

Chapitre X

Limites des suites réelles

Suites convergentes :

■ Définitions: 1) Une suite U est convergente si elle admet une limite finie ℓ quand n tend vers $+\infty$.

2) (u_n) converge vers L signifie que
Si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un entier N tel que $n \geq N$ alors $|U_n - L| < \varepsilon$

■ Théorèmes de comparaison :

• Soient U et V deux suites, ℓ un réel.

Si à partir d'un certain rang, on a : $|U_n - \ell| < V_n$

et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = 0$ Alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell$.

• Soient U , V et W trois suites, et ℓ un réel ;

Si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell = \lim_{n \rightarrow +\infty} V_n$ et $U_n \leq W_n \leq V_n$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} W_n = \ell$

• Soient U , V deux suites tel que $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell$; $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = \ell'$

Si à partir d'un certain rang $U_n \leq V_n$ alors $\ell < \ell'$.

• U est une suite, si $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \ell$ et $U_n \geq 0$ (à partir d'un certain rang). alors $\ell \geq 0$.

3) Suites divergentes :

■ Définition : Une suite est divergente si et seulement si elle n'est pas convergente, c'est-à-dire $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n$ est l'infini où n'existe pas.

■ Théorèmes

• Soient U et V deux suites et à partir d'un certain rang

Si $V_n \leq U_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = +\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$.

• Soient U et V deux suites et à partir d'un certain rang

Si $V_n \leq U_n$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} V_n = -\infty$.

	Suite arithmétique de raison r	Suite géométrique de raison q
Limite	Si $r > 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = +\infty$ Si $r < 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = -\infty$ Si $r = 0$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = U_0$	• Si $-1 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = 0$ • Si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = \begin{cases} +\infty & \text{si } U_0 > 0 \\ -\infty & \text{si } U_0 < 0 \end{cases}$ • Si $q \leq -1$ alors U_n n'admet pas de limite. • Si $q = 1$ alors U_n est constante donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} U_n = U_0$.

Réflexes :

Situations	Réflexes
Comment étudier la limite d'une suite géométrique ?	• On exprime u_n en fonction de n : $U_n = q^n \cdot u_0$ et on étudie selon la valeur de q en utilisant le théorème du cours.
Comment établir qu'une suite est convergente ?	• On observe s'il s'agit d'une suite géométrique • Ou on applique les règles (somme, produit, quotient) de suites convergentes. • où avec les théorèmes de comparaison • où on calcule sa limite.