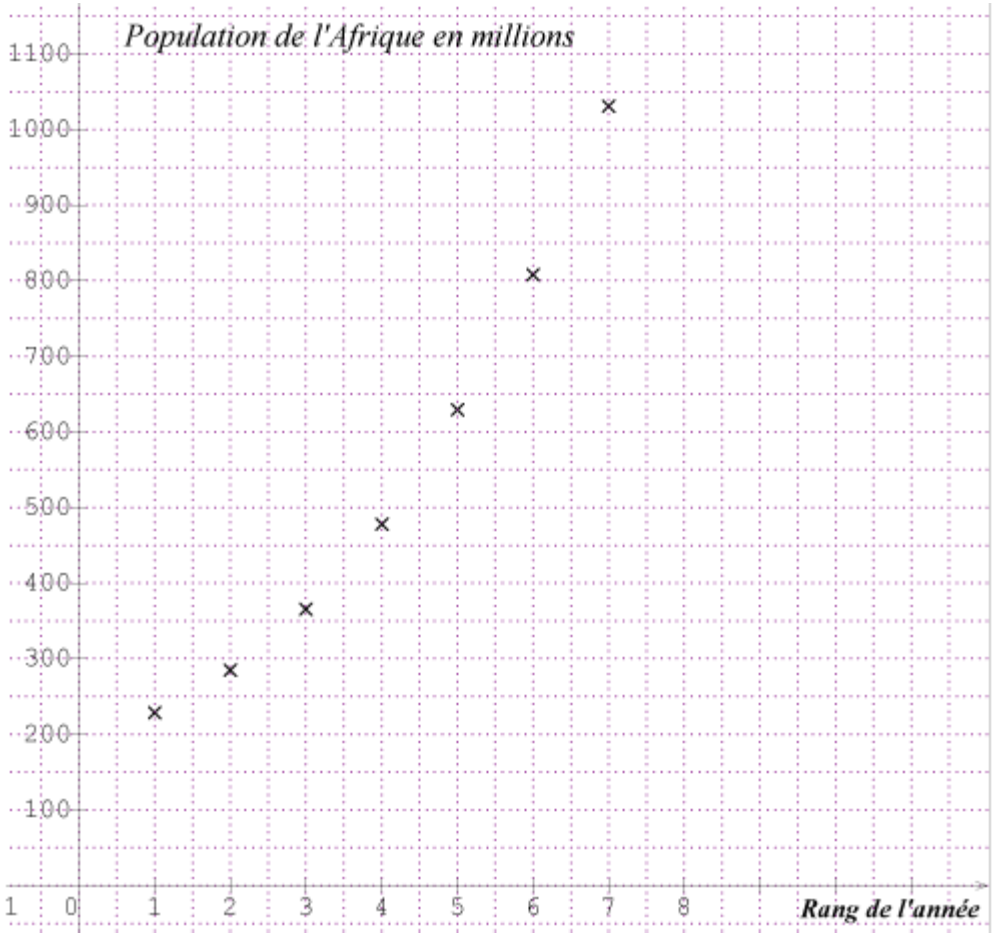
$$\text{On a } 6^{2014} \equiv 1[7]$$
$$8 \equiv 1[7] \Rightarrow 8^{2015} \equiv 1[7]$$
$$\text{D'où } n = 6^{2014} + 8^{2015} \equiv 2[7]. \text{Par conséquent } d = 7.$$

Exercice 4

Le tableau suivant donne, en millions, l'évolution de la population d'Afrique depuis 1950.

Année	1950	1960	1970	1980	1990	2000	2010
Rang de l'année x_i	1	2	3	4	5	6	7
Population y_i	229	285	366	478	630	808	1031

1) Le nuage des points (x_i, y_i).



2) On envisage un ajustement exponentiel de la série (X, Y), pour cela on note $Z = \ln(Y)$.

x_i	1	2	3	4	5	6	7
y_i	229	285	366	478	630	808	1031
$z_i=\ln y_i$	5,43	5,65	5,90	6,17	6,45	6,69	6,94

a) $r \simeq 0,9996.$

b) Une équation de la droite de régression de z en x est : $z = 0,26\ x + 5,15.$

3)a) $z = 0,26\ x + 5,15 \Leftrightarrow \ln y = 0,26\ x + 5,15$

$\Leftrightarrow y = e^{0,26\ x + 5,15}$

$\Leftrightarrow y = e^{5,15}e^{0,26\ x} = 172,43e^{0,26\ x}$.

b) On suppose que la situation se poursuit selon le même modèle.

2030 est de rang 9. Donc la population de l'Afrique en 2030 est estimée à :

$172,43e^{0,26\times 9} \simeq 1790$ millions.

Sujets Baccalauréat Tunisie

Matière: Mathématiques
Section: Economie
Session principale+Contrôle+Corrigé
2020-2015

Télécharger
Sujets Bac 209-2011 toutes sections

http://bit.ly/2Mrz8Ly

Télécharger ce document +autres titres
section economie

http://bit.ly/3dOTSYR