

Produit scalaire et Produit vectoriel de l'espace

I) Produit scalaire :

• Définitions :

■ $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est dit repère orthonormé si :
$$\begin{cases} \|\vec{i}\| = \|\vec{j}\| = \|\vec{k}\| = 1 \\ \vec{i} \perp \vec{j}; \vec{i} \perp \vec{k} \text{ et } \vec{j} \perp \vec{k} \end{cases}$$

Le triplet $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ forme une base orthonormée.

■ On appelle produit scalaire de deux vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{U}'$, le réel ainsi défini :

1) $\vec{U} \cdot \vec{U}' = \|\vec{U}\| \cdot \|\vec{U}'\| \cdot \cos \alpha$

Lorsque $\vec{U}$ et $\vec{U}'$ sont non nul et l'angle α en radians.

2) Si l'un au moins de vecteurs $\vec{U}$ et $\vec{U}'$ est nul alors $\vec{u} \cdot \vec{u}' = 0$

• **Théorème:** $B = (\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ base orthonormée ; $\vec{U} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{U}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ dans B.

$$\vec{U} \cdot \vec{U}' = xx' + yy' + zz'.$$

• Théorèmes :

Soient $\vec{U}$; $\vec{V}$ et $\vec{W}$ trois vecteurs de l'espace et α, β deux réels, on a :

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}$$

$$\vec{W} \cdot (\vec{U} + \vec{V}) = \vec{U} \cdot \vec{W} + \vec{V} \cdot \vec{W}$$

$$(\alpha \vec{U}) \cdot \vec{V} = \alpha (\vec{U} \cdot \vec{V})$$

$$(\vec{U} + \vec{V})^2 = \vec{U}^2 + \vec{V}^2 + 2\vec{U} \cdot \vec{V}$$

$$(\vec{U} - \vec{V})^2 = \vec{U}^2 + \vec{V}^2 - 2\vec{U} \cdot \vec{V}$$

$$(\vec{U} + \vec{V}) \cdot (\vec{U} - \vec{V}) = \vec{U}^2 - \vec{V}^2$$

II) Produit vectoriel :

• Définition :

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs, le produit vectoriel des vecteurs

$\vec{u}$ et $\vec{v}$, note $\vec{u} \wedge \vec{v}$ (où $\vec{u} \times \vec{v}$) est le vecteur défini ainsi :

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = \vec{0}$.

- Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, soient $\vec{u} = \overrightarrow{OA}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{OB}$.

Le vecteur $\overrightarrow{OC} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ est défini de la façon suivante.

→ C appartient à la normale en O au plan (AOB).

→ $OC = \|\vec{u}\| \cdot \|\vec{v}\| \sin \hat{AOB}$ avec $\theta \in]0, \pi[$.

→ $(O, \vec{OA}, \vec{OB}, \vec{OC})$ est un repère direct.

• **Propriétés :**

• $\vec{v} \wedge \vec{u} = -\vec{u} \wedge \vec{v}.$

• $\vec{u} \wedge (k\vec{v}) = k\vec{u} \wedge \vec{v}.$

• Si ABDC est un parallélogramme alors

$\|\vec{AB} \wedge \vec{AC}\| = \text{aire de ABDC} = 2 \times \text{aire du triangle ABC}$

• $\vec{u} \wedge \vec{v}$ est un vecteur orthogonal à $\vec{u}$ et à $\vec{v}$.

■ **Expression dans une base orthonormale directe :**

Soit $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ une base orthonormée directe $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

$$X = \begin{vmatrix} y & y' \\ z & z' \end{vmatrix} = yz' - y'z$$

Alors $\vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix}$ avec $Y = \begin{vmatrix} z & z' \\ x & x' \end{vmatrix} = x'z - xz'$

$$Z = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y$$

Exemple :

$\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, Déterminer les coordonnées de $\vec{u} \wedge \vec{v}$ et $\vec{v} \wedge \vec{u}$ et $2\vec{u} \wedge 3\vec{v}$.

$$X = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \quad \text{et} \quad Y = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 2 = 1 \quad \text{et} \quad Z = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -2 \quad \text{d'où} \quad \vec{u} \wedge \vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{v} \wedge \vec{u} \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ +2 \end{pmatrix}$$

$$2\vec{u} \wedge 3\vec{v} = 6 \cdot \vec{u} \wedge \vec{v} \quad \text{d'où} \quad 2\vec{u} \wedge 3\vec{v} \begin{pmatrix} 24 \\ 6 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Propriété:

$(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ est un repère orthonormal : • si $\vec{u}(x, y, z)$ alors $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

• si $M(x, y, z)$ alors $OM = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

• Si $A(x_A, y_A, z_A)$ et $B(x_B, y_B, z_B)$ alors $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{u}' \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$; $\vec{u} \perp \vec{u}'$ si et seulement si $xx' + yy' + zz' = 0$